# Операції на топологічних просторах: Добуток топологічних просторів

Топологія

Лекція 17

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \left\{f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i\right\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J} \to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \left\{ f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \right\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{I}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{I}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{I}\to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{f\colon \mathcal{J}\to\bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i\Big\}.$$

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{I}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{I}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i = \Big\{f\colon \mathcal{I}\to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \mid f(i)\in A_i\Big\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J}\to\bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i) \in A_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \left\{ f : \mathcal{J} \to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i) \in A_i \right\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{I}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{I}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i = \left\{ f\colon \mathcal{I}\to\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \mid f(i)\in A_i \right\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \;\Big|\; f(i)\in A_i \Big\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

У перших лекціях цього курсу визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

*Декартовий добуток* (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — це множина всіх відображень $f$ з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, і позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i,$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

Для $f \in \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1, \ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, \; x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1, \; f(2) \in X_2\}.$$

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

Для $f \in \prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3\ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i\in\mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = \{f\colon \{1,2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod\limits_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod\limits_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod\limits_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod\limits_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

Для $f \in \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i \in \{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i\in\mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = \{f\colon \{1,2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

Для $f \in \prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod_{i\in\mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = \{f\colon \{1,2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3\ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = \{f \colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = \{f\colon \{1,2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

Для $f \in \prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ точка $f(i) \in A_i$ називається *$i$-ою координатою* відображення $f$. Елемент добутку $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$, кожна $i$-а координата якого є точка $x_i \in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини $A$, яка є елементом $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3\ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вищесказаного випливає, що декартовий добуток $X_1 \times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = \{f\colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}.$$

### Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$. Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathfrak{J}$ відображення $p_i\colon \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j \to X_i$ називається *проекцією*.

### Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$.

Множина $X = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i\colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проєкцією*.

### Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$. Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проєкцією*.

### Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$.

Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i \colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проекцією*.

### Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j\in X_j$.

Множина $X=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i\in\mathcal{J}$ відображення $p_i\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j\to X_i$ називається *проєкцією*.

**Означення 3.5.22**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$.

Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i \colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проєкцією*.

## Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$.

Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i \colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проєкцією*.

### Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$.

Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i \colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проекцією*.

**Означення 3.5.22**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$.

Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проекцією*.

### Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$. Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i \colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проєкцією*.

## Означення 3.5.22

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $p_j$ ставить у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її $j$-ту координату $x_j \in X_j$.

Множина $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$; для довільних $i \in \mathcal{J}$ відображення $p_i \colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_i$ називається *проекцією*.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ топологічних просторів символом $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathscr{J}$, то добуток $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathscr{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathscr{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$*-им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ топологічних просторів символом $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1\times X_2\times\cdots\times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j\in\mathscr{J}$, то добуток $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathscr{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathscr{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X\times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1\times X_2\times\cdots\times X_k$. Якщо $X_j=X$ для довільного $j\in\mathcal{J}$, то добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m}=|\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X\times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

**Вправа 3.5.11**

Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору $X$, а добуток $X \times X$ називають також *квадратом* простору $X$.

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathscr{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathscr{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathscr{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathscr{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathscr{J}} W'_j\Big) = \prod_{j\in\mathscr{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ∎

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W'_j)\,.$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathscr{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathscr{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathscr{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathscr{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathscr{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \left(W_j \cap W_j'\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W'_j).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W_j').$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W'_j).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W_j').$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathscr{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathscr{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathscr{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathscr{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathscr{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j\in\mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j\in\mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j\in\mathscr{B}_j$ при $W_j\neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j\neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right)\cap\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \left(W_j\cap W_j'\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

## Твердження 3.5.23

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathscr{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathscr{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathscr{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathscr{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathscr{J}} \left(W_j \cap W'_j\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ∎

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W_j').$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W_j').$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ∎

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W'_j)\,.$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathscr{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathscr{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathscr{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathscr{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j'\right) = \prod_{j\in\mathscr{J}} \left(W_j \cap W_j'\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\right) \cap \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} W'_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W'_j).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

**Твердження 3.5.23**

Сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для скінченної множини $j \in \mathcal{J}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Більше того, якщо для кожного $j \in \mathcal{J}$ зафіксована деяка база $\mathscr{B}_j$ простору $X_j$, то підсім'я, яка складається з тих $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, в яких $W_j \in \mathscr{B}_j$ при $W_j \neq X_j$, також утворює базу.

***Доведення.*** За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина $W_i$ відкрита в просторі $X_{j_i}$, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap W_j') \,.$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. ■

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathcal{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathcal{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathcal{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathfrak{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathfrak{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathfrak{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathfrak{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$.

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathcal{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathcal{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathcal{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

**Вправа 3.5.12**

Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathfrak{J}} W_j$, де $W_j$ — відкрита підмножина топологічного простору $X_j$ і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathfrak{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathfrak{J}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathfrak{J}$ і $W_{j_i}$ — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) $X_{j_i}$, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$.

### Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).

## Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).

## Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X \times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).

## Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X \times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).

## Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X \times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).

## Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X \times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).

### Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

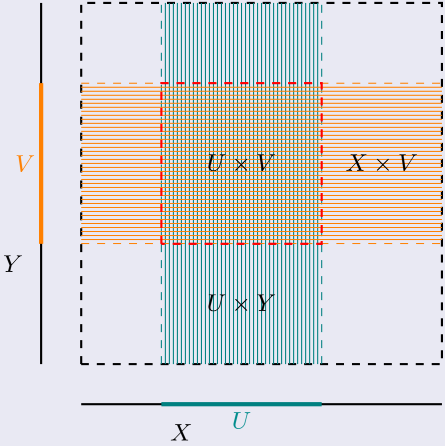
де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).

## Приклад 3.5.24

Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів $X$ і $Y$, відповідно (див. рис.).



### Приклад 3.5.24 (продовження)

Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$ можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів $X$ та $Y$, відповідно.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$ можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів $X$ та $Y$, відповідно.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$ можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів $X$ та $Y$, відповідно.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$ можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів $X$ та $Y$, відповідно.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

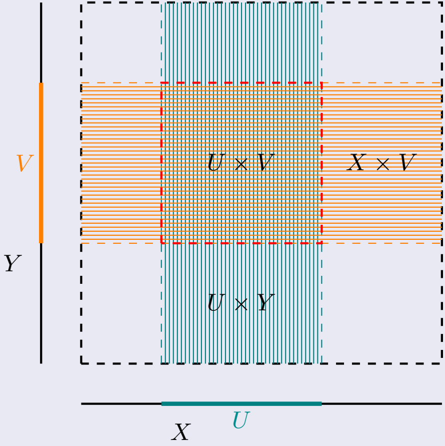
Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$ можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів $X$ та $Y$, відповідно.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$ можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів $X$ та $Y$, відповідно.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів $X$ і $Y$ можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів $X$ та $Y$, відповідно.



## Приклад 3.5.24 (продовження)

Зауважимо також, що навіть у випадку, коли $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — топології на $X$ та $Y$, відповідно, то сім'я $\mathscr{B}_{X\times Y}$ не є топологією на $X \times Y$.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Зауважимо також, що навіть у випадку, коли $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — топології на $X$ та $Y$, відповідно, то сім'я $\mathscr{B}_{X\times Y}$ не є топологією на $X \times Y$.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Зауважимо також, що навіть у випадку, коли $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — топології на $X$ та $Y$, відповідно, то сім'я $\mathscr{B}_{X\times Y}$ не є топологією на $X \times Y$.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

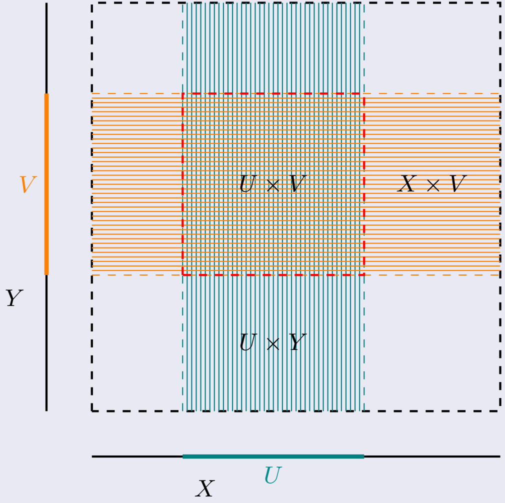
Зауважимо також, що навіть у випадку, коли $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — топології на $X$ та $Y$, відповідно, то сім'я $\mathscr{B}_{X\times Y}$ не є топологією на $X \times Y$.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Зауважимо також, що навіть у випадку, коли $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — топології на $X$ та $Y$, відповідно, то сім'я $\mathscr{B}_{X\times Y}$ не є топологією на $X \times Y$.

## Приклад 3.5.24 (продовження)

Зауважимо також, що навіть у випадку, коли $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — топології на $X$ та $Y$, відповідно, то сім'я $\mathscr{B}_{X\times Y}$ не є топологією на $X \times Y$.



**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

*Доведення.* Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї. Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

*Доведення.* Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A \colon A \to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ∎

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

*Доведення.* Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A \to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї. Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

*Доведення.* Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A \to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

*Доведення.* Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A \colon A \to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ∎

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї. Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї. Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ∎

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A \to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ∎

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A \colon A \to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j\neq\varnothing$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A\to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.
Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.25**

Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $A_j$ — підпростір простору $X_j$, $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, збігаються.

***Доведення.*** Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. Оскільки звуження $p_j|A \colon A \to A_j$ проекцій $p_j$ є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на $A$ сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору $A$ є перетином множини $A$ з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів $A$ з елементами цієї сім'ї.

Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то топологія добутку на $A$ сильніша за топологію підпростору. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \qquad (1)$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність
$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що
$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$
тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

*Доведення.* З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ∎

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathscr{J}} A_j = \prod_{j\in\mathscr{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathscr{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathfrak{J}} \overline{A_j}. \qquad (1)$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod_{j\in\mathfrak{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j = \prod_{j\in\mathfrak{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathfrak{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod_{j\in\mathfrak{J}} \overline{A_j}$. ■

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \prod_{j\in\mathcal{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathcal{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}$. ∎

**Твердження 3.5.26**

Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ виконується рівність

$$\overline{\prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathfrak{J}} \overline{A_j}. \qquad (1)$$

***Доведення.*** З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$, який містить точку $x$, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j = \prod_{j\in\mathfrak{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathfrak{J}$ і для довільного відкритого околу $W_j$ $j$-ої координати точки $x$ ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} \overline{A_j}$. ■

### Наслідок 3.5.27

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

### Наслідок 3.5.28

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

## Наслідок 3.5.27

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

## Наслідок 3.5.28

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ∎

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

### Наслідок 3.5.27

Множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathscr{J}$. ∎

### Наслідок 3.5.28

Множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathscr{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$, то множина $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathscr{J}$. ∎

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing\neq A_j\subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j\in\mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j\in\mathcal{J}$, то множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j=\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j}=\prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j=\overline{A_j}$ для кожного $j\in\mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j\subseteq X_j\neq\varnothing$, щільна в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j\in\mathcal{J}$.

## Наслідок 3.5.27

Множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathscr{J}$. ■

## Наслідок 3.5.28

Множина $\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathscr{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Наслідок 3.5.27**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

**Наслідок 3.5.28**

Множина $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

### Наслідок 3.5.27

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — замкнена множина топологічного простору $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

***Доведення.*** З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі $A_j$ замкнені в просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$, то множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини $A_j$ — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathcal{J}$. ■

### Наслідок 3.5.28

Множина $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли $A_j$ — щільна множина в топологічному просторі $X_j$ для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

## Зауваження 3.5.29

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

## Твердження 3.5.30

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

### Зауваження 3.5.29

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

### Твердження 3.5.30

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Зауваження 3.5.29**

Оскільки не кожну підмножину простору $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (1)

$$\overline{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathcal{J}} \overline{A_j}. \tag{1}$$

З твердження 3.3.31 випливає

**Твердження 3.5.30**

Відображення $f$ топологічного простору $X$ у добуток $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ неперервне тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathcal{J}$.

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ∎

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ∎

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ∎

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ∎

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ∎

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J}=\bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}}\mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l\cap\mathcal{J}_{l'}=\varnothing$ для $l\neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}}X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l}X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ точку

$$f(x)=\{x_l\}\in\prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l}X_j\Big),$$

де

$$x_l=\{x_j\}\in\prod_{j\in\mathcal{J}_l}X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l}X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ∎

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j .$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ∎

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}}\Big(\prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні.

**Твердження 3.5.31**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathcal{L}} \mathcal{J}_l$, де $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

***Доведення.*** Поставимо у відповідність точці $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення $f$ взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathcal{L}} \Big( \prod\limits_{j\in\mathcal{J}_l} X_j \Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення $f$ і $f^{-1}$ неперервні. ■

**Зауваження 3.5.32**

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

**Твердження 3.5.33**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j\in\mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

## Зауваження 3.5.32

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

## Твердження 3.5.33

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon \mathscr{J} \to \mathscr{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j\in\mathscr{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j\in\mathscr{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

**Зауваження 3.5.32**

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$.

**Твердження 3.5.33**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j\in\mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

### Зауваження 3.5.32

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

### Твердження 3.5.33

Нехай $\{X_j\}_{j \in \mathscr{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi \colon \mathscr{J} \to \mathscr{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j \in \mathscr{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j \in \mathscr{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

**Зауваження 3.5.32**

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$.

**Твердження 3.5.33**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j\in\mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

**Зауваження 3.5.32**

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

**Твердження 3.5.33**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j\in\mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

## Зауваження 3.5.32

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

## Твердження 3.5.33

Нехай $\{X_j\}_{j \in \mathscr{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon \mathscr{J} \to \mathscr{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j \in \mathscr{J}} X_j \quad \text{і} \quad \prod_{j \in \mathscr{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

### Зауваження 3.5.32

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

### Твердження 3.5.33

Нехай $\{X_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi \colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j \in \mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j \in \mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

### Зауваження 3.5.32

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

### Твердження 3.5.33

Нехай $\{X_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi \colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j \in \mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j \in \mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

**Зауваження 3.5.32**

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

**Твердження 3.5.33**

Нехай $\{X_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j \in \mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j \in \mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

**Зауваження 3.5.32**

Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору $X$ і довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

**Твердження 3.5.33**

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \qquad \text{і} \qquad \prod_{j\in\mathcal{J}} X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

### Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

**Приклад 3.5.34**

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n + 1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

### Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

### Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

### Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

### Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

### Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

### Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n + 1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.

Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.

Підпростір евклідового $n + 1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

## Приклад 3.5.34

Нехай $n$ — натуральне число.
Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток $n$ екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим $n$-вимірним простором*.
Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток $n$ екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним $n$-вимірним кубом*.
Якщо $m > n$, то підпростір евклідового $m$-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m - n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m > n$.
Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.
Підпростір евклідового $n$-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

називається *одиничною $n$-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.
Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — це *тор*.

Зауважимо, що для непорожньої множини $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j \subseteq \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ маємо

$$p_{j_0}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) = W_{j_0}.$$

Звідки випливає, що проекції $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ є відкритими відображеннями. З прикладу 3.5.35 випливає, що в загальному випадку проекція $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ не є замкненим відображенням.

Зауважимо, що для непорожньої множини $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j \subseteq \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ маємо

$$p_{j_0}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) = W_{j_0}.$$

Звідки випливає, що проекції $p_j\colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ є відкритими відображеннями. З прикладу 3.5.35 випливає, що в загальному випадку проекція $p_j\colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ не є замкненим відображенням.

Зауважимо, що для непорожньої множини $\prod\limits_{j \in \mathcal{J}} W_j \subseteq \prod\limits_{j \in \mathcal{J}} X_j$ маємо

$$p_{j_0}\Big(\prod_{j \in \mathcal{J}} W_j\Big) = W_{j_0}.$$

Звідки випливає, що проекції $p_j \colon \prod\limits_{j \in \mathcal{J}} X_j \to X_j$ є відкритими відображеннями. З прикладу 3.5.35 випливає, що в загальному випадку проекція $p_j \colon \prod\limits_{j \in \mathcal{J}} X_j \to X_j$ не є замкненим відображенням.

Зауважимо, що для непорожньої множини $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j \subseteq \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ маємо

$$p_{j_0}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) = W_{j_0}.$$

Звідки випливає, що проекції $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ є відкритими відображеннями. З прикладу 3.5.35 випливає, що в загальному випадку проекція $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ не є замкненим відображенням.

Зауважимо, що для непорожньої множини $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} W_j \subseteq \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ маємо

$$p_{j_0}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) = W_{j_0}.$$

Звідки випливає, що проекції $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ є відкритими відображеннями. З прикладу 3.5.35 випливає, що в загальному випадку проекція $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_j$ не є замкненим відображенням.

Зауважимо, що для непорожньої множини $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} W_j \subseteq \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ маємо

$$p_{j_0}\Big(\prod_{j\in\mathfrak{J}} W_j\Big) = W_{j_0}.$$

Звідки випливає, що проекції $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j \to X_j$ є відкритими відображеннями. З прикладу 3.5.35 випливає, що в загальному випадку проекція $p_j\colon \prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j \to X_j$ не є замкненим відображенням.

### Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

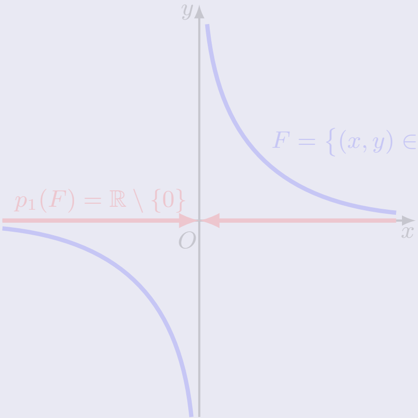
замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

## Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

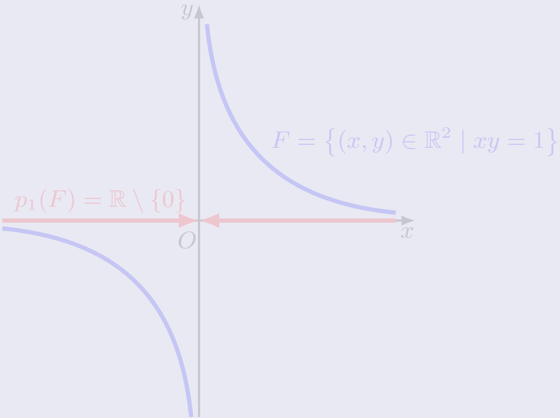


### Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

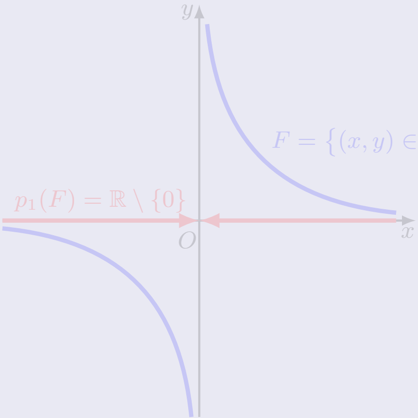


## Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

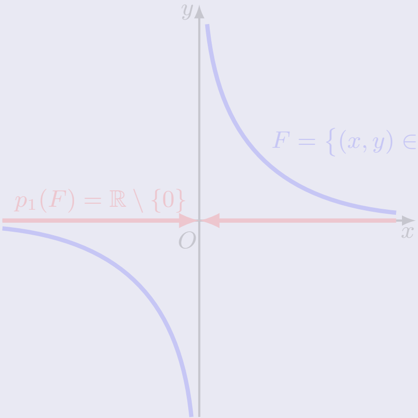


### Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

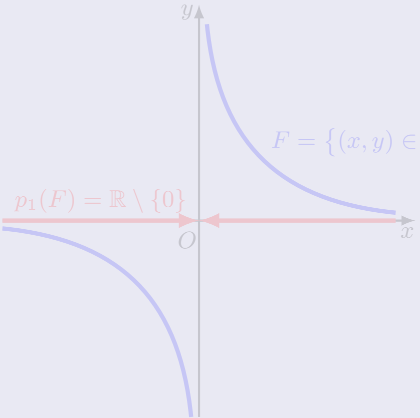


## Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

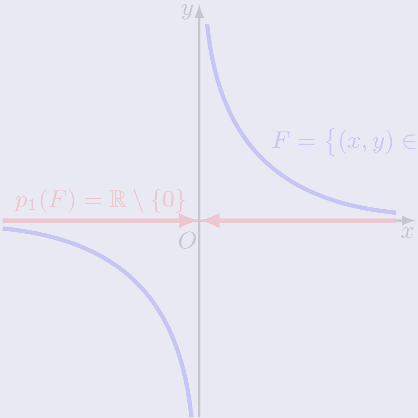


### Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

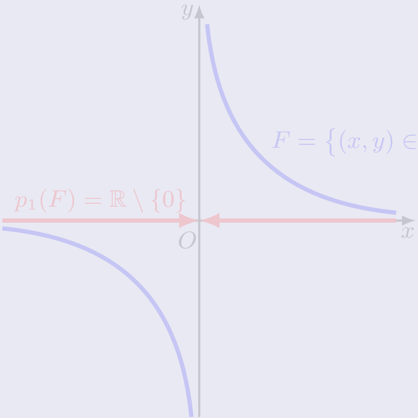


## Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).

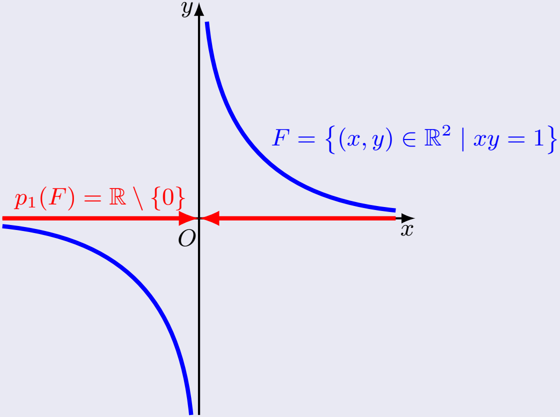


## Приклад 3.5.35

Проекція $p_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь $Ox$ не є замкненим відображенням. Справді, множина

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$ (див. рис.).



**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j \to Y_j$, $A_j \subseteq X_j$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

## Означення 3.5.36

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}A_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathscr{J}}X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathscr{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}}f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathscr{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathscr{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathscr{J}}A_j\Big)=\prod_{j\in\mathscr{J}}f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathscr{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathscr{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathscr{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j \to Y_j$, $A_j \subseteq X_j$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}A_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j \to Y_j$, $A_j \subseteq X_j$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}A_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j \to Y_j$, $A_j \subseteq X_j$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j \to Y_j$, $A_j \subseteq X_j$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}A_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

**Означення 3.5.36**

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j \to Y_j$, $A_j \subseteq X_j$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

## Означення 3.5.36

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}A_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

### Означення 3.5.36

Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X_j\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x=\{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f=\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}A_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j\to Y_j$, $A_j\subseteq X_j$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

### Означення 3.5.37

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathscr{J}} f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathscr{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathscr{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathscr{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathscr{J}} B_j\Big)=\prod_{j\in\mathscr{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathscr{J}$.

**Означення 3.5.37**

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.37**

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

### Означення 3.5.37

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j \colon X \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x \in X$ в точку $\{f_j(x)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \Delta f_2 \Delta \cdots \Delta f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f = \mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f \colon X \to Y_j$, $A \subseteq X$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

### Означення 3.5.37

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

### Означення 3.5.37

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.37**

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j) \qquad \text{i} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

## Означення 3.5.37

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathscr{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\underset{j\in\mathscr{J}}{\Delta} f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathscr{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\underset{j\in\mathscr{J}}{\Delta} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathscr{J}}f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathscr{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathscr{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathscr{J}$.

**Означення 3.5.37**

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.37**

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

### Означення 3.5.37

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

### Означення 3.5.37

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big)=\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathcal{J}$.

**Означення 3.5.37**

Нехай дано топологічний простір $X$, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$, де $f_j\colon X\to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x\in X$ в точку $\{f_j(x)\}\in\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}}Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathfrak{J}}f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathfrak{J}=\{1,2,\ldots,k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f=\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathfrak{J}}f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A)=\prod_{j\in\mathfrak{J}}f(A_j)\qquad\text{і}\qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathfrak{J}}B_j\Big)=\prod_{j\in\mathfrak{J}}f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X\to Y_j$, $A\subseteq X$ і $B_j\subseteq Y_j$ для всіх $j\in\mathfrak{J}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta}\,\mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x)\right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

# Лекція 17: Добуток топологічних просторів

Також зауважимо, що діагональ $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} \mathrm{id}_{X_j} \colon X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j \colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \mathop{\Delta}\limits_{j\in\mathcal{J}} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} \colon X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j \colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathfrak{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathfrak{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathfrak{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} f_j : \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathfrak{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathfrak{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathfrak{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\mathop{\Delta}\limits_{j \in \mathcal{J}} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \mathop{\Delta}\limits_{j \in \mathcal{J}} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j \in \mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j \in \mathcal{J}} f_j : \prod_{j \in \mathcal{J}} X_j \to \prod_{j \in \mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j \in \mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j', j'' \in \mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j \in \mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j : \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} \colon X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j \colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathfrak{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$\mathrm{i} = \underset{j\in\mathfrak{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j} : X \to \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathfrak{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} f_j : \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathfrak{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = \mathrm{i}(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathfrak{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо $X$ — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathfrak{J}} \left\{ x \in \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x) \right\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

**Вправа 3.5.13**

Доведіть, що добуток $T_i$-просторів є $T_i$-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

**Вправа 3.5.14**

Доведіть, якщо добуток $\prod\limits_{j \in \mathcal{J}} X_j$ є непорожнім $T_i$-простором, то всі $X_j$ є $T_i$-просторами для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

**Вправа 3.5.13**

Доведіть, що добуток $T_i$-просторів є $T_i$-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

**Вправа 3.5.14**

Доведіть, якщо добуток $\prod_{j \in \mathcal{J}} X_j$ є непорожнім $T_i$-простором, то всі $X_j$ є $T_i$-просторами для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

**Вправа 3.5.13**

Доведіть, що добуток $T_i$-просторів є $T_i$-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

**Вправа 3.5.14**

Доведіть, якщо добуток $\prod\limits_{j \in \mathcal{J}} X_j$ є непорожнім $T_i$-простором, то всі $X_j$ є $T_i$-просторами для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

### Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbb{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

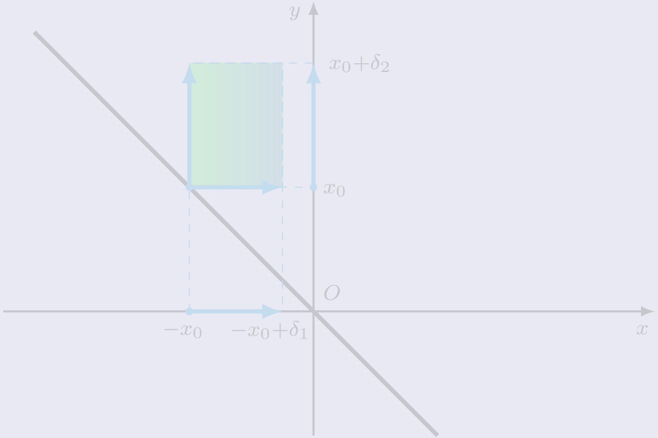
(див. рис.).

## Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

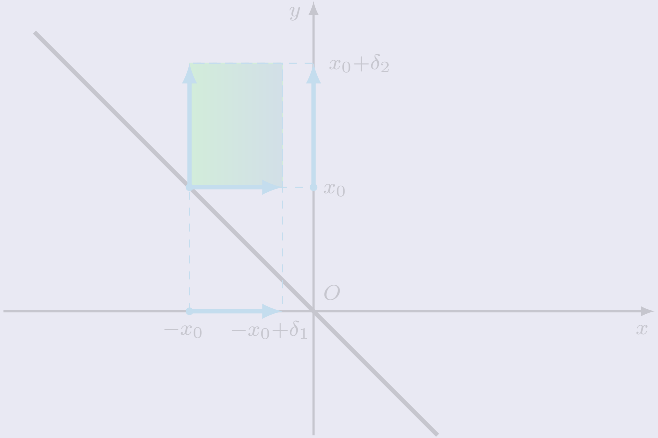


### Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

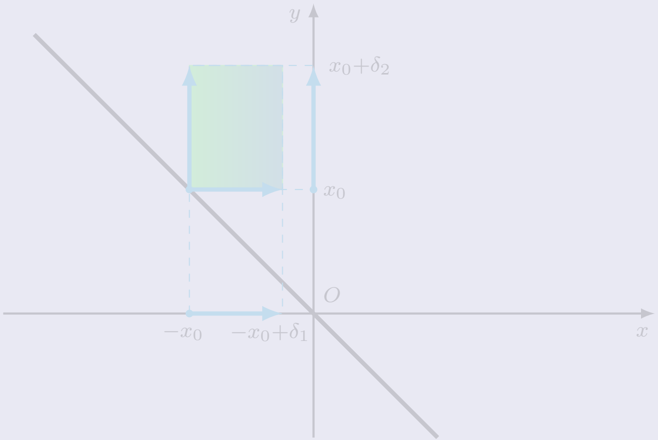


### Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

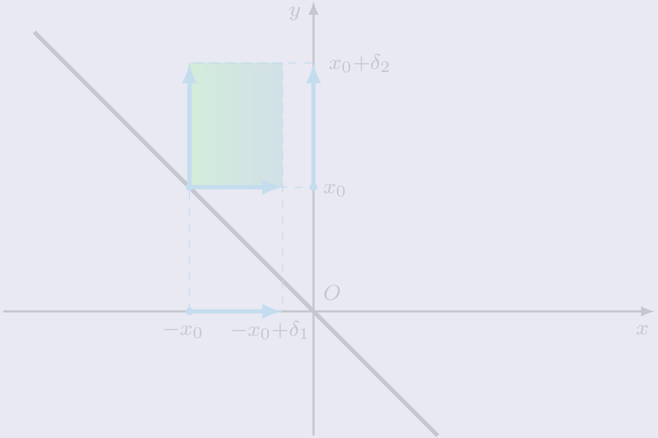


## Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

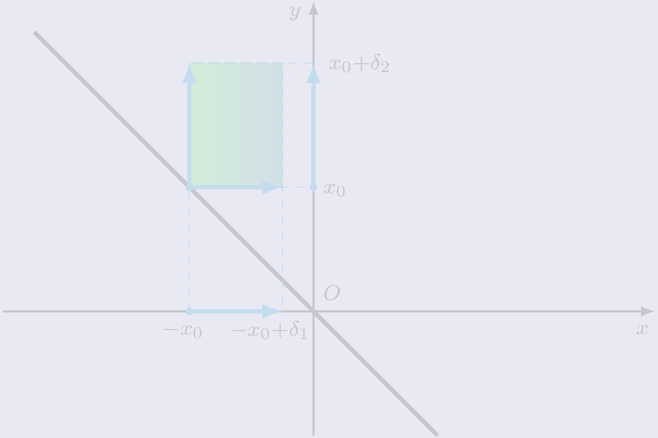


## Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

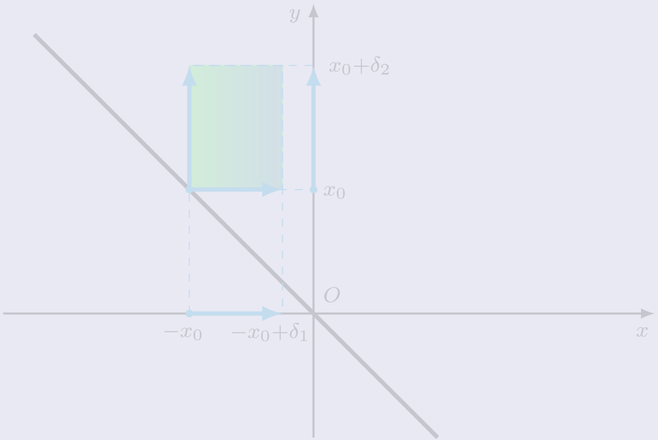


### Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

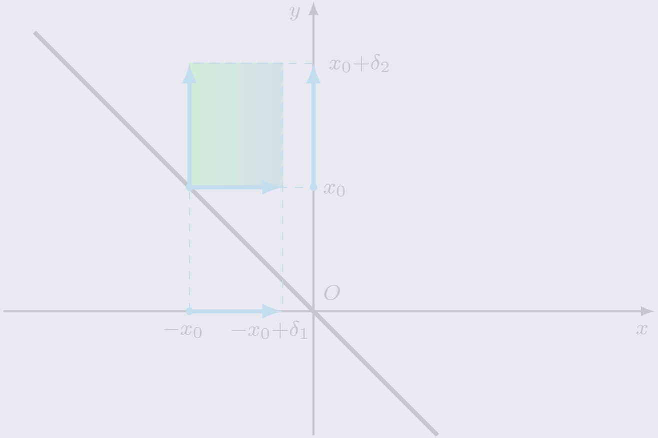


## Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

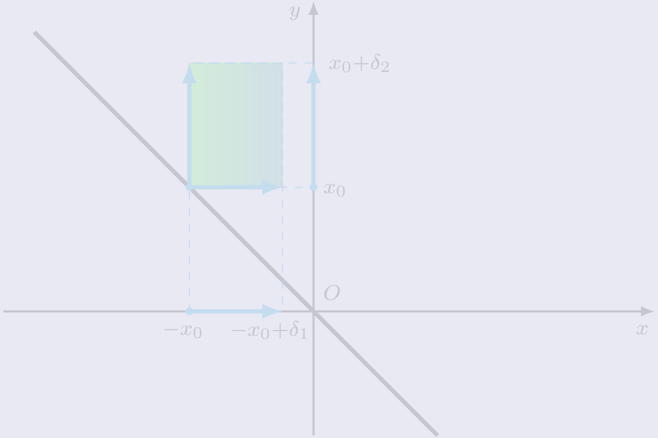


## Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).

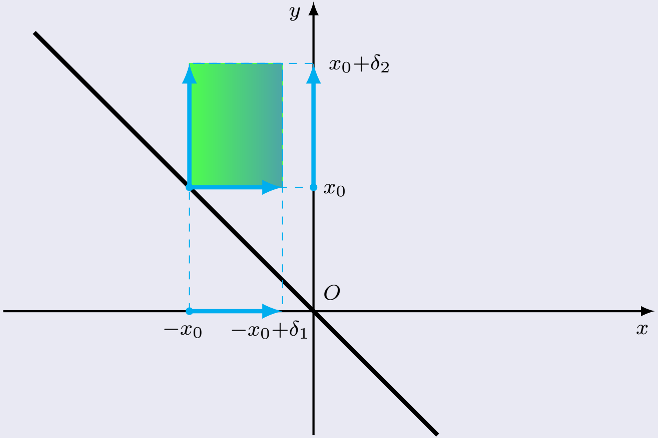


## Приклад 3.5.38

Раніше ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис.).



### Приклад 3.5.38 (продовження)

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

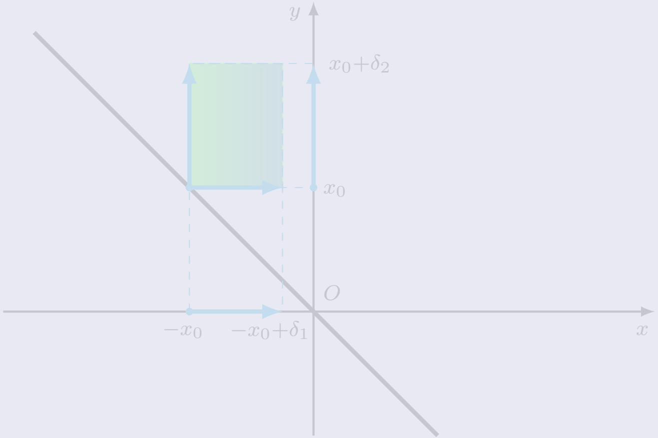
Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зоргенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.

## Приклад 3.5.38 (продовження)

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.

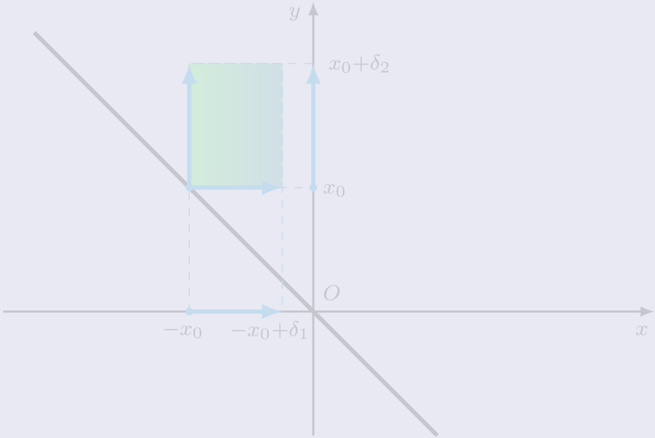


## Приклад 3.5.38 (продовження)

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

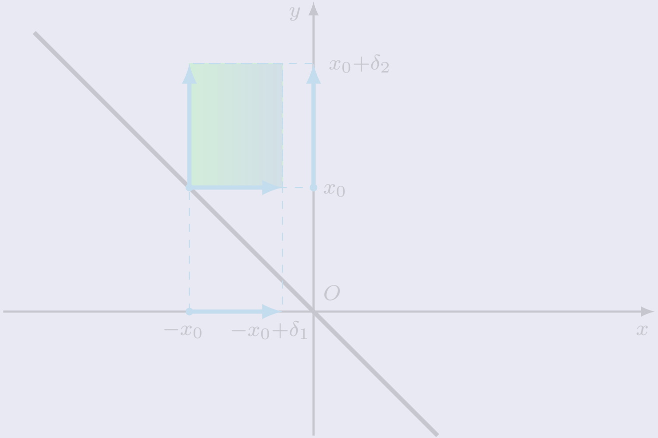
Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.



**Приклад 3.5.38 (продовження)**

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину
$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.

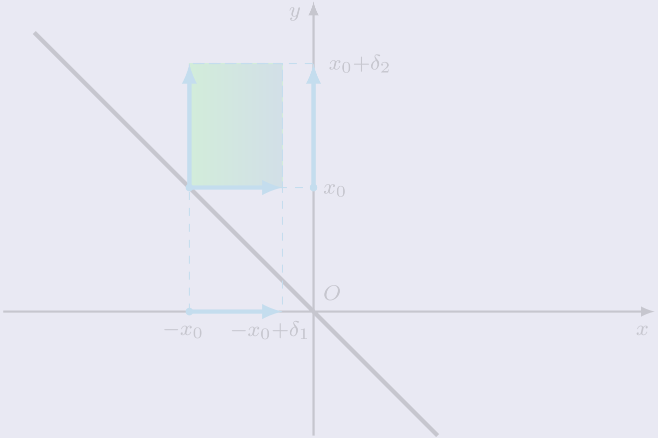


## Приклад 3.5.38 (продовження)

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.

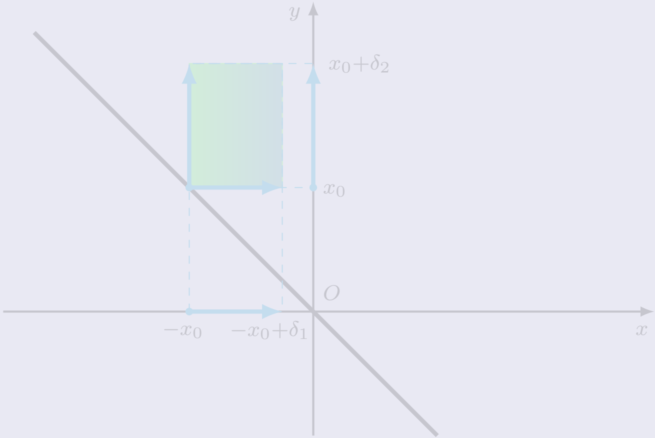


## Приклад 3.5.38 (продовження)

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину

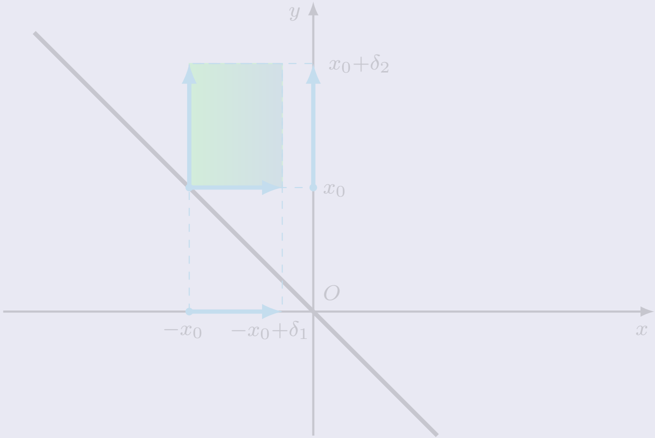
$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.



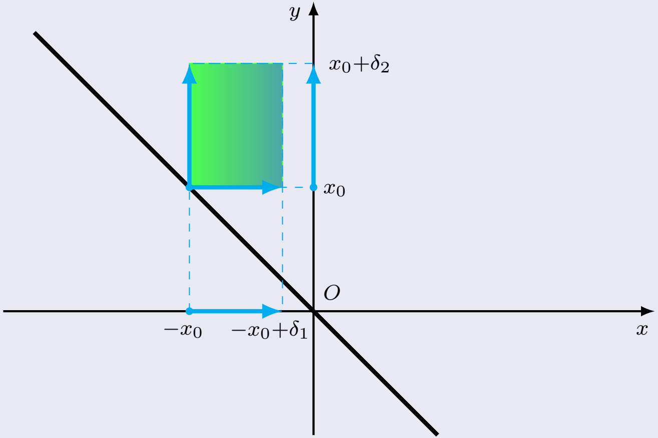
**Приклад 3.5.38 (продовження)**

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину
$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$
Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.



## Приклад 3.5.38 (продовження)

Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину
$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$
Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.



**Вправа 3.5.15**

Доведіть, що топологічний простір $X$ є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли його діагональ

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

є замкненою підмножиною в квадраті $X \times X$.

**Вправа 3.5.15**

Доведіть, що топологічний простір $X$ є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли його діагональ

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

є замкненою підмножиною в квадраті $X \times X$.

Дякую за увагу!!!