Операції на топологічних просторах: Сума топологічних просторів

Топологія

Лекція 16

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathscr{I}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ і позначається $\bigoplus_{i\in\mathscr{I}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathscr{I} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathscr{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і позначається $\bigoplus\limits_{i\in\mathscr{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathscr{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathcal{J}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і позначається $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7

Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A \right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ∎

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathscr{I}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathscr{I}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathscr{I}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathscr{I}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathscr{I}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathscr{I}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathscr{I}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathscr{I}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A \right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus\limits_{i \in \mathfrak{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathfrak{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus\limits_{i \in \mathfrak{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus\limits_{i \in \mathfrak{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i \in \mathfrak{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathfrak{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathfrak{J}$. ∎

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus\limits_{i \in \mathfrak{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ∎

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Твердження 3.5.16

Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathcal{J}$. ■

Наслідок 3.5.17

Кожна множина X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j \in \mathcal{J}$, в $\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_j.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j \in \mathcal{J}$, в $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_j.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j\in\mathcal{J}$, в $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_j.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j \in \mathcal{J}$, в $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через $\mathfrak{i}_j$.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j \in \mathcal{J}$, в $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_j.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j \in \mathcal{J}$, в $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_j.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j \in \mathcal{J}$, в $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_j.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j \in \mathcal{J}$, в $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_j.

Твердження 3.5.18

Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j \in \mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ∎

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ∎

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{I}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{I}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ∎

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ∎

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{I}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{I}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ∎

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{I}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{I}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ∎

Твердження 3.5.19

Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X = \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$.

Доведення. Множини X і $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їхні сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i \in \mathcal{J}$ перетин $U \cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U = \bigoplus_{i\in\mathcal{J}} (U \cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. ■

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathrm{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4.$

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathrm{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathrm{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Наслідок 3.5.20

Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{J}_i$, де $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_{i'} = \varnothing$ для $i \neq i'$, то

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j \right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8

Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Приклад 3.5.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Лекція 16: Сума топологічних просторів

Вправа 3.5.9

Доведіть, що для довільної точки x прямої стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ та для довільного відкритого околу U точки x, пряму Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ можна зобразити як суму $X_1 \bigoplus X_2$, де $x \in X_1 \subseteq U$.

Вправа 3.5.10

Доведіть, що дійсну пряму $\mathbb{R}$ не можна зобразити як суму $X_1 \bigoplus X_2$, непорожніх множин $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Вправа 3.5.9

Доведіть, що для довільної точки x прямої стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ та для довільного відкритого околу U точки x, пряму Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ можна зобразити як суму $X_1 \bigoplus X_2$, де $x \in X_1 \subseteq U$.

Вправа 3.5.10

Доведіть, що дійсну пряму $\mathbb{R}$ не можна зобразити як суму $X_1 \bigoplus X_2$, непорожніх множин $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Вправа 3.5.9

Доведіть, що для довільної точки x прямої стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ та для довільного відкритого околу U точки x, пряму Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ можна зобразити як суму $X_1 \bigoplus X_2$, де $x \in X_1 \subseteq U$.

Вправа 3.5.10

Доведіть, що дійсну пряму $\mathbb{R}$ не можна зобразити як суму $X_1 \bigoplus X_2$, непорожніх множин $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Дякую за увагу!!!