Операції на топологічних просторах: Підпростори. Індукована топологія

Топологія

Лекція 15

У наступних чотирьох лекціях ми вивчатимемо операції на топологічних просторах, тобто методи побудови нових топологічних просторів із заданих.

У наступних чотирьох лекціях ми вивчатимемо операції на топологічних просторах, тобто методи побудови нових топологічних просторів із заданих.

Лекція 15: Операції на топологічних просторах

У наступних чотирьох лекціях ми вивчатимемо операції на топологічних просторах, тобто методи побудови нових топологічних просторів із заданих.

Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X, τ_X) і підмножину $M \subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M \cap U$, де $U \in \tau_X$ (див. рис.), задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X,τ_X) і підмножину $M\subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M\cap U$, де $U\in\tau_X$ (див. рис.), задовольняє умови ($\mathscr{O}1$), ($\mathscr{O}2$) і ($\mathscr{O}3$).

Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X, τ_X) і підмножину $M \subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M \cap U$, де $U \in \tau_X$ (див. рис.), задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

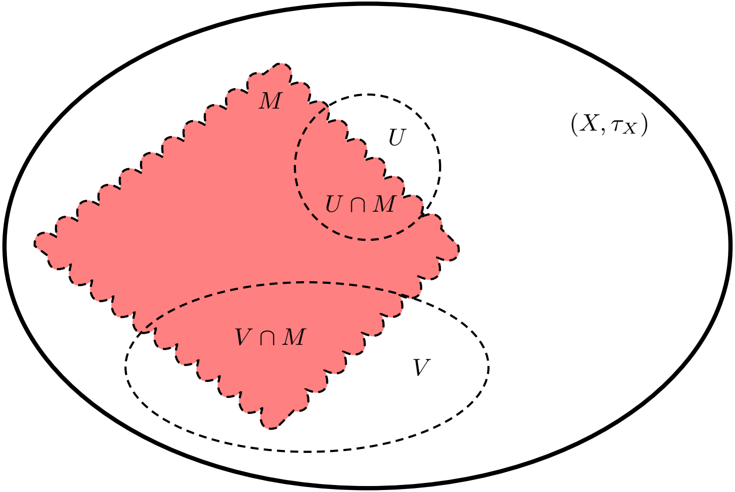
Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X, τ_X) і підмножину $M \subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M \cap U$, де $U \in \tau_X$ (див. рис.), задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X, τ_X) і підмножину $M \subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M \cap U$, де $U \in \tau_X$ (див. рис.), задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

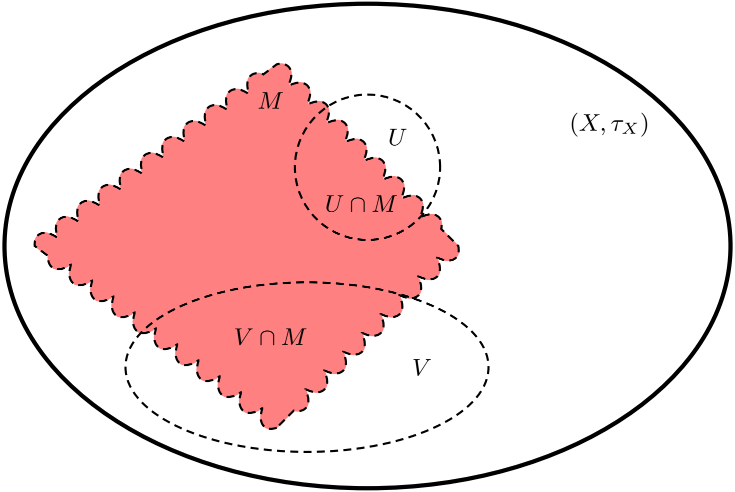
Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X, τ_X) і підмножину $M \subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M \cap U$, де $U \in \tau_X$ (див. рис.), задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X, τ_X) і підмножину $M \subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M \cap U$, де $U \in \tau_X$ (див. рис.), задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.



Справді, умова ($\mathscr{O}1$) виконується, оскільки $\varnothing = M \cap \varnothing$ і $M = M \cap X$, Справді, умова ($\mathscr{O}1$) виконується, оскільки $\varnothing = M \cap \varnothing$ і $M = M \cap X$, Справді, умова $(\mathscr{O}1)$ виконується, оскільки $\varnothing = M \cap \varnothing$ і $M = M \cap X$,



а з рівностей

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2) \text{ і } \bigcup_{i \in \mathscr{J}} (M \cap U_i) = M \cap \bigcup_{i \in \mathscr{J}} U_i$$

випливає, що також виконуються умови $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

а з рівностей

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2) \text{ і } \bigcup_{i \in \mathscr{I}} (M \cap U_i) = M \cap \bigcup_{i \in \mathscr{I}} U_i$$

випливає, що також виконуються умови $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

а з рівностей

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2) \text{ і } \bigcup_{i \in \mathscr{J}} (M \cap U_i) = M \cap \bigcup_{i \in \mathscr{J}} U_i$$

випливає, що також виконуються умови $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

а з рівностей

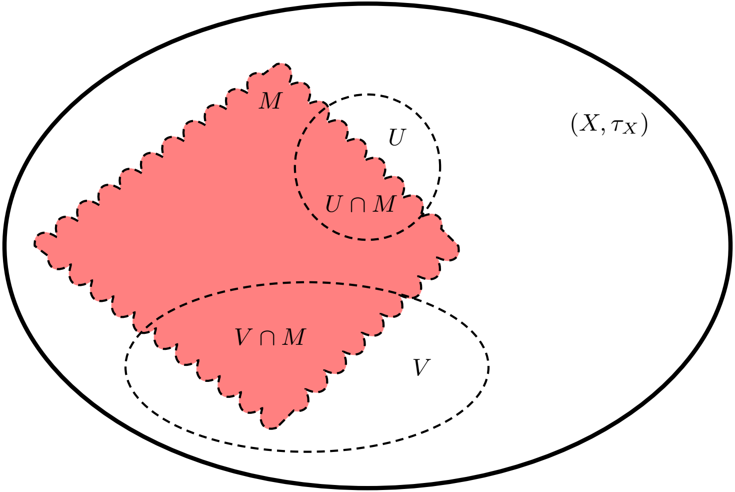
$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2) \text{ і } \bigcup_{i \in \mathscr{J}} (M \cap U_i) = M \cap \bigcup_{i \in \mathscr{J}} U_i$$

випливає, що також виконуються умови $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

а з рівностей

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2) \text{ і } \bigcup_{i \in \mathscr{J}} (M \cap U_i) = M \cap \bigcup_{i \in \mathscr{J}} U_i$$

випливає, що також виконуються умови $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.



Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю
$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$
в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю
$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то
$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$
і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією*, або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то

$$M \setminus A = M \cap U,$$

де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$

і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то

$$M \setminus A = M \cap U,$$

де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$

і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. $\blacksquare$

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то

$$M \setminus A = M \cap U,$$

де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$

і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то

$$M \setminus A = M \cap U,$$

де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$

і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то

$$M \setminus A = M \cap U,$$

де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$

і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то
$$M \setminus A = M \cap U,$$
де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,
$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$
і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. ■

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2

Нехай (X, τ_X) — топологічний простір, (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова “підпростір” і “підмножина” будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати “сепарабельна підмножина”, “зв'язна підмножина” і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова “підпростір” і “підмножина” будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати “сепарабельна підмножина”, “зв’язна підмножина” і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв’язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова “підпростір” і “підмножина” будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати “сепарабельна підмножина”, “зв’язна підмножина” і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв’язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова “підпростір” і “підмножина” будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати “сепарабельна підмножина”, “зв’язна підмножина” і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв’язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1

Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X \to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X \to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau) \to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X \to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i \in \mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X \to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau) \to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X \to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathfrak{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X \to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau) \to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями

$$f_i\colon X \to Y_i.$$

Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення

$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$

є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i \in \mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням

$$f\colon X \to Y,$$

то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення

$$f\colon (X,\tau) \to Y$$

є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathfrak{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X \to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X \to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau) \to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathfrak{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X \to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X \to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau) \to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X \to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X \to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau) \to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathcal{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathfrak{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X\to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau)\to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i\in\mathfrak{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X\to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau)\to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Означення 3.5.3

Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ топологічних просторів з відображеннями
$$f_i\colon X \to Y_i.$$
Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення
$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i \in \mathfrak{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях.

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням
$$f\colon X \to Y,$$
то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення
$$f\colon (X,\tau) \to Y$$
є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним.
Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M \colon M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M \colon M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M \colon M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M \colon M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f \colon X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $\mathrm{i}_M(x) = x$ визначає відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$. Оскільки $\mathrm{i}_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ є неперервним. Відображення $\mathrm{i}_M : M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2

Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3

Доведіть, що вкладення $\mathrm{i}_M : M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли M є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\,\mathrm{i}_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ∎

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ∎

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ∎

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення* $f\colon X \to Y$ *на* $L \subset Y$, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.4

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. ■

Вправа 3.5.4

Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо
$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X\to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L\subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L)\to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A\subset X$ маємо
$$f_L(A\cap f^{-1}(L))=f(A\cap f^{-1}(L))=f(A)\cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X\to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X\to L$ такі, що $f=\mathrm{i}_L\,f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X\to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X\to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X\to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L\subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L)\to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A\subset X$ маємо

$$f_L(A\cap f^{-1}(L))=f(A\cap f^{-1}(L))=f(A)\cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X\to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X\to L$ такі, що $f=\mathrm{i}_L\,f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X\to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X\to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо
$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо
$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо
$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ∎

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо
$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо
$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Твердження 3.5.5

Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Доведення. Для $A \subset X$ маємо
$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$
і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. ■

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = \mathrm{i}_L\, f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5

Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.6

Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією, є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6

Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L.

Приклад 3.5.8

Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є “вага $\leqslant \mathfrak{m}$” або “характер $\leqslant \mathfrak{m}$” і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є “вага $\leqslant \mathfrak{m}$” або “характер $\leqslant \mathfrak{m}$” і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1,1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1,1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x,y) \in L_1 \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є “вага $\leqslant \mathfrak{m}$” або “характер $\leqslant \mathfrak{m}$” і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Приклад 3.5.9

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою
$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Означення 3.5.10

Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором, оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як “спадково сепарабельний простір” і “спадково нормальний простір”.

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11

Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \; M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ∎

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \; M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$M \cap U(x) \ni x$, $M \cap U(y) \ni y$ і $(M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing$,

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \; M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \; M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \; M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \; M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x,\ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \; M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\operatorname{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\operatorname{Cl}_M(A) = M \cap \operatorname{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \operatorname{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ∎

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \ M \cap U(y) \ni y \text{ і } (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже, топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{і} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{і} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. ■

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$
неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Означення 3.5.12

Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень, або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1,1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1,1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1,1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1,1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1,1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона)

Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\, c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\,c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\, c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\,c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\,c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\, c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\, c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\,c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\, c \left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\,c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (1) і (2):

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{2}$$

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \dots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1\colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J\colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1}\colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1\colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J\colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1}\colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i + 1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \dots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{i}$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \dots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Big|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1\colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J\colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1}\colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ неперервних функцій $g_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1\colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J\colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \dots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1}\colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1\colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J\colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1}\colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ неперервних функцій $g_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{4}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = \mathrm{i}_J\, f$, де $\mathrm{i}_J \colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \dots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = \mathrm{i}_J\, f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|\, M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1} \colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3) і (4) з $i+1$ замість i.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F \colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^i, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^i, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^i, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^i, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

З умови (3)

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3}$$

і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (4)

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M \tag{4}$$

отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ∎

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1,1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ∎

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1,1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{i} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\,f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\,f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\,F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{i} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1,1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x)\cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ∎

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1,1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Лекція 15: Підпростори. Індукована топологія

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\,f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1,1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{i} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\,f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\,F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\,f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1,1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\,f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\,F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{i} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1}\, F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $\mathrm{i}\, f$, де $\mathrm{i}\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$\mathrm{i}(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1, 1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $\mathrm{i}\, f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq \mathrm{i}(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = \mathrm{i}^{-1} F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, харатеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f: A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f: A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1: X \to Y$ і $F_2: X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f: A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів.

Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A\cup B\to\mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in A;\\ 0, & \text{якщо } x\in B,\end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A\to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X\to Y$ і $F_2\colon X\to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A\to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B=\{x\in X\mid F_1(x)=F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A\subseteq B$, то $X=\overline{A}\subseteq B$, а тому $B=X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, харатеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A\cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ∎

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A\cup B\to\mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } x\in A;\\ 0, & \text{якщо } x\in B,\end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A\to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X\to Y$ і $F_2\colon X\to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A\to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B=\{x\in X \mid F_1(x)=F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A\subseteq B$, то $X=\overline{A}\subseteq B$, а тому $B=X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, хaратеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві непретинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, харатеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A\cup B\to\mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in A;\\ 0, & \text{якщо } x\in B,\end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A\to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X\to Y$ і $F_2\colon X\to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A\to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B=\{x\in X\mid F_1(x)=F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A\subseteq B$, то $X=\overline{A}\subseteq B$, а тому $B=X$. ■

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характеризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він містить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A\cup B\to\mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in A;\\ 0, & \text{якщо } x\in B,\end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Теорема 3.5.14

Якщо неперервне відображення $f\colon A\to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.

Доведення. Нехай $F_1\colon X\to Y$ і $F_2\colon X\to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A\to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B=\{x\in X\mid F_1(x)=F_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A\subseteq B$, то $X=\overline{A}\subseteq B$, а тому $B=X$. ■

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbb{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbb{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Приклад 3.5.15

Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. З теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

Дякую за увагу!!!