Аксіоми відокремлення

Топологія

Лекція 14

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, а тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цій лекції ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1

Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом не T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, який не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{I\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{I\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{I\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

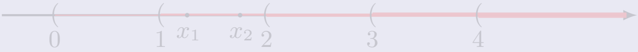
Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.
Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.
Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

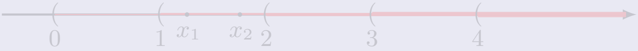
Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.
Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\} .$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.
Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

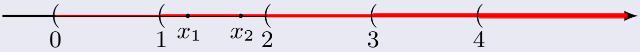
Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

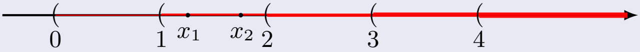
Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією є прикладами T_0-просторів.

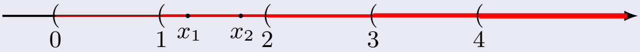
Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp \alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp |\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ∎

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp\alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4

Якщо X — T_0-простір, то $|X| \leqslant \exp w(X)$.

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp|\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. ■

Вправа 3.4.1

Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5

Топологічний простір X називається *T_1-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),

оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

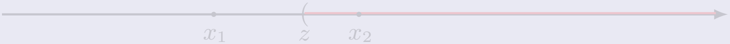
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

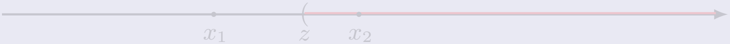
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

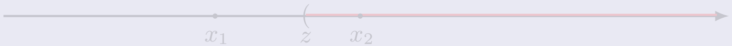
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

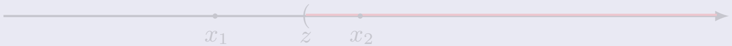
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

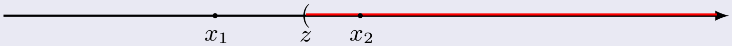
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

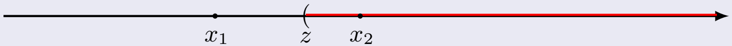
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

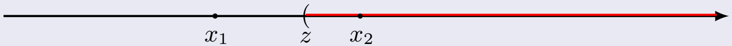
Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію
$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$
Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

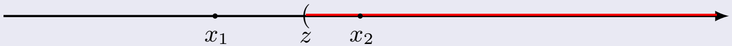
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

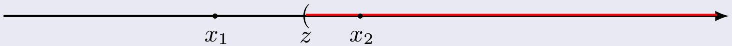
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

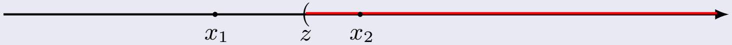
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\} .$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

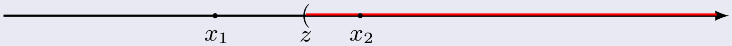
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

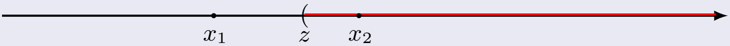
Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис.),



оскільки для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \; x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \; x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \; x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \; x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7

Для топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(i) X — T_1-простір;

(ii) кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;

(iii) для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \; x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. $\blacksquare$

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення T_1-простору, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. ■

Вправа 3.4.2

Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3

Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_\mathfrak{d})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_\mathfrak{u})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_\mathfrak{d})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_\mathfrak{u})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незлічeнна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Означення 3.4.8

Топологічний простір X називається *T_2-простором*, або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9

Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією і кожна незліченна множина з козліченною топологією за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ∎

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ∎

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ∎

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ∎

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} X\setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} V(y) = X\setminus(X\setminus\{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} X\setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} V(y) = X\setminus(X\setminus\{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ∎

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10

Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X\setminus\{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X\setminus\{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X\setminus\{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. ■

Твердження 3.4.11

Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ виконуються властивість:

$(\mathscr{BP}4)$ для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4

Доведіть твердження 3.4.11.

Твердження 3.4.11

Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ виконуються властивість:

$(\mathscr{BP}4)$ для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4

Доведіть твердження 3.4.11.

Твердження 3.4.11

Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ виконуються властивість:

$(\mathscr{BP}4)$ для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4

Доведіть твердження 3.4.11.

Твердження 3.4.11

Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ виконуються властивість:

$(\mathscr{BP}4)$ для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4

Доведіть твердження 3.4.11.

Твердження 3.4.11

Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ виконуються властивість:

$(\mathscr{BP}4)$ для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4

Доведіть твердження 3.4.11.

Твердження 3.4.11

Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ виконуються властивість:

$(\mathscr{BP}4)$ для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4

Доведіть твердження 3.4.11.

Твердження 3.4.11

Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ виконуються властивість:

- $(\mathscr{BP}4)$ для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4

Доведіть твердження 3.4.11.

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина

$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина

$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$

є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X\to Y$ і $g\colon X\to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A=\{x\in X \mid f(x)\neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x\in A$ маємо, що $f(x)\neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x)=f^{-1}(U(f(x)))\cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x\in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x\in U_1,\qquad F\subseteq U_2\qquad \text{і}\qquad U_1\cap U_2=\varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина

$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина

$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$

є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ∎

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ∎

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина

$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина

$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$

є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X\to Y$ і $g\colon X\to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A=\{x\in X \mid f(x)\neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x\in A$ маємо, що $f(x)\neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x)=f^{-1}(U(f(x)))\cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x\in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x\in U_1,\qquad F\subseteq U_2\qquad \text{і}\qquad U_1\cap U_2=\varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X\to Y$ і $g\colon X\to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A=\{x\in X \mid f(x)\neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x\in A$ маємо, що $f(x)\neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x)=f^{-1}(U(f(x)))\cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ∎

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x\in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x\in U_1,\qquad F\subseteq U_2\qquad \text{і}\qquad U_1\cap U_2=\varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Теорема 3.4.12

Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина
$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина
$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$
є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. ■

Означення 3.4.13

Топологічний простір X називається *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що
$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Зауваження 3.4.14

Необхідно попередити читачів, що деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення*, або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{i} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{i} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Твердження 3.4.15

Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_{∂}), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{u})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_{∂}), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_{∂}), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір (X, τ_∂), пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_u)$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{i} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. ■

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором, а отже, не є T_3-простором.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = (x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i})$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = (x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i})$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = (x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i})$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16

Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то

$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то

$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int} \overline{U_j}\}_{j \in \mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int} \overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp |A|$. ∎

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int} \overline{U_j}\}_{j \in \mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int} \overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp |A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

$$\text{з } V_i = V_j \text{ випливає, що } \overline{V_i} = \overline{V_j} \text{ для } i, j \in \mathcal{J}.$$

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int} \overline{U_j}\}_{j \in \mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int} \overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp |A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

$$\text{з } V_i = V_j \text{ випливає, що } \overline{V_i} = \overline{V_j} \text{ для } i, j \in \mathcal{J}.$$

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ∎

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\{\operatorname{Int} \overline{U_j}\}_{j \in \mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int} \overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp |A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\left\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\right\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\left\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\right\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ∎

Вправа 3.4.6

Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17

Якщо X — регулярний топологічний простір, то
$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\left\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\right\}_{j\in\mathcal{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathcal{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathcal{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. ■

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f \colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f \colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a]Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u}.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається $T_{3\frac{1}{2}}$*-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається $T_{3\frac{1}{2}}$*-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f \colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u}.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f \colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a]Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a]Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a]Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a]Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Лекція 14: Аксіоми відокремлення

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

---

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0,1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2,1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0,1,2,3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18

Топологічний простір X називається *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{I}$[a] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

[a]Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u.

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізму g і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що функція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що функція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що
$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову
$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином
$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що функція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності
$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що функція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f \colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i \colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що функція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ∎

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що функція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що
$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову
$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином
$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності
$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f \colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i \colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Твердження 3.4.19

Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \quad \text{і} \quad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною, і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \quad \text{і} \quad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. ■

Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто
$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$
(див. рис.).

Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{u})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).

Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).

Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).

Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто
$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$
(див. рис.).

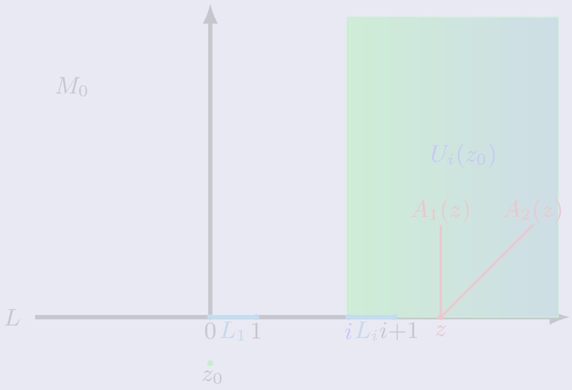
Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).



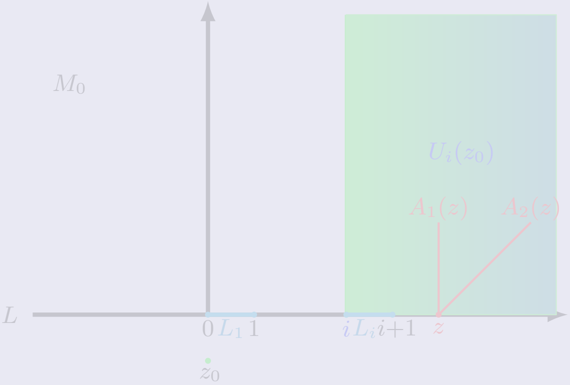
Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).



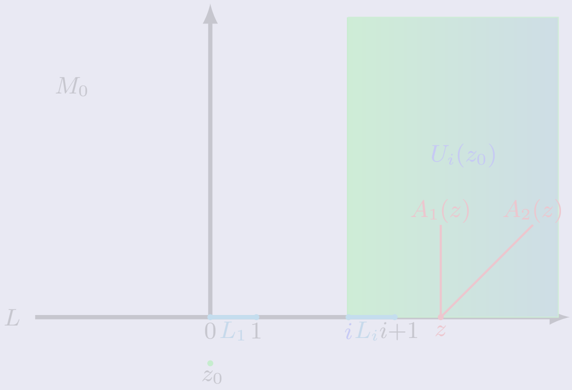
Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).



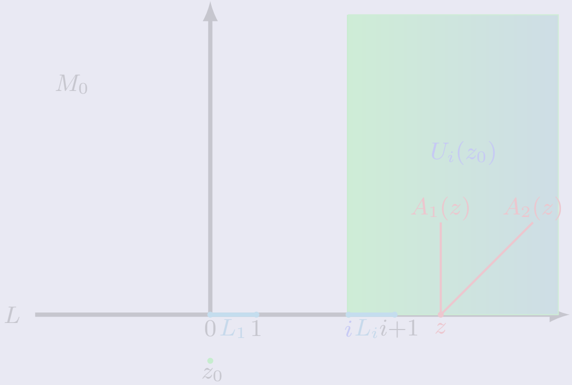
Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).



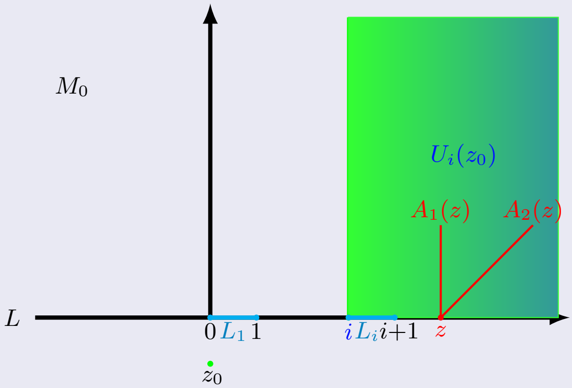
Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є тихоновськими просторами.

Приклад 3.4.20

Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(див. рис.).

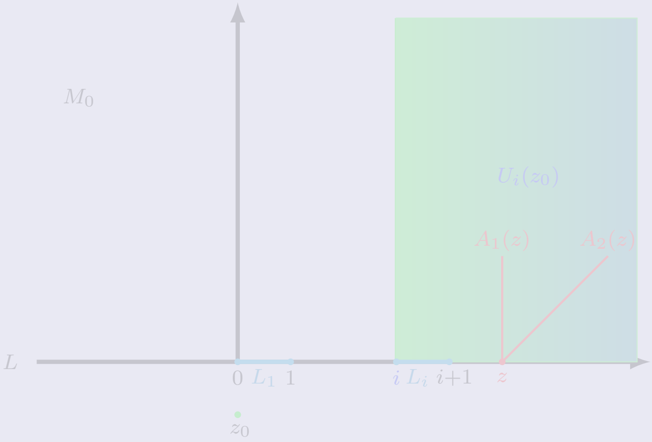


Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0,-1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y=0$ і через L_i, $i=1,2,3,\ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x,0)\in L$ таких, що $i-1\leqslant x\leqslant i$. Для кожної точки $z=(x,0)\in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x,y)\in M_0$, де $0\leqslant y\leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x+y,y)\in M_0$, де $0\leqslant y\leqslant 2$.

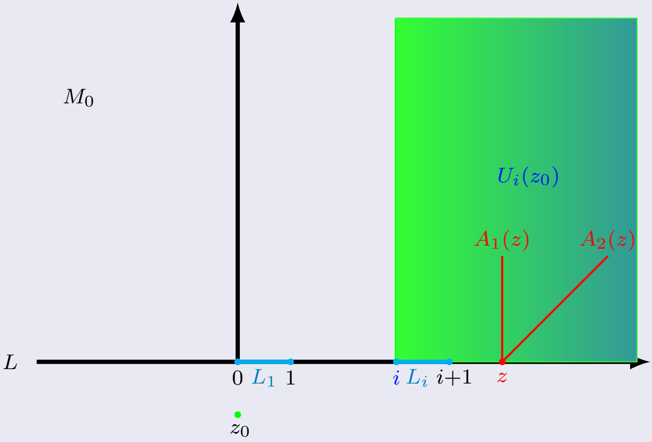
Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0, -1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$.



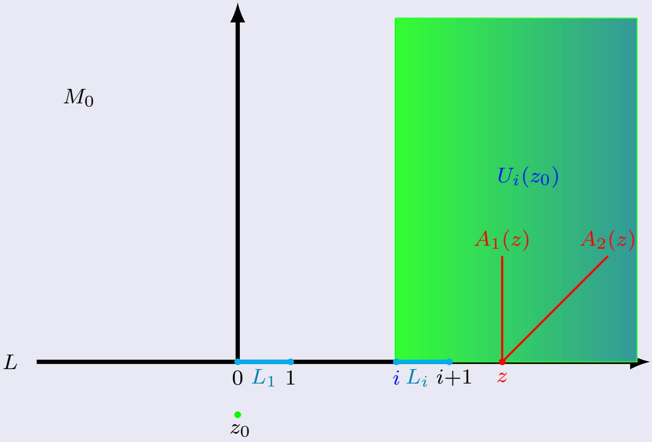
Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0,-1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$.



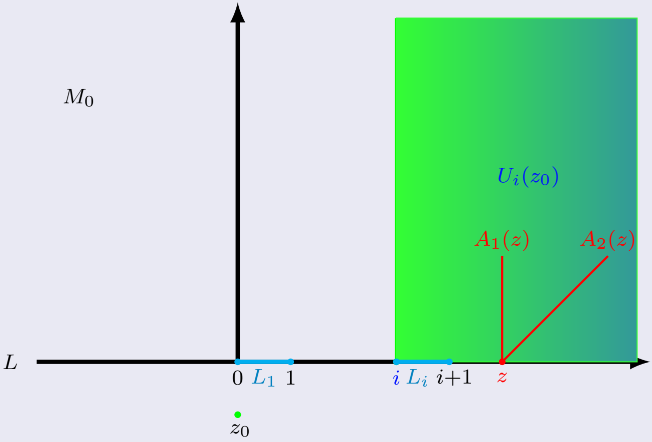
Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0,-1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$.



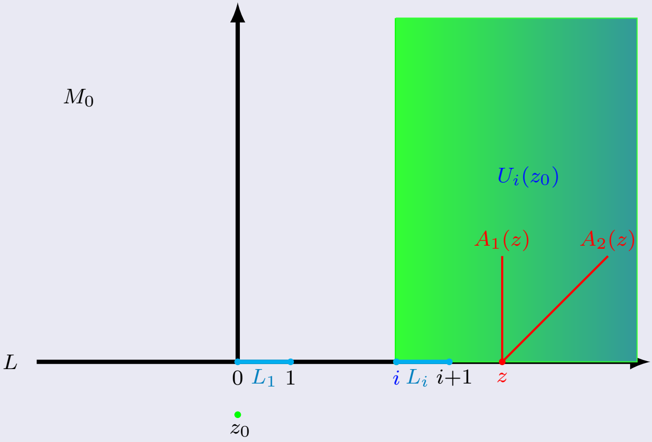
Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0,-1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$.



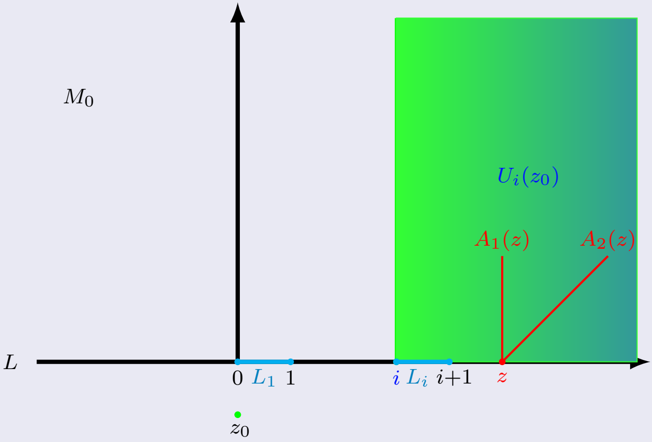
Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0,-1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y=0$ і через L_i, $i=1,2,3,\ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x,0)\in L$ таких, що $i-1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z=(x,0)\in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x,y)\in M_0$, де $0\leqslant y\leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x+y,y)\in M_0$, де $0\leqslant y\leqslant 2$.



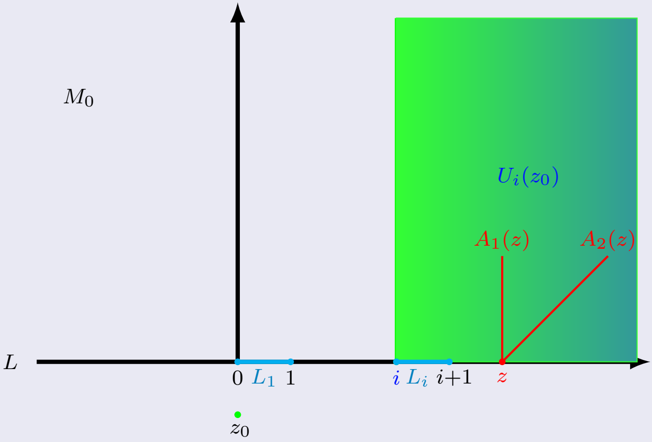
Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0, -1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$.



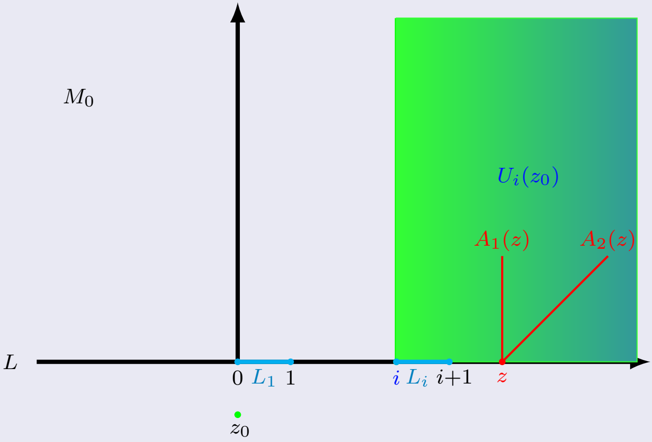
Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0, -1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай z_0 — точка з координатами $(0, -1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$, і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$.



Приклад 3.4.20 (продовження)

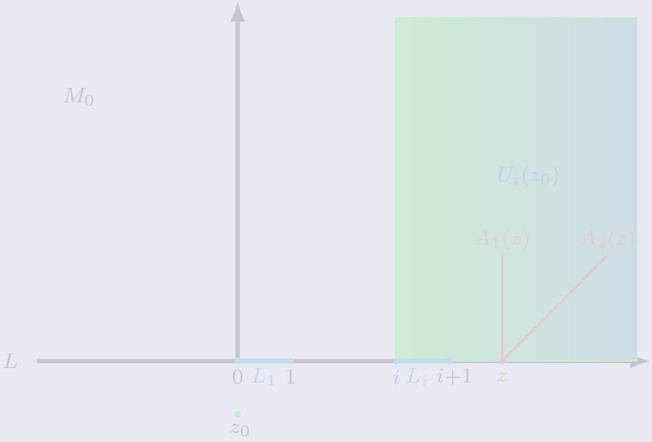
Нехай
$$\mathscr{B}(z) = \{U_B(z) = (A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B \mid z \notin B \subset M,\ |B| < \infty\}.$$
Будемо вважати, що кожна точка $z \in M_0 \setminus L$ є ізольованою, тобто $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$.

Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай

$$\mathscr{B}(z) = \{U_B(z) = (A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B \mid z \notin B \subset M,\ |B| < \infty\}\,.$$

Будемо вважати, що кожна точка $z \in M_0 \setminus L$ є ізольованою, тобто $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$.

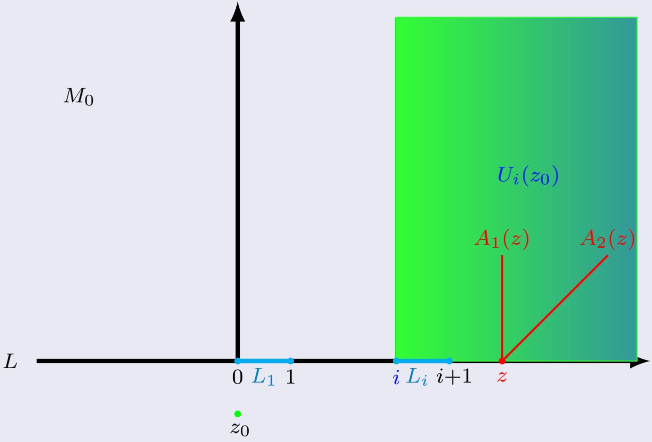


Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай

$$\mathscr{B}(z) = \{U_B(z) = (A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B \mid z \notin B \subset M, \ |B| < \infty\}.$$

Будемо вважати, що кожна точка $z \in M_0 \setminus L$ є ізольованою, тобто $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$.

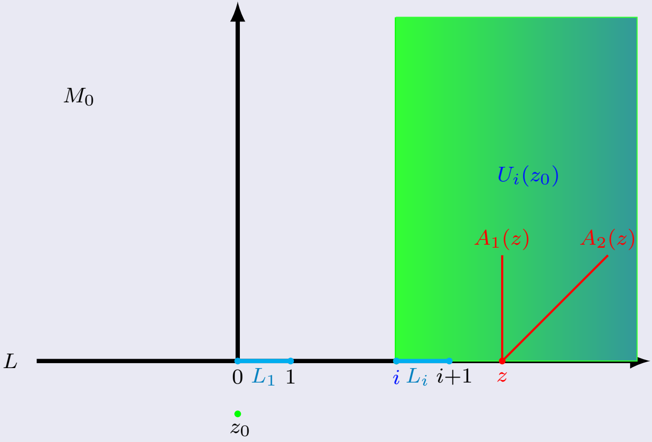


Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай

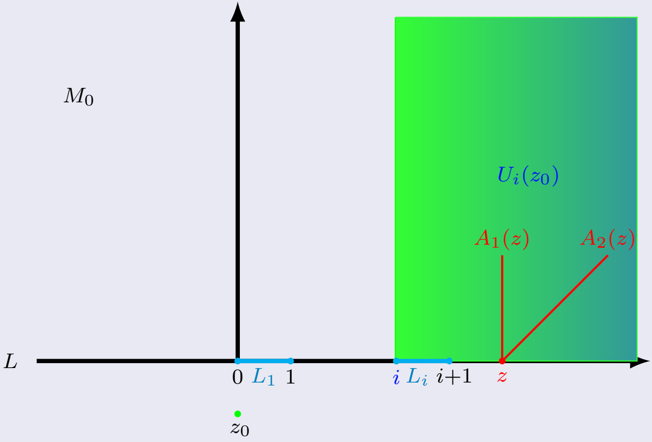
$$\mathscr{B}(z) = \{U_B(z) = (A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B \mid z \notin B \subset M, \ |B| < \infty\}.$$

Будемо вважати, що кожна точка $z \in M_0 \setminus L$ є ізольованою, тобто $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай
$$\mathscr{B}(z) = \{U_B(z) = (A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B \mid z \notin B \subset M,\ |B| < \infty\}.$$
Будемо вважати, що кожна точка $z \in M_0 \setminus L$ є ізольованою, тобто $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай $\mathscr{B}(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, де

$$U_i(z_0) = \{(x, y) \in M_0 \mid x \geqslant i\}.$$

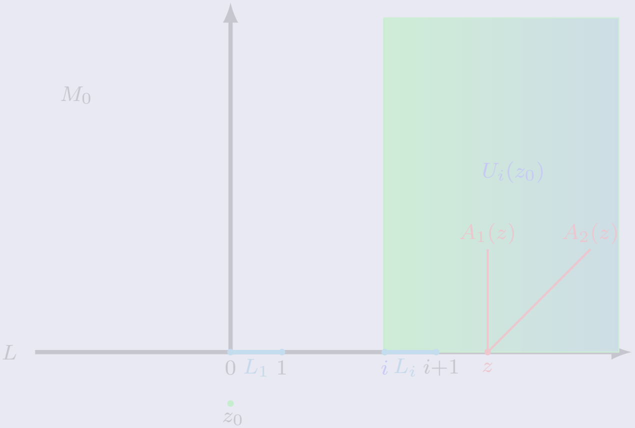
Легко перевіряється, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$), ($\mathscr{BP}3$) та ($\mathscr{BP}4$). Отже множина M з топологією, породженою системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ є гаусдорфовим топологічним простором.

Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай $\mathscr{B}(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, де

$$U_i(z_0) = \{(x, y) \in M_0 \mid x \geqslant i\}.$$

Легко перевіряється, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже множина M з топологією, породженою системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ є гаусдорфовим топологічним простором.

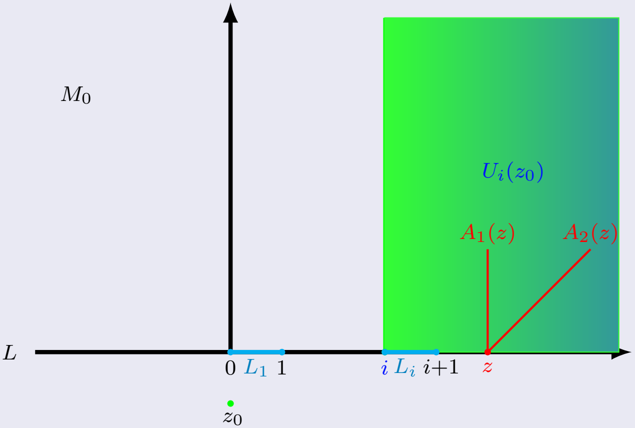


Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай $\mathscr{B}(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, де

$$U_i(z_0) = \{(x, y) \in M_0 \mid x \geqslant i\}.$$

Легко перевіряється, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже множина M з топологією, породженою системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ є гаусдорфовим топологічним простором.

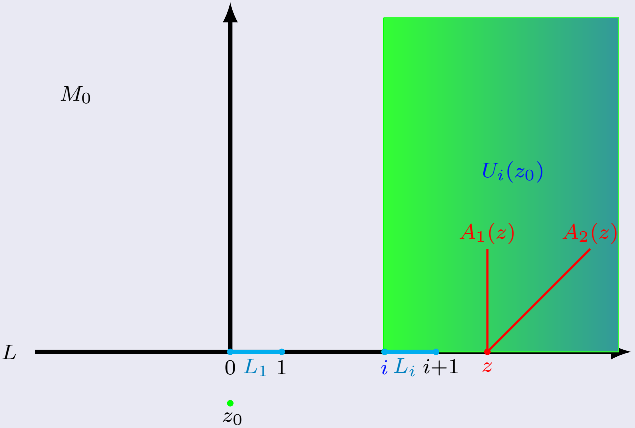


Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай $\mathscr{B}(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, де

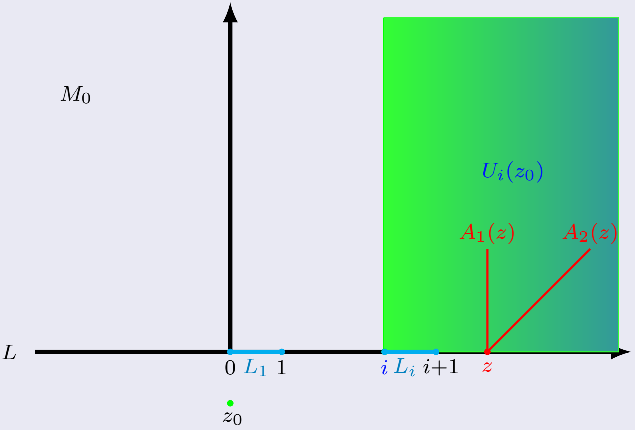
$$U_i(z_0) = \{(x, y) \in M_0 \mid x \geqslant i\}.$$

Легко перевіряється, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in M}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже множина M з топологією, породженою системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in M}$ є гаусдорфовим топологічним простором.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай $\mathscr{B}(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, де
$$U_i(z_0) = \{(x, y) \in M_0 \mid x \geqslant i\}.$$
Легко перевіряється, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in M}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже множина M з топологією, породженою системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in M}$ є гаусдорфовим топологічним простором.

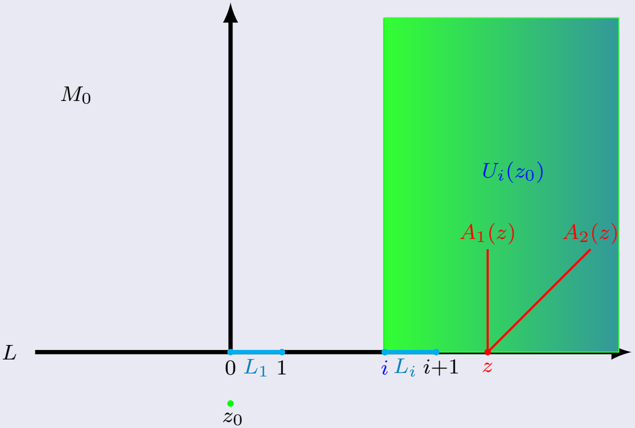


Приклад 3.4.20 (продовження)

Нехай $\mathscr{B}(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, де

$$U_i(z_0) = \{(x, y) \in M_0 \mid x \geqslant i\}.$$

Легко перевіряється, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in M}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже множина M з топологією, породженою системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in M}$ є гаусдорфовим топологічним простором.

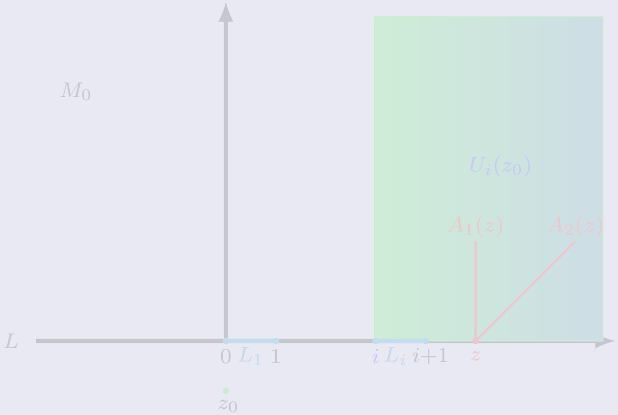


Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

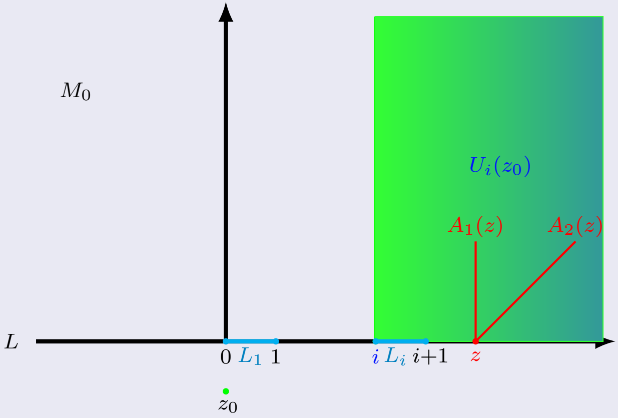
Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.



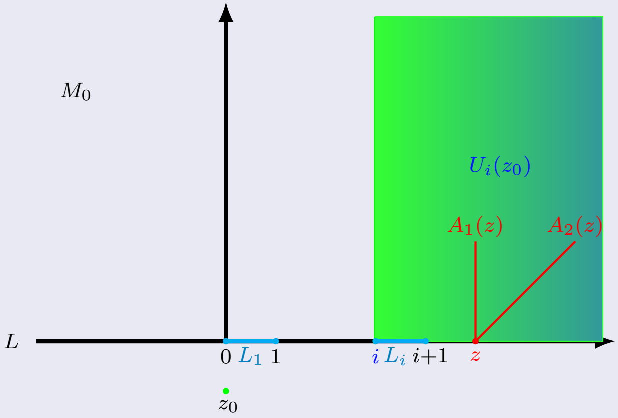
Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.



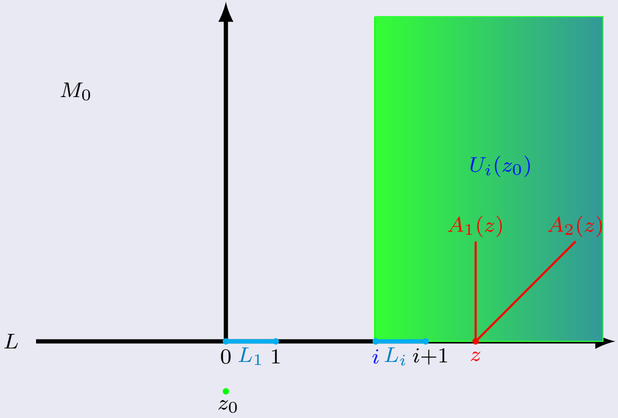
Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.



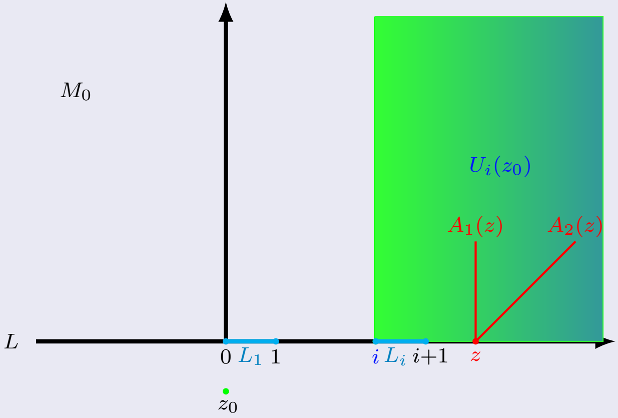
Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.



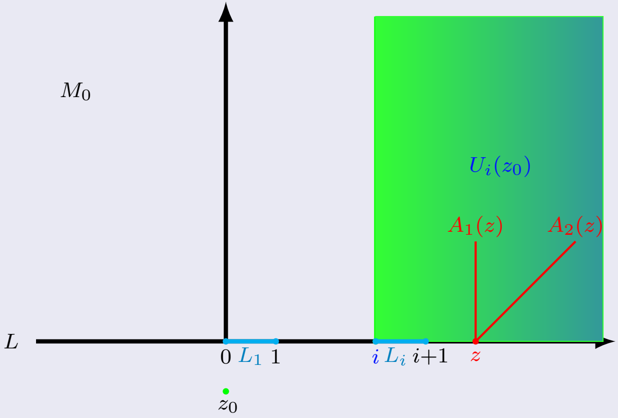
Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.



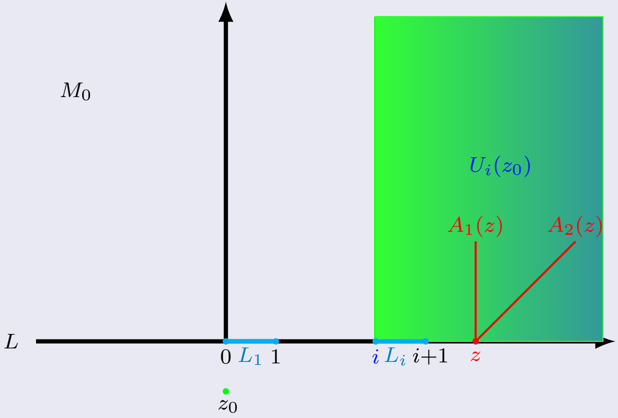
Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Легко перевіряється, що множини

$$U_1 = U_{i_0+2}(z_0) \qquad \text{і} \qquad U_2 = M \setminus (U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1}),$$

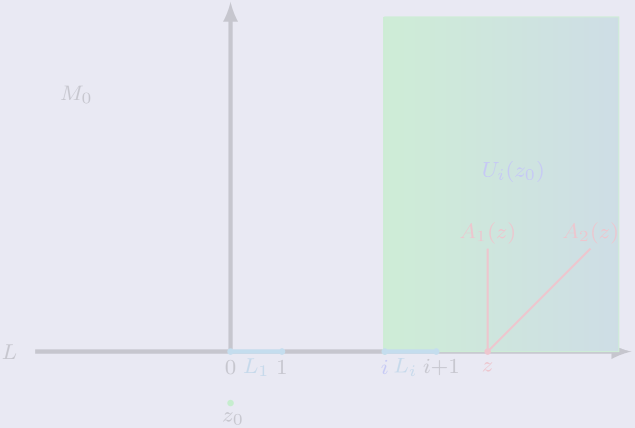
де $F \cap U_{i_0}(z_0) = \varnothing$, мають необхідні властивості.

Приклад 3.4.20 (продовження)

Легко перевіряється, що множини

$$U_1 = U_{i_0+2}(z_0) \qquad \text{і} \qquad U_2 = M \setminus (U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1}),$$

де $F \cap U_{i_0}(z_0) = \varnothing$, мають необхідні властивості.

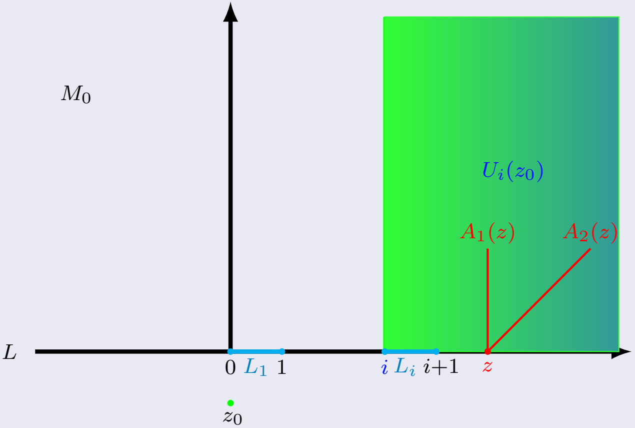


Приклад 3.4.20 (продовження)

Легко перевіряється, що множини

$$U_1 = U_{i_0+2}(z_0) \quad \text{і} \quad U_2 = M \setminus \left(U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1}\right),$$

де $F \cap U_{i_0}(z_0) = \varnothing$, мають необхідні властивості.

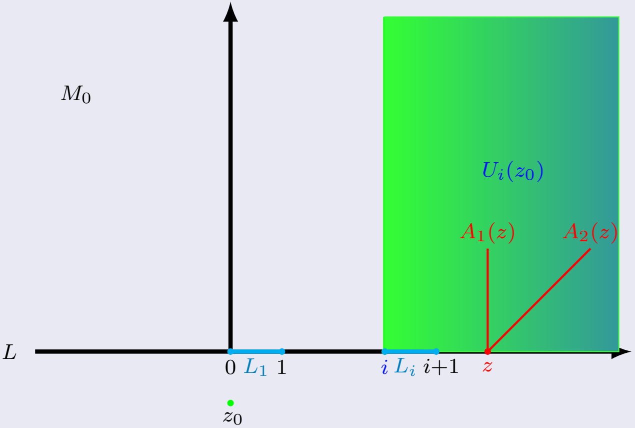


Приклад 3.4.20 (продовження)

Легко перевіряється, що множини

$$U_1 = U_{i_0+2}(z_0) \quad \text{і} \quad U_2 = M \setminus \big(U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1}\big)\,,$$

де $F \cap U_{i_0}(z_0) = \varnothing$, мають необхідні властивості.

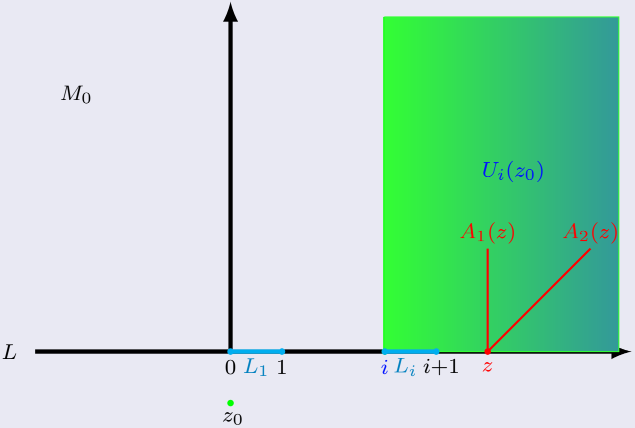


Приклад 3.4.20 (продовження)

Легко перевіряється, що множини

$$U_1 = U_{i_0+2}(z_0) \qquad \text{і} \qquad U_2 = M \setminus \left(U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1}\right),$$

де $F \cap U_{i_0}(z_0) = \varnothing$, мають необхідні властивості.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1)=\{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0)=0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i=\{z\in L_i \mid f(z)=0\}$$

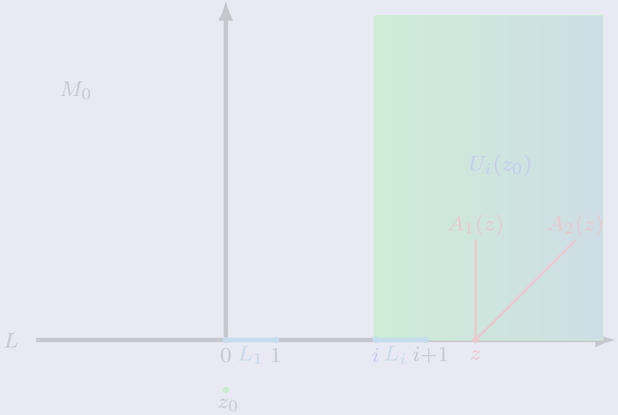
є нескінченною для $i=1,2,3,\ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.

Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.

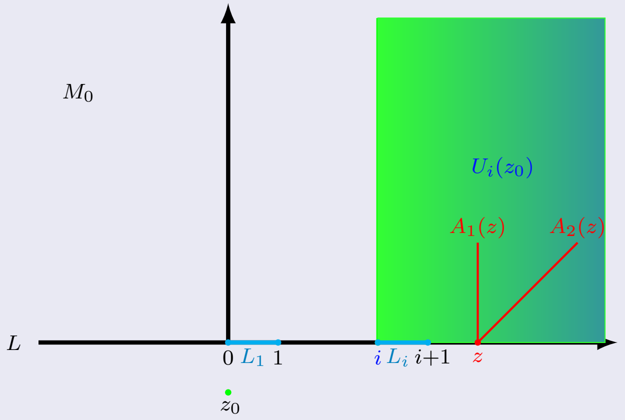


Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.

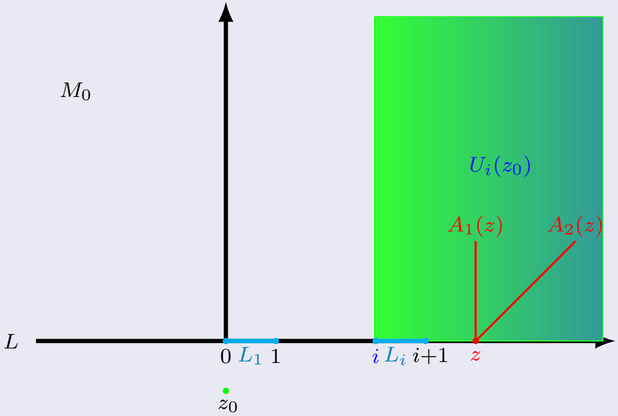


Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.

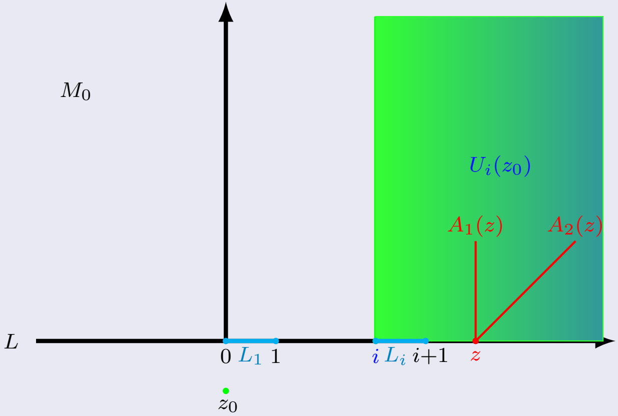


Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.

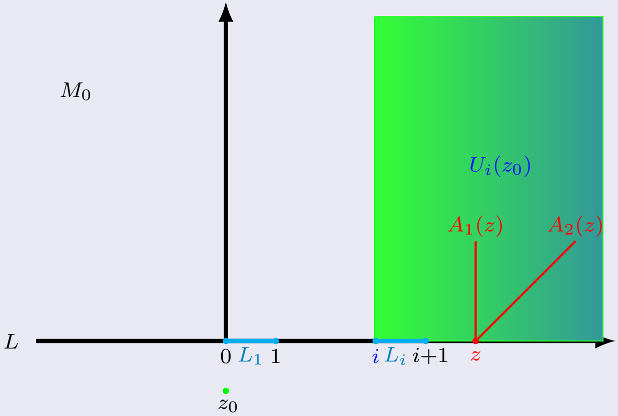


Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.

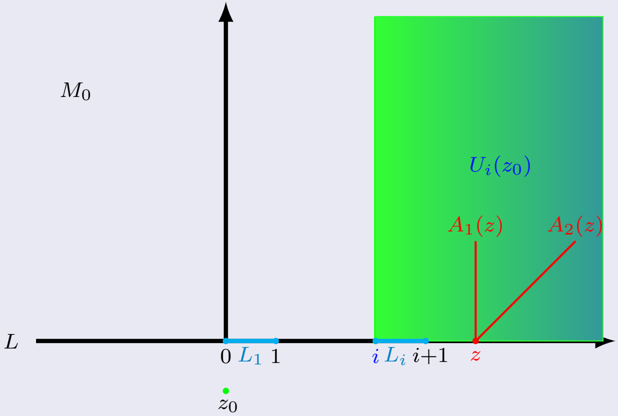


Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.

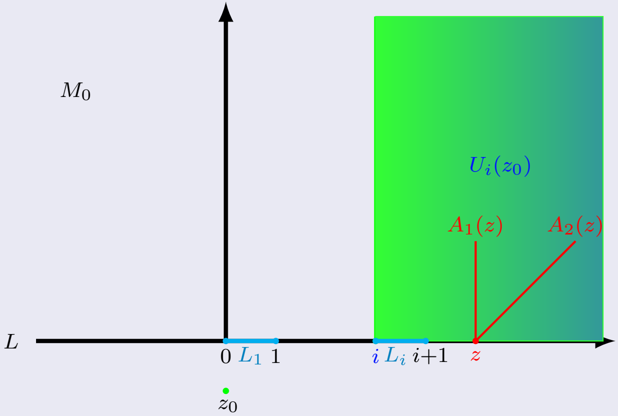


Приклад 3.4.20 (продовження)

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією.



Приклад 3.4.20 (продовження)

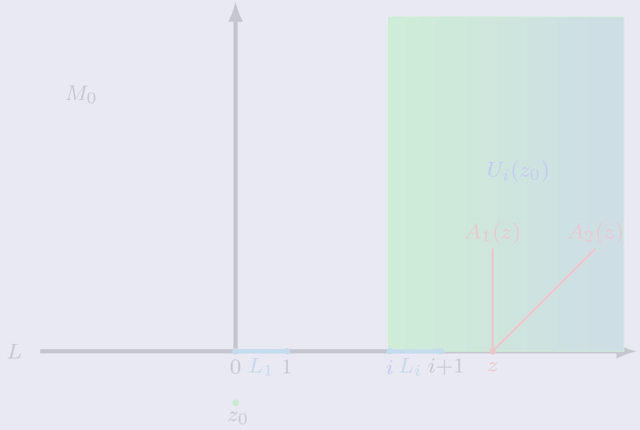
Очевидно, що множина $K_1 = L_1$ є нескінченною. Припустимо тепер, що $|K_n| \geqslant \aleph_0$ і розглянемо зліченну нескінченну множину $K_n' \subseteq K_n$. Аналогічно, як і в прикладі 3.3.24 покажемо, що для довільної точки $z \in K_n'$ існує нескінченна зліченна множина $A_0(z) \subset A_2(z)$ така, що

$$f\left(A_2(z) \setminus A_0(z)\right) = \{0\}.$$

Приклад 3.4.20 (продовження)

Очевидно, що множина $K_1 = L_1$ є нескінченною. Припустимо тепер, що $|K_n| \geqslant \aleph_0$ і розглянемо зліченну нескінченну множину $K'_n \subseteq K_n$. Аналогічно, як і в прикладі 3.3.24 покажемо, що для довільної точки $z \in K'_n$ існує нескінченна зліченна множина $A_0(z) \subset A_2(z)$ така, що

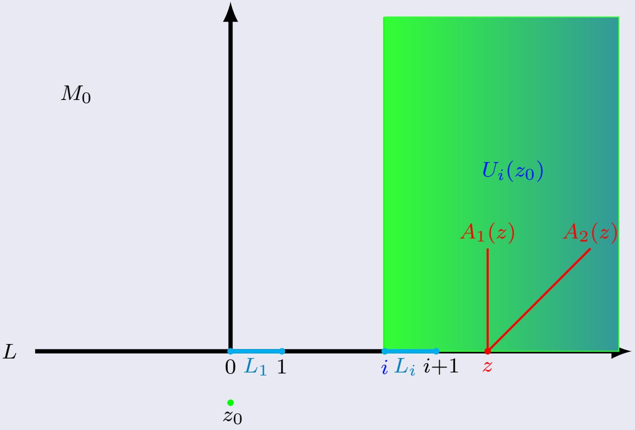
$$f\left(A_2(z) \setminus A_0(z)\right) = \{0\}.$$



Приклад 3.4.20 (продовження)

Очевидно, що множина $K_1 = L_1$ є нескінченною. Припустимо тепер, що $|K_n| \geqslant \aleph_0$ і розглянемо зліченну нескінченну множину $K'_n \subseteq K_n$. Аналогічно, як і в прикладі 3.3.24 покажемо, що для довільної точки $z \in K'_n$ існує нескінченна зліченна множина $A_0(z) \subset A_2(z)$ така, що

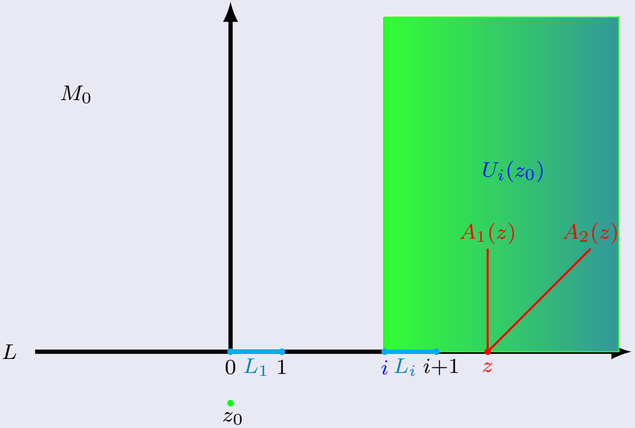
$$f\left(A_2(z) \setminus A_0(z)\right) = \{0\}.$$



Приклад 3.4.20 (продовження)

Очевидно, що множина $K_1 = L_1$ є нескінченною. Припустимо тепер, що $|K_n| \geqslant \aleph_0$ і розглянемо зліченну нескінченну множину $K_n' \subseteq K_n$. Аналогічно, як і в прикладі 3.3.24 покажемо, що для довільної точки $z \in K_n'$ існує нескінченна зліченна множина $A_0(z) \subset A_2(z)$ така, що

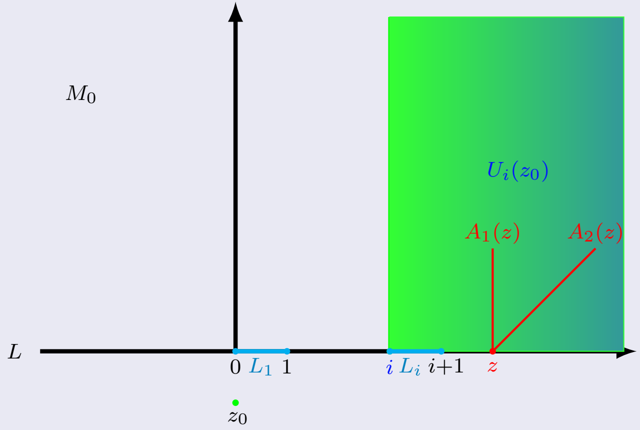
$$f\left(A_2(z) \setminus A_0(z)\right) = \{0\}.$$



Приклад 3.4.20 (продовження)

Очевидно, що множина $K_1 = L_1$ є нескінченною. Припустимо тепер, що $|K_n| \geqslant \aleph_0$ і розглянемо зліченну нескінченну множину $K'_n \subseteq K_n$. Аналогічно, як і в прикладі 3.3.24 покажемо, що для довільної точки $z \in K'_n$ існує нескінченна зліченна множина $A_0(z) \subset A_2(z)$ така, що

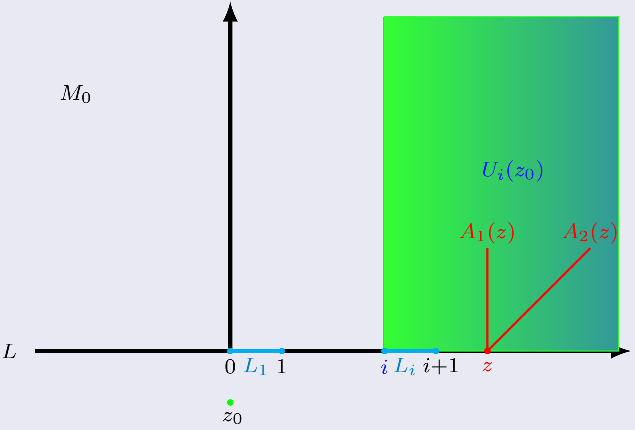
$$f\left(A_2(z) \setminus A_0(z)\right) = \{0\}.$$



Приклад 3.4.20 (продовження)

Очевидно, що множина $K_1 = L_1$ є нескінченною. Припустимо тепер, що $|K_n| \geqslant \aleph_0$ і розглянемо зліченну нескінченну множину $K'_n \subseteq K_n$. Аналогічно, як і в прикладі 3.3.24 покажемо, що для довільної точки $z \in K'_n$ існує нескінченна зліченна множина $A_0(z) \subset A_2(z)$ така, що

$$f\left(A_2(z) \setminus A_0(z)\right) = \{0\}.$$



Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

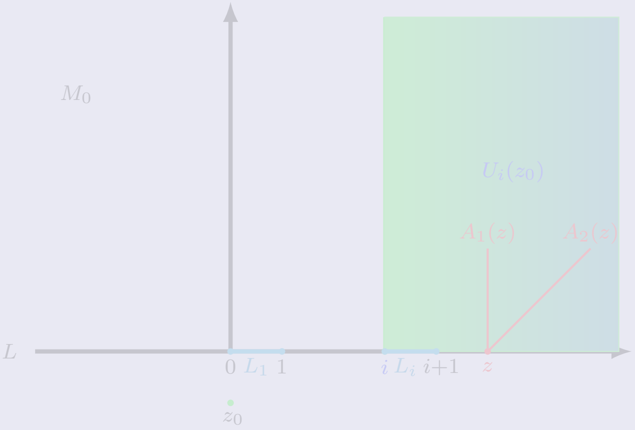
задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

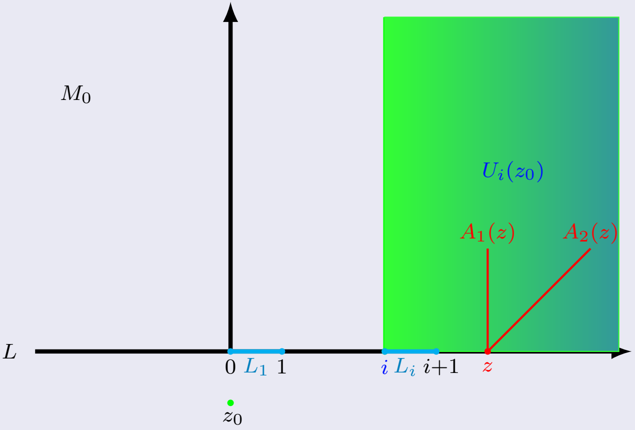
$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина
$$A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$$
є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина
$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$
задовольняє потрібну нам властивість.

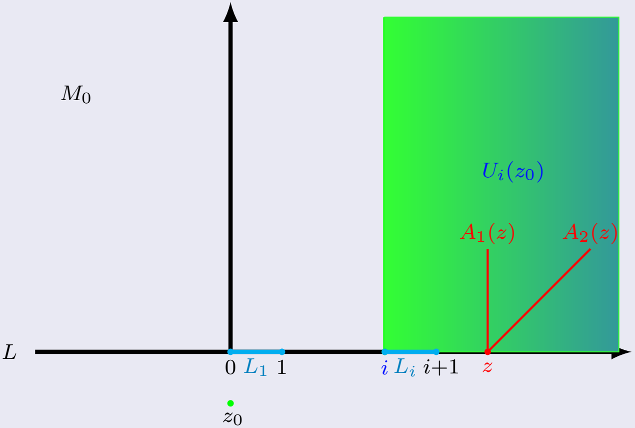


Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.

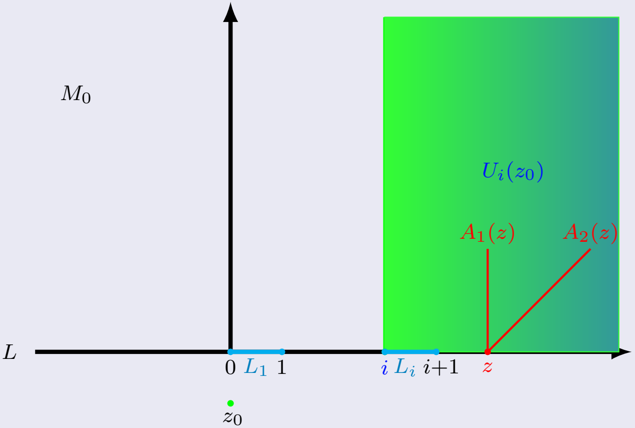


Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.

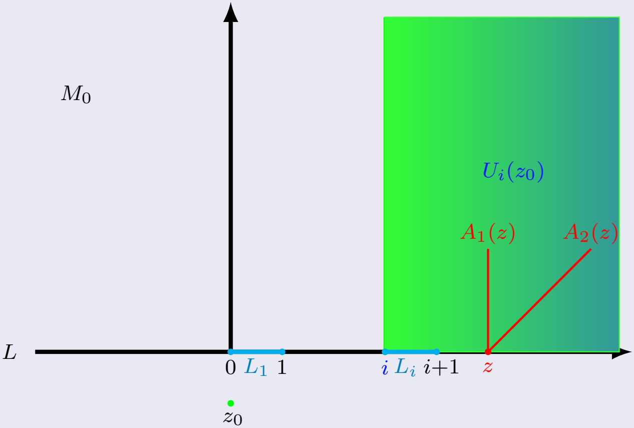


Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.

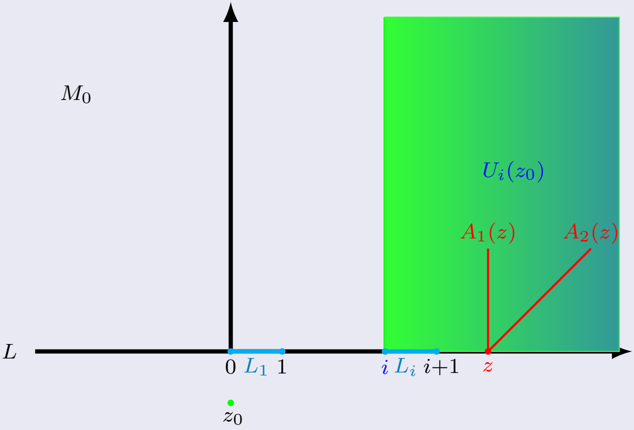


Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.

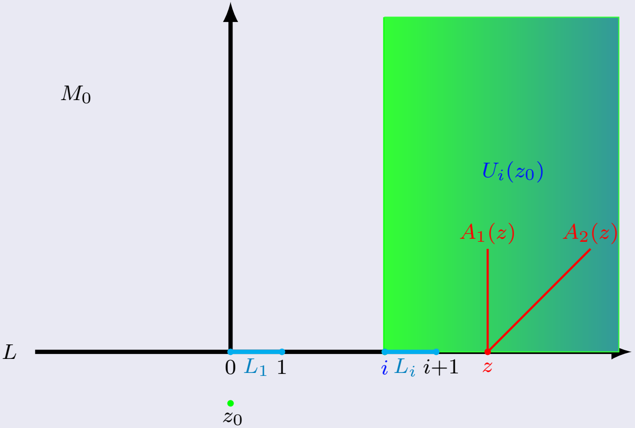


Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left(\left(f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j\right)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.

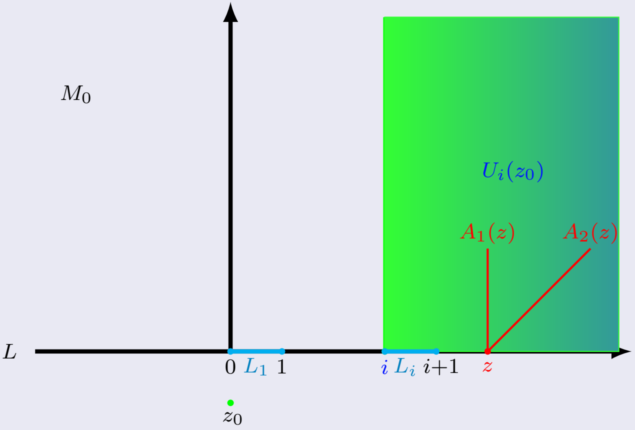


Приклад 3.4.20 (продовження)

Множина $A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$ є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.

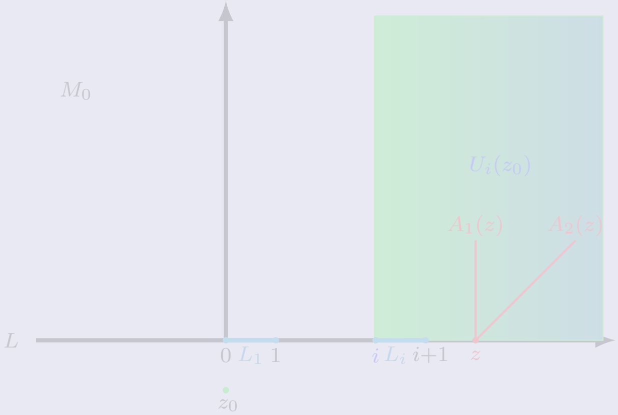


Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup\{A_0(z) \mid z \in K_n'\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K_n'$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.

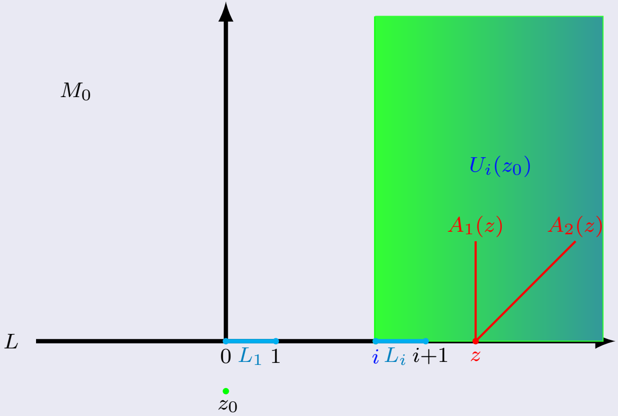
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup \{ A_0(z) \mid z \in K'_n \}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



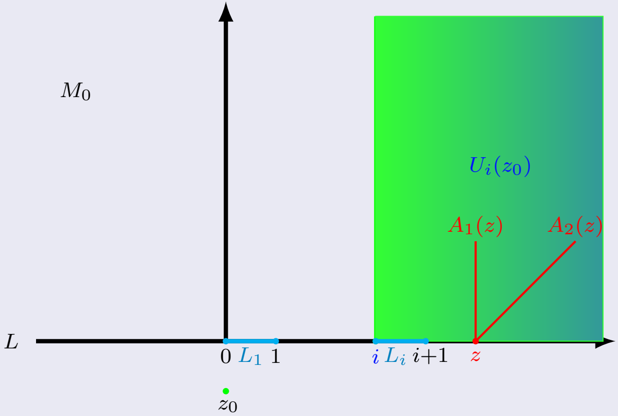
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини $A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K_n'\}$ на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K_n'$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



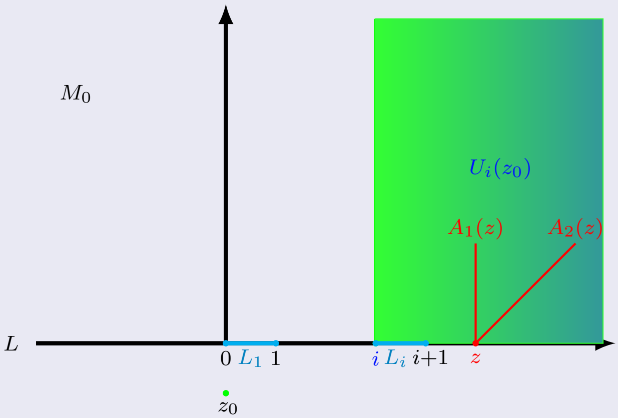
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини $$A = \bigcup\{A_0(z) \mid z \in K_n'\}$$ на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K_n'$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



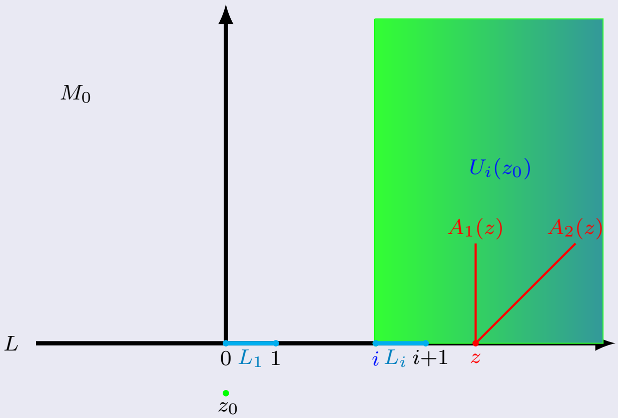
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



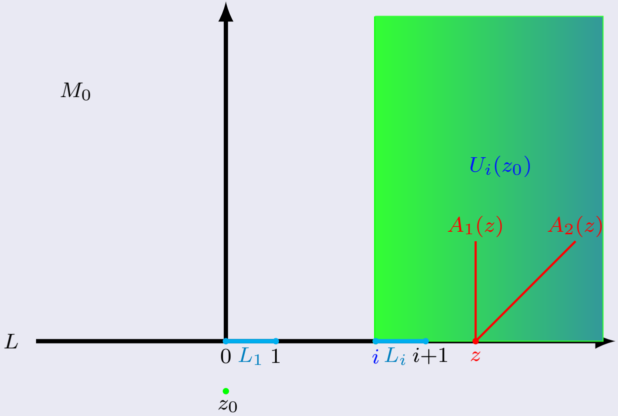
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



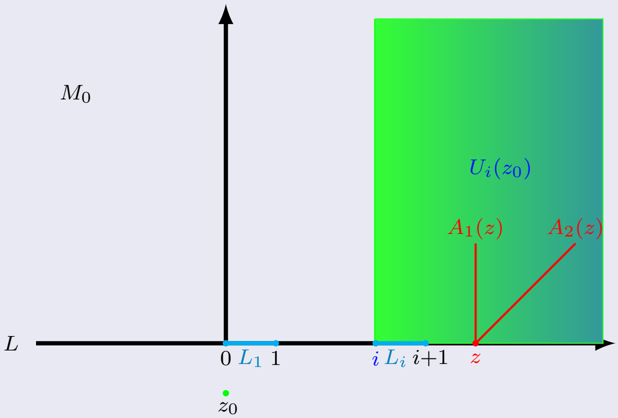
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



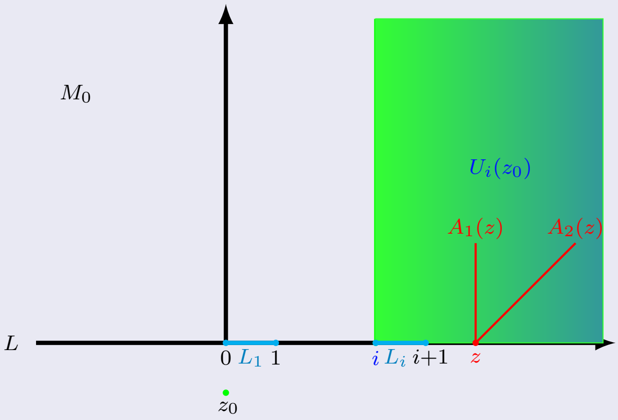
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K_n'\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K_n'$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси вливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



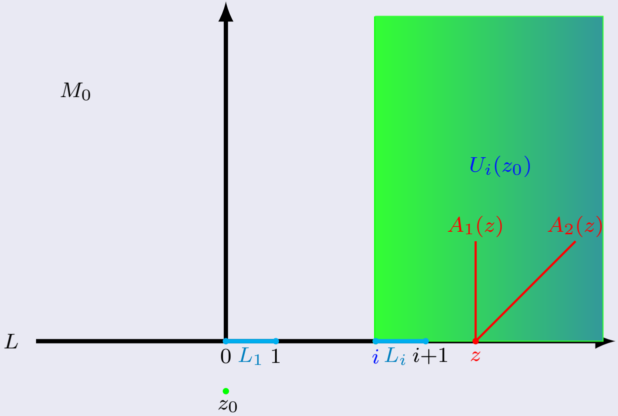
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots,$ і доведення завершено.



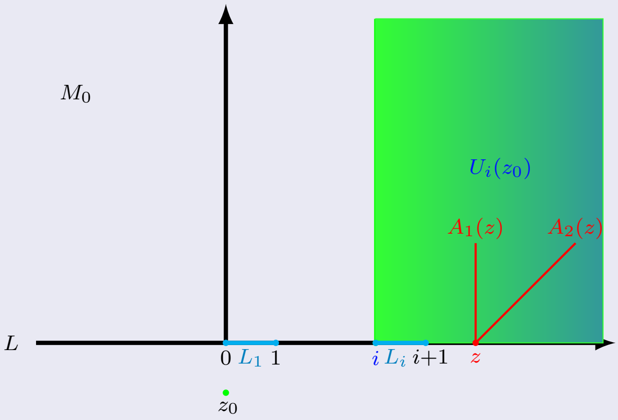
Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup\{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots,$ і доведення завершено.



Приклад 3.4.20 (продовження)

Проекція множини
$$A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$$
на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.



Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що
$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$
Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{i} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{i} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що
$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що
$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$
Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{i} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Означення 3.4.21

Топологічний простір X називається *T_4-простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7

Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{i} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Приклад 3.4.22

Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ■

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького.

Твердження 3.4.23

Площина Немицького L не є нормальним простором.

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26, $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L.

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що
$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$
Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто
$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$
а отже $C_A \neq C_B$. ∎

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що
$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:
$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$
$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$
Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо
$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$
де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що
$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$
а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що
$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:
$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$
$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$
Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо
$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$
де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що
$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$
а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що
$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:
$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$
$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо
$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$
де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що
$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$
а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1).

Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$
$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона*.

Теорема 3.4.24 (лема Урисона)

Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in A \qquad \text{і} \qquad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0,1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{1}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{2}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0,1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (1). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2$_k$}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ ($n \geqslant 2$) і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \quad \text{якщо} \quad r_i < r_j \quad \text{і} \quad i,j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \quad \text{якщо} \quad r_i < r_j \quad \text{і} \quad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова
$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i,j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$
виконується для $k = 2$.
Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$
З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Звідси отримуємо включення
$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$
а отже маємо
$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$
Означивши
$$V_{r_{n+1}} = U,$$
ми отримуємо множини
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$
які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$
задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова
$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i,j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$
виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$
З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Звідси отримуємо включення
$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$
а отже маємо
$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$
Означивши
$$V_{r_{n+1}} = U,$$
ми отримуємо множини
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$
які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$
задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова
$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i,j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$
виконується для $k = 2$.
Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$
З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Звідси отримуємо включення
$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$
а отже маємо
$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$
Означивши
$$V_{r_{n+1}} = U,$$
ми отримуємо множини
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$
які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$
задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i,j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова
$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$
виконується для $k = 2$.
Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$
З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що
$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Звідси отримуємо включення
$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$
а отже маємо
$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$
Означивши
$$V_{r_{n+1}} = U,$$
ми отримуємо множини
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$
які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин
$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$
задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i,j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Умова (2), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \quad \text{якщо} \quad r_i < r_j \quad \text{і} \quad i, j \leqslant k, \qquad (3.2_k)$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (1) та (2).

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$
За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0,a)$ і $(b,1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.
Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина
$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$
відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина
$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$
також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$
За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина
$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup \{V_r \mid r < a\}$$
відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина
$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup \{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap \{\overline{V}_r \mid r > b\}$$
також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ∎

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup \{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup \{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap \{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ∎

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$
За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.
Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина
$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$
відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина
$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$
також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0,a)$ і $(b,1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$
За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0,a)$ і $(b,1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.
Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина
$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$
відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$.
Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина
$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$
також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0,a)$ і $(b,1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0,a)$ і $(b,1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup \{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup \{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap \{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$
За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.
Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина
$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$
відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина
$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\left\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\right\} = X \setminus \bigcap\left\{\overline{V}_r \mid r > b\right\}$$
також відкрита в топологічному просторі X. ■

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$
За умовою (2), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.
Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина
$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$$
відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (1) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина
$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\left\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\right\} = X \setminus \bigcap\left\{\overline{V}_r \mid r > b\right\}$$
також відкрита в топологічному просторі X. ■

Дякую за увагу!!!