Неперервні відображення топологічних просторів

Топологія

Лекція 13

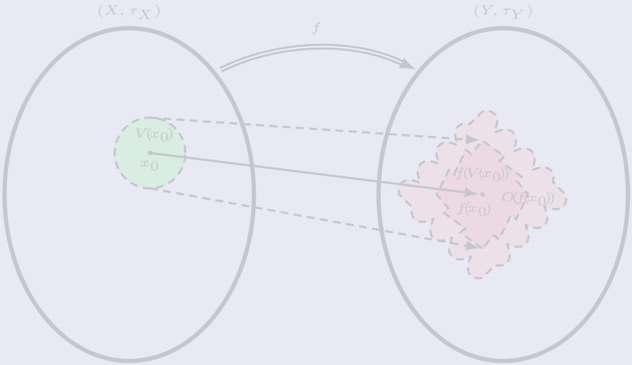
Означення 3.3.1

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).

Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

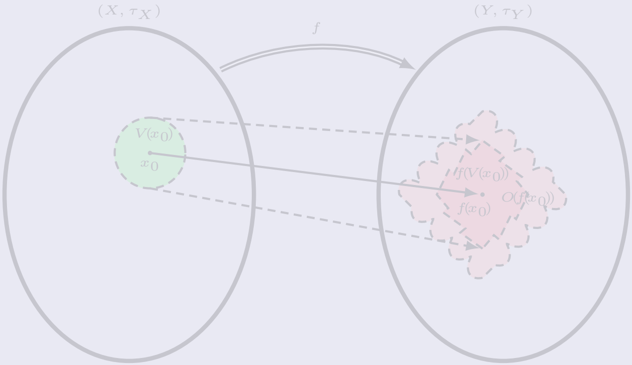
Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

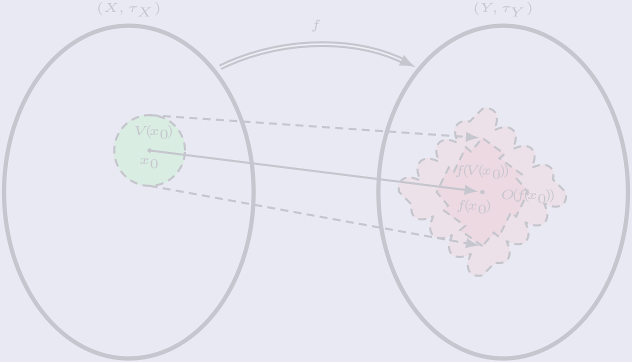
Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

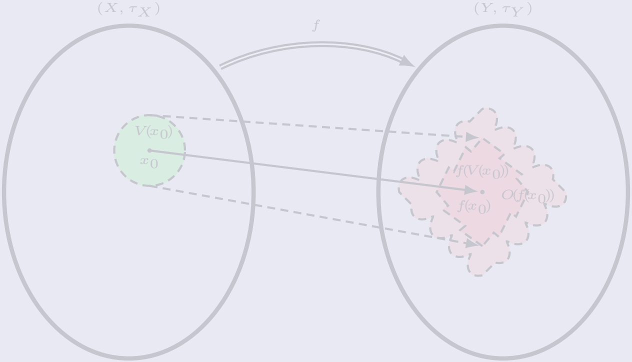
Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

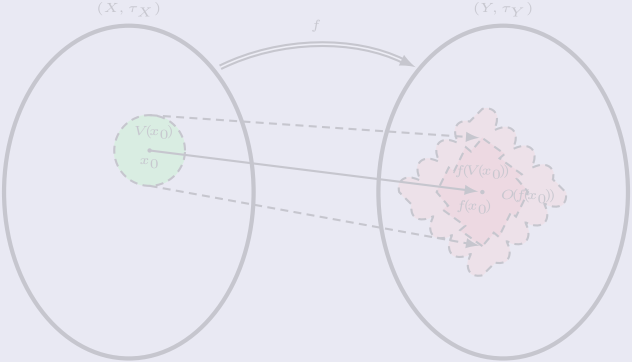
Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

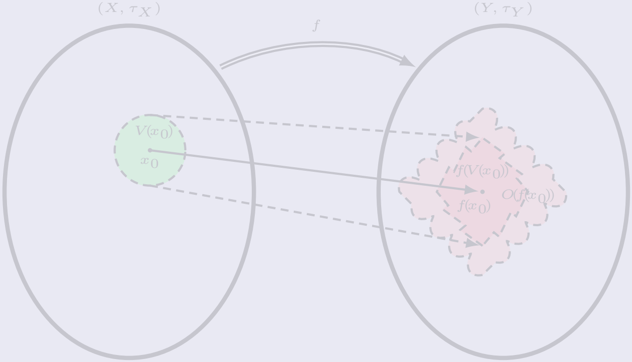
Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

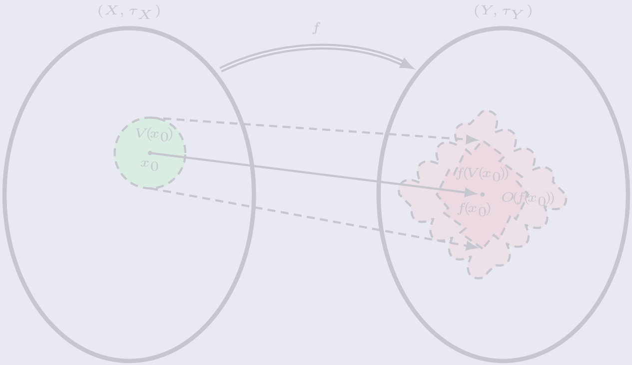
Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

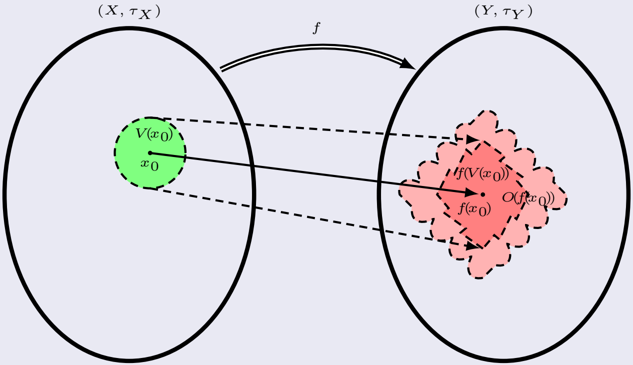
Нехай (X,τ_X) і (Y,τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0\in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X,τ_X), що $f(V(x_0))\subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0\in X$.

Означення 3.3.1

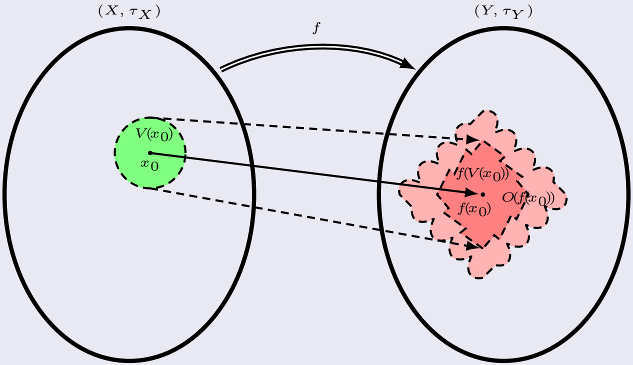
Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Означення 3.3.1

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що $f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$ (див. рис.).



Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_\partial) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору (X,τ_∂) у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_\partial) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_\partial)$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_\partial \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_\partial)\to(Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору (X,τ_∂) у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_\partial)\to(Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0\in(X,\tau_\partial)$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\}\in\tau_\partial \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\})=\{f(x_0)\}\subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X, \tau_\partial) \to (Y, \tau)$ — довільне відображення з дискретного простору (X, τ_∂) у довільний топологічний простір (Y, τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X, \tau_\partial) \to (Y, \tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X, \tau_\partial)$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_\partial \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_\partial) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору (X,τ_∂) у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_\partial) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_\partial)$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_\partial \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору $(X,\tau_{\mathfrak{d}})$ у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_{\mathfrak{d}})$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_{\mathfrak{d}} \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_\partial)\to(Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору (X,τ_∂) у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_\partial)\to(Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0\in(X,\tau_\partial)$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\}\in\tau_\partial \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\})=\{f(x_0)\}\subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_\mathfrak{d}) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору $(X,\tau_\mathfrak{d})$ у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_\mathfrak{d}) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_\mathfrak{d})$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_\mathfrak{d} \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору $(X,\tau_{\mathfrak{d}})$ у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_{\mathfrak{d}})$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_{\mathfrak{d}} \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору $(X,\tau_{\mathfrak{d}})$ у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_{\mathfrak{d}})$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_{\mathfrak{d}} \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору $(X,\tau_{\mathfrak{d}})$ у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_{\mathfrak{d}})$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_{\mathfrak{d}} \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів: ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2

Нехай $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ — довільне відображення з дискретного простору $(X,\tau_{\mathfrak{d}})$ у довільний топологічний простір (Y,τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y,\tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X,\tau_{\mathfrak{d}})$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y,τ) маємо, що

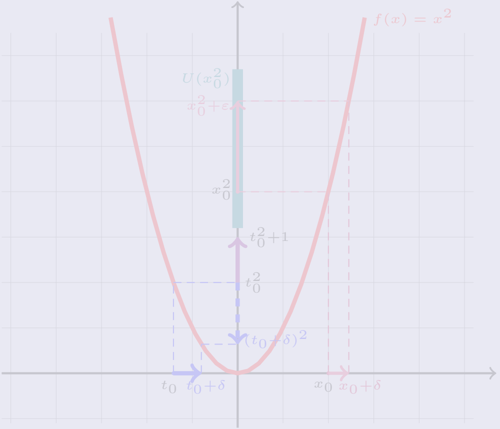
$$\{x_0\} \in \tau_{\mathfrak{d}} \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).

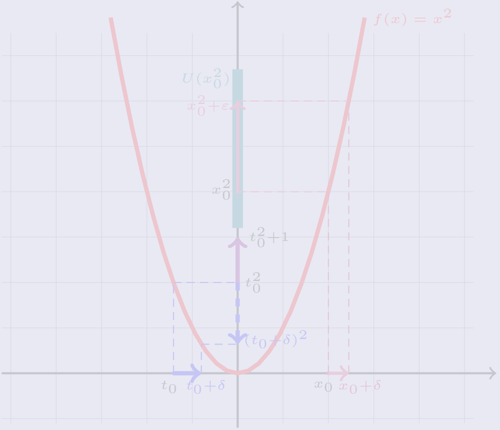
Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $\left[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).



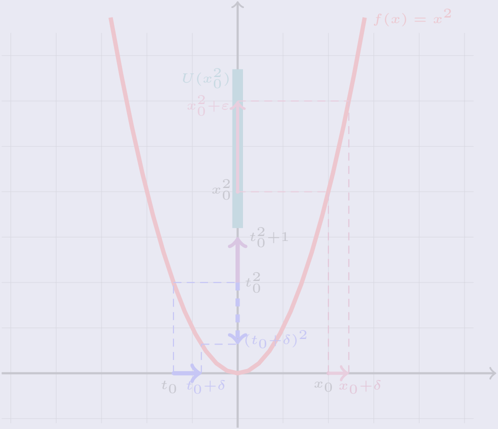
Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $\left[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).



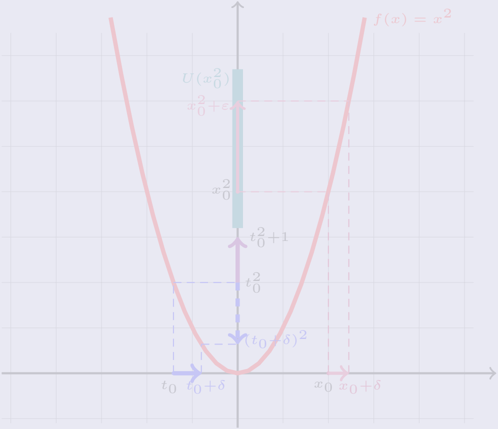
Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $\left[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).



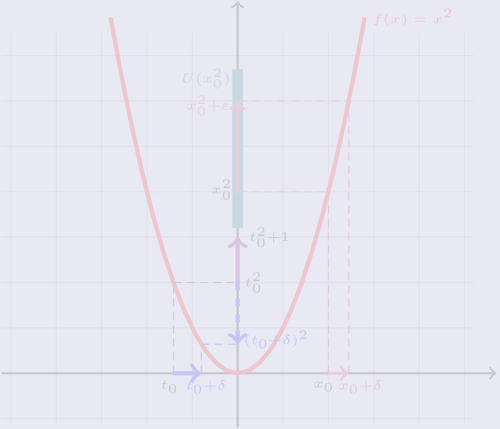
Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $\left[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).



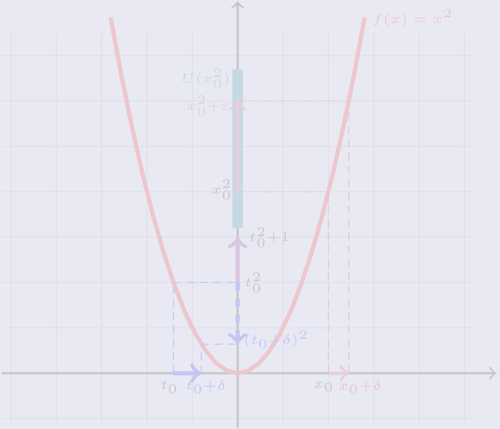
Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $\left[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).



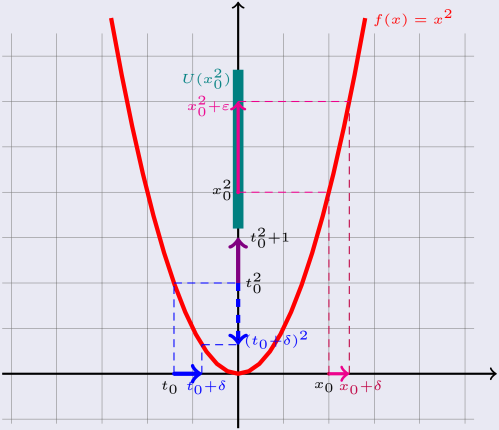
Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $\left[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).



Приклад 3.3.3

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея. Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $\left[x_0^2, x_0^2 + \varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис.).



Приклад 3.3.3 (продовження)

З рівняння

$$(x_0 + \delta)^2 = x_0^2 + \varepsilon$$

отримуємо рівність

$$x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 = x_0^2 + \varepsilon,$$

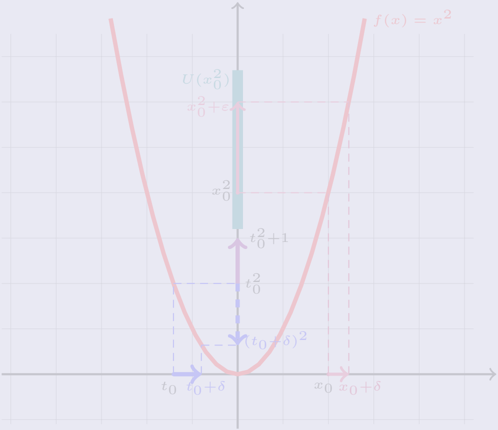
Приклад 3.3.3 (продовження)

З рівняння

$$(x_0+\delta)^2 = x_0^2+\varepsilon$$

отримуємо рівність

$$x_0^2+2x_0\delta+\delta^2 = x_0^2+\varepsilon,$$



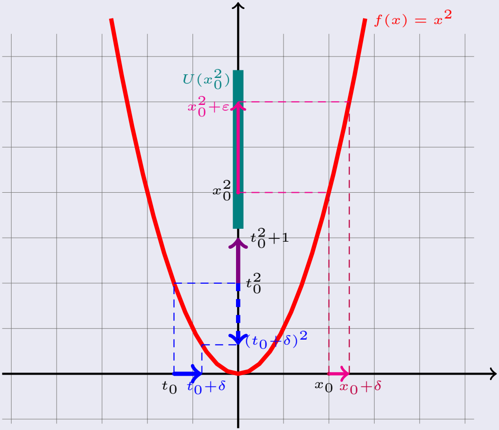
Приклад 3.3.3 (продовження)

З рівняння

$$(x_0+\delta)^2 = x_0^2+\varepsilon$$

отримуємо рівність

$$x_0^2+2x_0\delta+\delta^2 = x_0^2+\varepsilon,$$



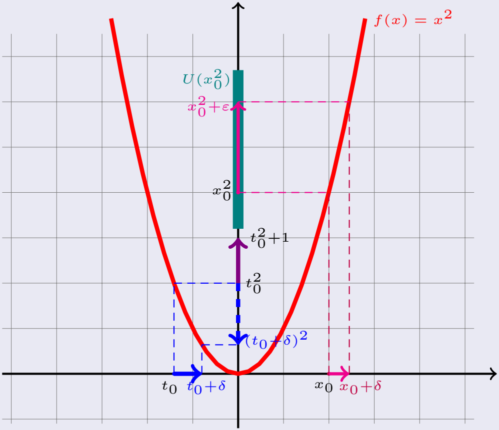
Приклад 3.3.3 (продовження)

З рівняння

$$(x_0+\delta)^2 = x_0^2+\varepsilon$$

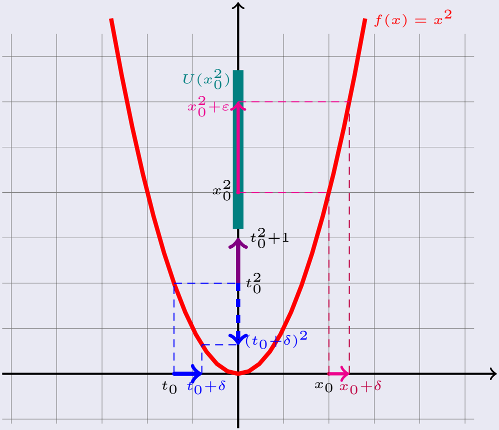
отримуємо рівність

$$x_0^2+2x_0\delta+\delta^2 = x_0^2+\varepsilon,$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

З рівняння
$$(x_0+\delta)^2 = x_0^2+\varepsilon$$
отримуємо рівність
$$x_0^2+2x_0\delta+\delta^2 = x_0^2+\varepsilon,$$



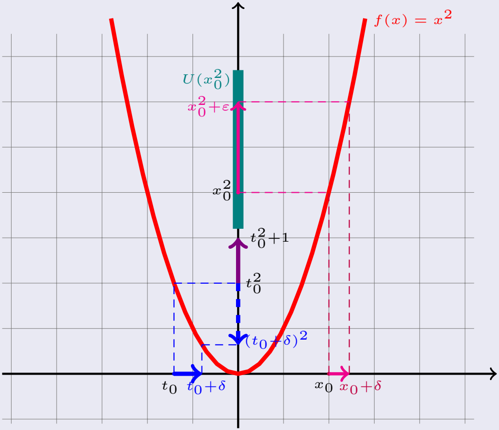
Приклад 3.3.3 (продовження)

З рівняння

$$(x_0+\delta)^2 = x_0^2+\varepsilon$$

отримуємо рівність

$$x_0^2+2x_0\delta+\delta^2 = x_0^2+\varepsilon,$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

з якої отримуємо квадратне рівняння

$$\delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon = 0,$$

стосовно змінної δ. Розв'язавши його стосовно змінної δ, отримуємо

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$

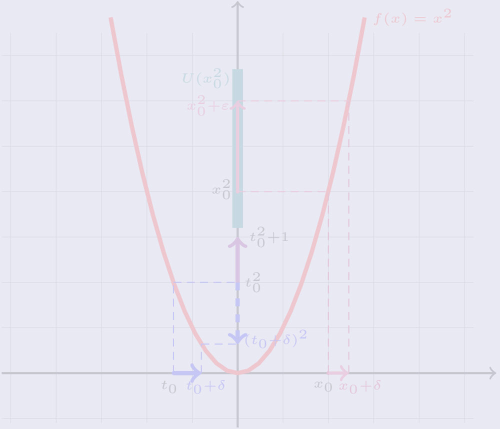
Приклад 3.3.3 (продовження)

з якої отримуємо квадратне рівняння

$$\delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon = 0,$$

стосовно змінної δ. Розв'язавши його стосовно змінної δ, отримуємо

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



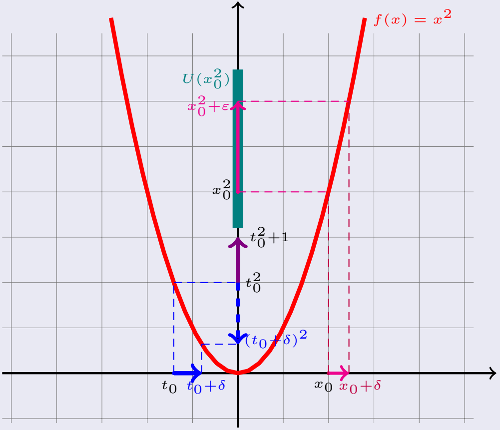
Приклад 3.3.3 (продовження)

з якої отримуємо квадратне рівняння

$$\delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon = 0,$$

стосовно змінної δ. Розв'язавши його стосовно змінної δ, отримуємо

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



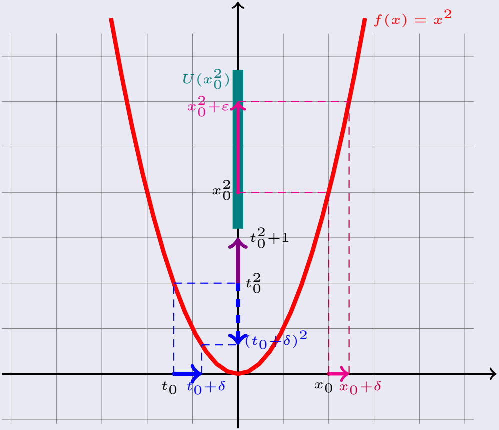
Приклад 3.3.3 (продовження)

з якої отримуємо квадратне рівняння

$$\delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon = 0,$$

стосовно змінної δ. Розв'язавши його стосовно змінної δ, отримуємо

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



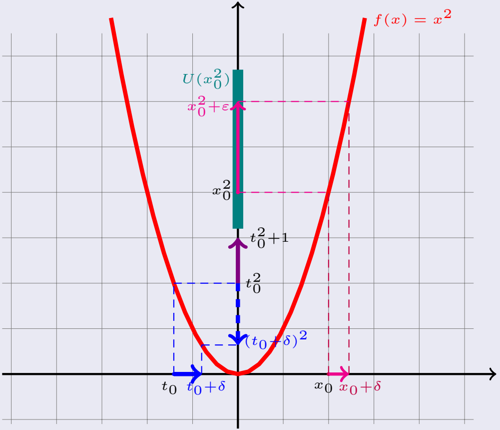
Приклад 3.3.3 (продовження)

з якої отримуємо квадратне рівняння

$$\delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon = 0,$$

стосовно змінної δ. Розв'язавши його стосовно змінної δ, отримуємо

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



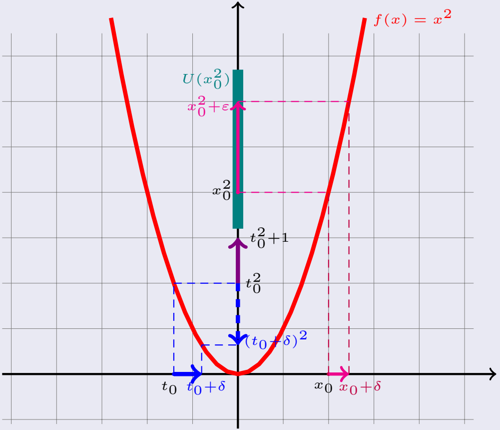
Приклад 3.3.3 (продовження)

з якої отримуємо квадратне рівняння

$$\delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon = 0,$$

стосовно змінної δ. Розв'язавши його стосовно змінної δ, отримуємо

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



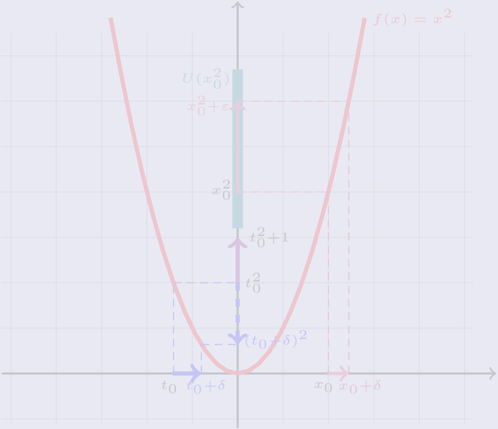
Приклад 3.3.3 (продовження)

Оскільки $x_0 \geqslant 0$, то базовий окіл точки x_0 в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ має вигляд $[x_0, x_0+\delta)$ і $\delta > 0$, а отже
$$\delta = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$

Приклад 3.3.3 (продовження)

Оскільки $x_0 \geqslant 0$, то базовий окіл точки x_0 в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ має вигляд $[x_0, x_0+\delta)$ і $\delta > 0$, а отже

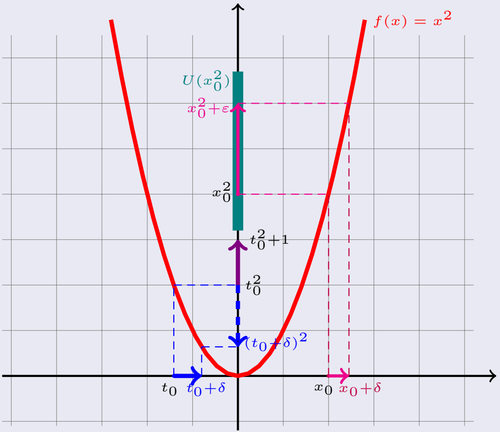
$$\delta = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Оскільки $x_0 \geqslant 0$, то базовий окіл точки x_0 в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ має вигляд $[x_0, x_0 + \delta)$ і $\delta > 0$, а отже

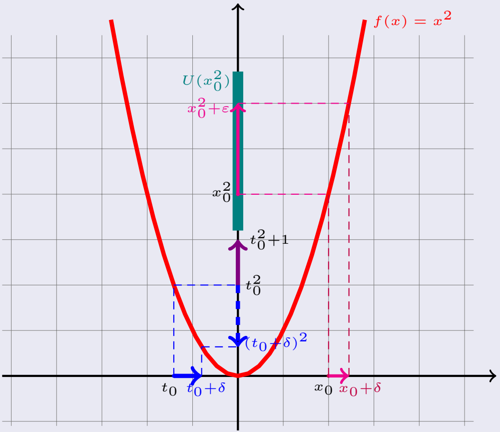
$$\delta = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Оскільки $x_0 \geqslant 0$, то базовий окіл точки x_0 в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ має вигляд $[x_0, x_0 + \delta)$ і $\delta > 0$, а отже

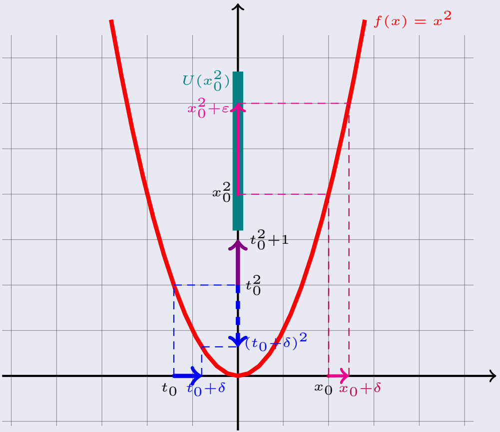
$$\delta = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Оскільки $x_0 \geqslant 0$, то базовий окіл точки x_0 в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ має вигляд $[x_0, x_0 + \delta)$ і $\delta > 0$, а отже

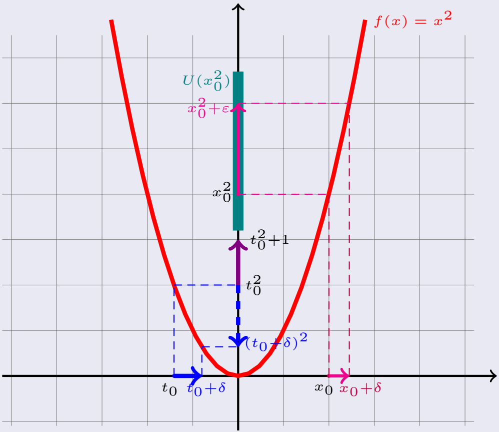
$$\delta = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Оскільки $x_0 \geqslant 0$, то базовий окіл точки x_0 в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ має вигляд $[x_0, x_0 + \delta)$ і $\delta > 0$, а отже

$$\delta = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Тоді для так вибраного дійсного числа δ виконується умова

$$f\left([x_0, x_0+\delta)\right) \subseteq \left[x_0^2, x_0^2+\varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2),$$

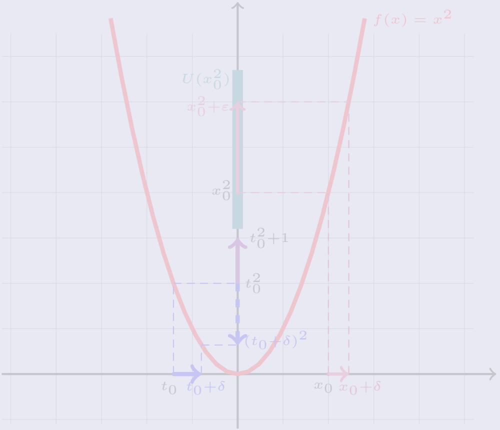
а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ неперервне в кожній точці $x_0 \geqslant 0$ простору стрілки Зоргенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.

Приклад 3.3.3 (продовження)

Тоді для так вибраного дійсного числа δ виконується умова

$$f\left([x_0, x_0+\delta)\right) \subseteq \left[x_0^2, x_0^2+\varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2),$$

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ неперервне в кожній точці $x_0 \geqslant 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.

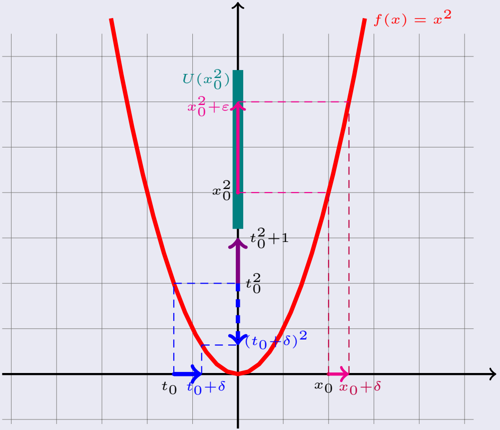


Приклад 3.3.3 (продовження)

Тоді для так вибраного дійсного числа δ виконується умова

$$f\left([x_0, x_0+\delta)\right) \subseteq \left[x_0^2, x_0^2+\varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2),$$

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ неперервне в кожній точці $x_0 \geqslant 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.

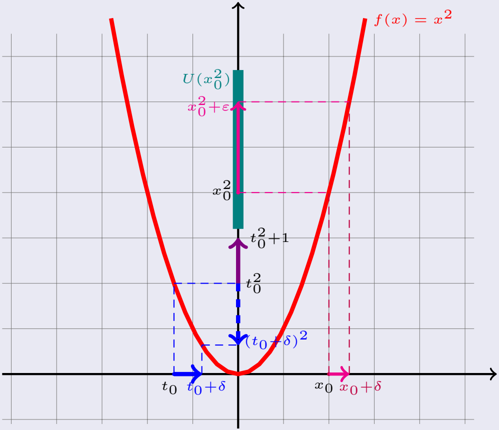


Приклад 3.3.3 (продовження)

Тоді для так вибраного дійсного числа δ виконується умова

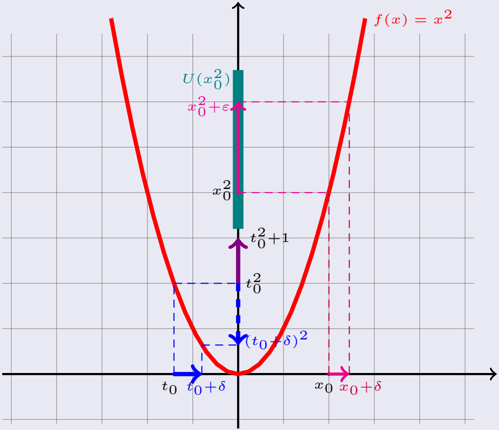
$$f\left([x_0, x_0+\delta)\right) \subseteq \left[x_0^2, x_0^2+\varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2),$$

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ неперервне в кожній точці $x_0 \geqslant 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.



Приклад 3.3.3 (продовження)

Тоді для так вибраного дійсного числа δ виконується умова
$$f\left([x_0, x_0+\delta)\right) \subseteq \left[x_0^2, x_0^2+\varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2),$$
а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ неперервне в кожній точці $x_0 \geqslant 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.



Приклад 3.3.3 (продовження)

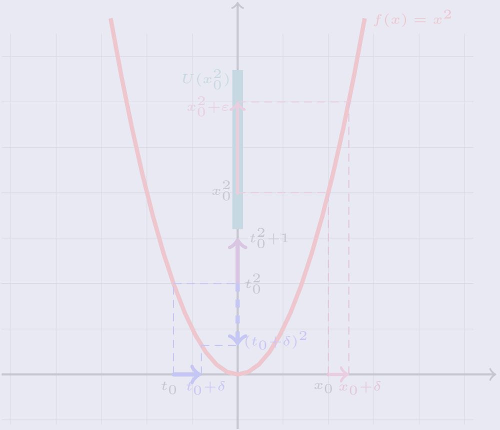
Для довільної дійсної точки $t_0 < 0$ і для базового околу $U(t_0^2) = [t_0^2, t_0^2 + 1)$ точки t_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ маємо, що для довільного дійсного числа $\delta > 0$ (див. рис.) не виконується включення

$$f\left([t_0, t_0 + \delta)\right) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right),$$

Приклад 3.3.3 (продовження)

Для довільної дійсної точки $t_0 < 0$ і для базового околу $U(t_0^2) = \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right)$ точки t_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ маємо, що для довільного дійсного числа $\delta > 0$ (див. рис.) не виконується включення

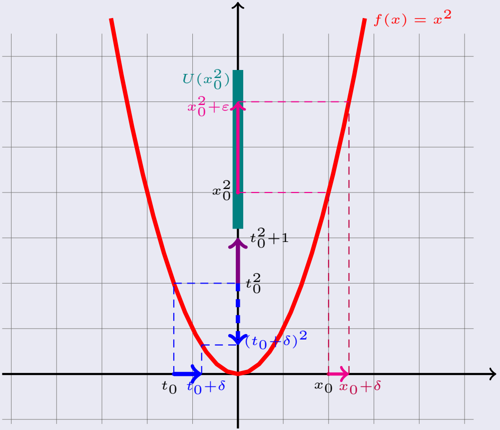
$$f\left([t_0, t_0 + \delta)\right) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right),$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Для довільної дійсної точки $t_0 < 0$ і для базового околу $U(t_0^2) = \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right)$ точки t_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ маємо, що для довільного дійсного числа $\delta > 0$ (див. рис.) не виконується включення

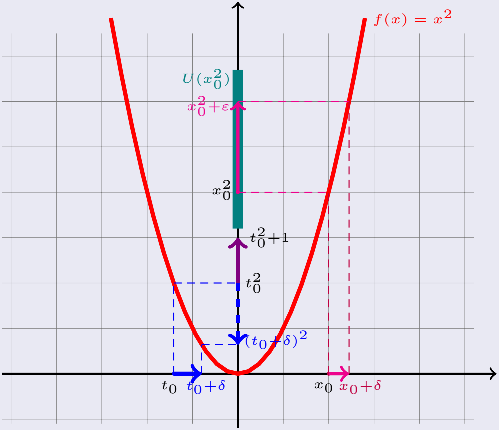
$$f\left([t_0, t_0 + \delta)\right) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right),$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Для довільної дійсної точки $t_0 < 0$ і для базового околу $U(t_0^2) = \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right)$ точки t_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ маємо, що для довільного дійсного числа $\delta > 0$ (див. рис.) не виконується включення

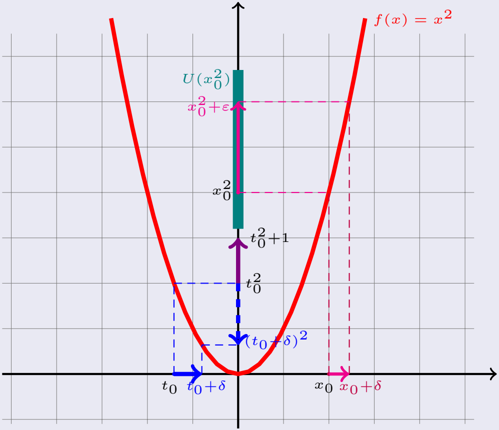
$$f\left([t_0, t_0 + \delta)\right) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right),$$



Приклад 3.3.3 (продовження)

Для довільної дійсної точки $t_0 < 0$ і для базового околу $U(t_0^2) = \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right)$ точки t_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ маємо, що для довільного дійсного числа $\delta > 0$ (див. рис.) не виконується включення

$$f\left([t_0, t_0 + \delta)\right) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right),$$

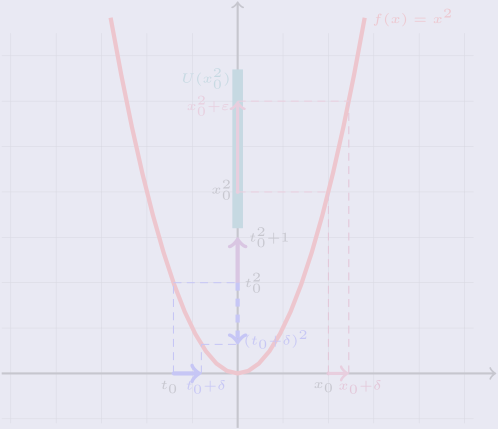


Приклад 3.3.3 (продовження)

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є неперервним в кожній точці $t_0 < 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, оскільки з цього включення випливає, що умова $f(U(t_0)) \subseteq [t_0^2, t_0^2 + 1)$ не виконується для довільного відкритого околу $U(t_0)$ точки $t_0 < 0$ в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.

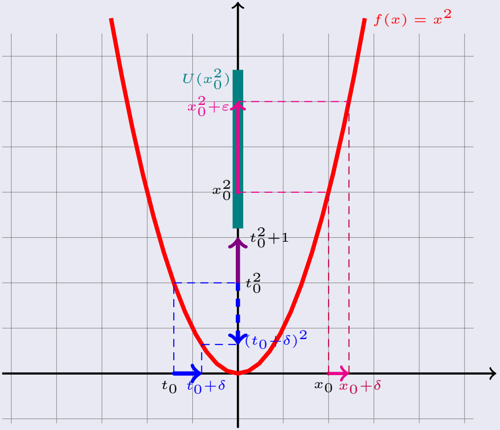
Приклад 3.3.3 (продовження)

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є неперервним в кожній точці $t_0 < 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, оскільки з цього включення випливає, що умова $f(U(t_0)) \subseteq [t_0^2, t_0^2 + 1)$ не виконується для довільного відкритого околу $U(t_0)$ точки $t_0 < 0$ в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.



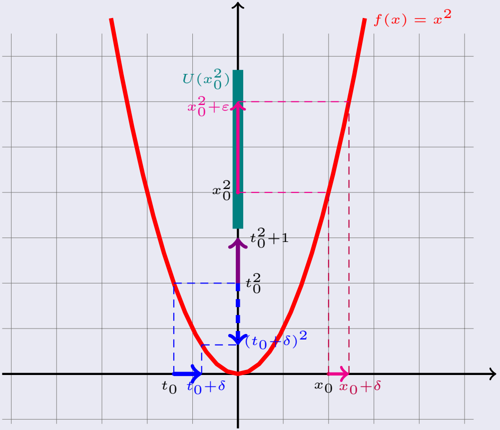
Приклад 3.3.3 (продовження)

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є неперервним в кожній точці $t_0 < 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, оскільки з цього включення випливає, що умова $f(U(t_0)) \subseteq [t_0^2, t_0^2 + 1)$ не виконується для довільного відкритого околу $U(t_0)$ точки $t_0 < 0$ в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.



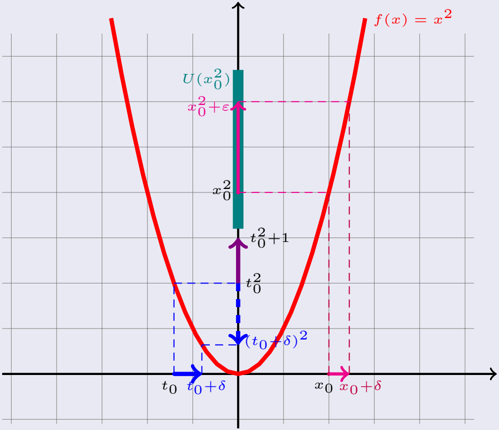
Приклад 3.3.3 (продовження)

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є неперервним в кожній точці $t_0 < 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, оскільки з цього включення випливає, що умова $f(U(t_0)) \subseteq [t_0^2, t_0^2 + 1)$ не виконується для довільного відкритого околу $U(t_0)$ точки $t_0 < 0$ в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.



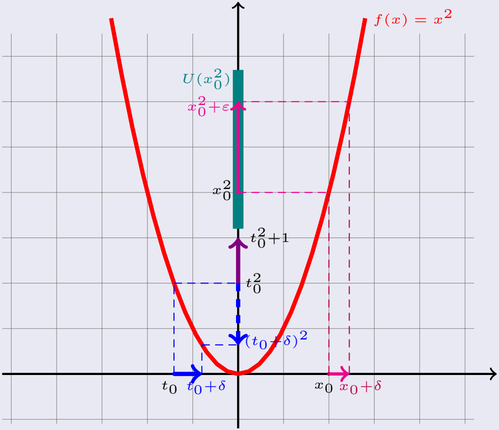
Приклад 3.3.3 (продовження)

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є неперервним в кожній точці $t_0 < 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, оскільки з цього включення випливає, що умова $f(U(t_0)) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right)$ не виконується для довільного відкритого околу $U(t_0)$ точки $t_0 < 0$ в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.



Приклад 3.3.3 (продовження)

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є неперервним в кожній точці $t_0 < 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, оскільки з цього включення випливає, що умова $f(U(t_0)) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right)$ не виконується для довільного відкритого околу $U(t_0)$ точки $t_0 < 0$ в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.



Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в попередніх лекціях, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Теорема 3.3.4

Нехай (X,τ_X) і (Y,τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільної множини $U\in\tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y,τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X,τ_X);

(3) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X,τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y,τ_Y) такі, що для довільної точки $x\in X$ і для кожного елемента $V\in\mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U\in\mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U)\subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y,τ_Y) замкнений в просторі (X,τ_X);

(7) $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ для довільної множини $A\subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$ для довільної множини $B\subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B)\subseteq\operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B\subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x \in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y \in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X,τ_X) і (Y,τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільної множини $U\in\tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y,τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X,τ_X);

(3) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X,τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y,τ_Y) такі, що для довільної точки $x\in X$ і для кожного елемента $V\in\mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U\in\mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U)\subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y,τ_Y) замкнений в просторі (X,τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$ для довільної множини $A\subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B\subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int}B)\subseteq\operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B\subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x \in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y \in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x \in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y \in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x \in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y \in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X,τ_X) і (Y,τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільної множини $U\in\tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y,τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X,τ_X);

(3) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U)\in\tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X,τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y,τ_Y) такі, що для довільної точки $x\in X$ і для кожного елемента $V\in\mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U\in\mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U)\subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y,τ_Y) замкнений в просторі (X,τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$ для довільної множини $A\subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B\subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int}B)\subseteq\operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B\subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x \in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y \in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова
$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$
а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки
$$f^{-1}\left(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k\right) = f^{-1}\left(V_1\right) \cap f^{-1}\left(V_2\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(V_k\right),$$
то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

(3) $\Rightarrow$ (4). Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

(3) $\Rightarrow$ (4). Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}\left(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k\right) = f^{-1}\left(V_1\right) \cap f^{-1}\left(V_2\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(V_k\right),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

(3) $\Rightarrow$ (4). Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}\left(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k\right) = f^{-1}\left(V_1\right) \cap f^{-1}\left(V_2\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(V_k\right),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}\left(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k\right) = f^{-1}\left(V_1\right) \cap f^{-1}\left(V_2\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(V_k\right),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X,τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y,τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X,τ_X) для якого виконується умова
$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$
а отже $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y,τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки
$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$
то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова
$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$
а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки
$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$
то виконується умова (4).

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

$(3) \Rightarrow (4)$. Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k),$$

то виконується умова (4).

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

(5) $\Rightarrow$ (6). Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

(5) $\Rightarrow$ (6). Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді
$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки
$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$
то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо
$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$
Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що
$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$.

Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

(5) $\Rightarrow$ (6). Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1]Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

$(5) \Rightarrow (6)$. Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[1] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

[1] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Для доведення імплікації (6) ⇒ (7) зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації (7) ⇒ (8), використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації (8) ⇒ (9), використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Для доведення імплікації (6) $\Rightarrow$ (7) зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації (7) $\Rightarrow$ (8), використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації (8) $\Rightarrow$ (9), використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації (6) ⇒ (7) зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X,τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації (7) ⇒ (8), використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації (8) ⇒ (9), використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) = f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) =$$

$$= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq$$

$$\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} =$$

$$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right).$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації (6) $\Rightarrow$ (7) зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації (7) $\Rightarrow$ (8), використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації (8) $\Rightarrow$ (9), використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації (6) ⇒ (7) зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації (7) ⇒ (8), використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації (8) ⇒ (9), використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) = f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) =$$

$$= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq$$

$$\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} =$$

$$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right).$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації (6) $\Rightarrow$ (7) зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації (7) $\Rightarrow$ (8), використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації (8) $\Rightarrow$ (9), використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) = f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) =$$

$$= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq$$

$$\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} =$$

$$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right).$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) = f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) &= \\
= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) &\subseteq \\
\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} &= \\
= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right)&.
\end{aligned}$$

Для доведення імплікації $(6) \Rightarrow (7)$ зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже,

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації $(7) \Rightarrow (8)$, використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації $(8) \Rightarrow (9)$, використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \operatorname{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\operatorname{Int}(U)) \subseteq \operatorname{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \qquad (1)$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що
$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$
Отож,
$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$
тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність
$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \qquad (1)$$
З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \qquad (1)$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним.
Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ■

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \qquad (1)$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

$(9) \Rightarrow (2)$. Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \mathrm{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). ∎

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{1}$$

З рівності (1) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5

Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.

Приклад 3.3.6

З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y,τ) у топологічний простір (X,τ_X) є неперервним, то (X,τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y,τ) у топологічний простір (X,τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y,τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X,τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X\colon (X,\tau_{\mathrm{ad}}) \to (X,\tau_X),\ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X,τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X,τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X\colon (X,\tau_{\mathrm{ad}}) \to (X,\tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X,τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X,τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \; x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \; x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \; x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \; x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y,τ) у топологічний простір (X,τ_X) є неперервним, то (X,τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y,τ) у топологічний простір (X,τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y,τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X,τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X\colon (X,\tau_{\mathrm{ad}}) \to (X,\tau_X),\ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X,τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X,τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X\colon (X,\tau_{\mathrm{ad}}) \to (X,\tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X,τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X,τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X),\ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \; x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \; x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \; x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.7

Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X), \ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.8

Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 : L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 : L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ (див. рис.).

Приклад 3.3.8

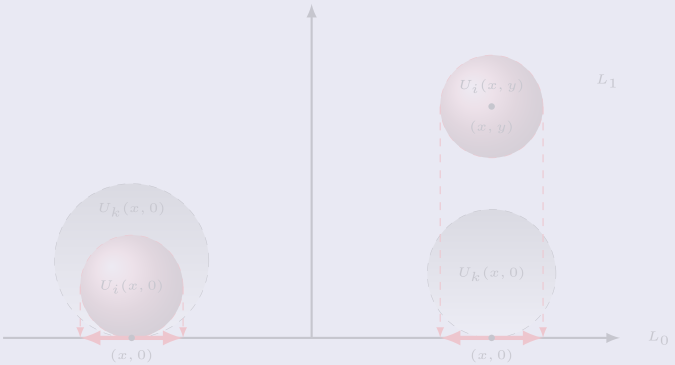
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 \colon L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

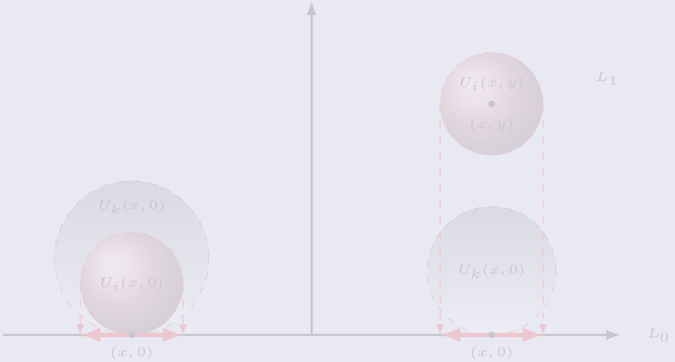
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 : L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 : L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

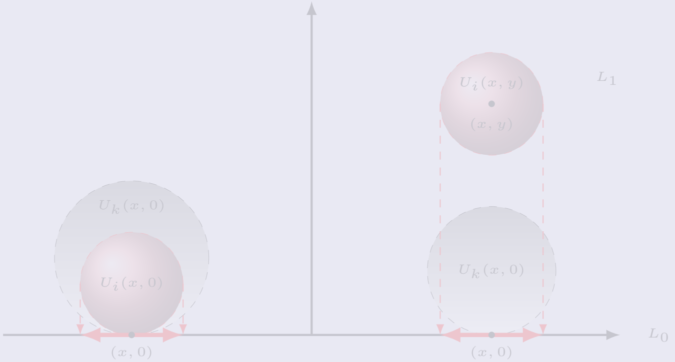
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 : L \to L, (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 : L \to L, (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

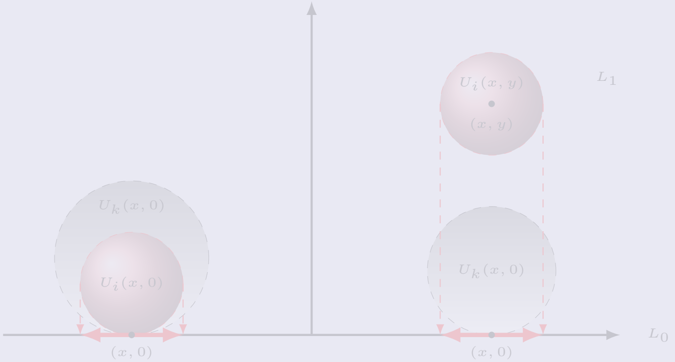
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 \colon L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

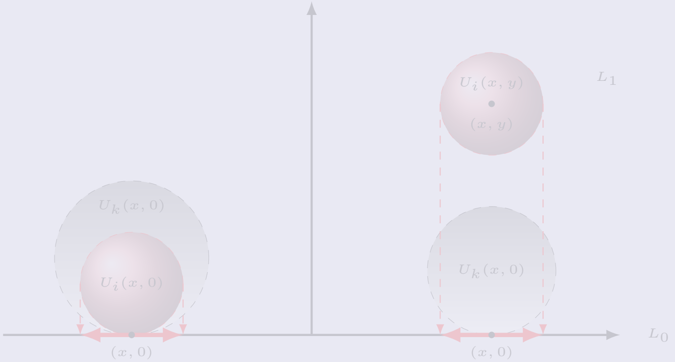
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1\colon L \to L,\ (x,y) \mapsto (x,0),$$

$$\mathrm{pr}_2\colon L \to L,\ (x,y) \mapsto (0,y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

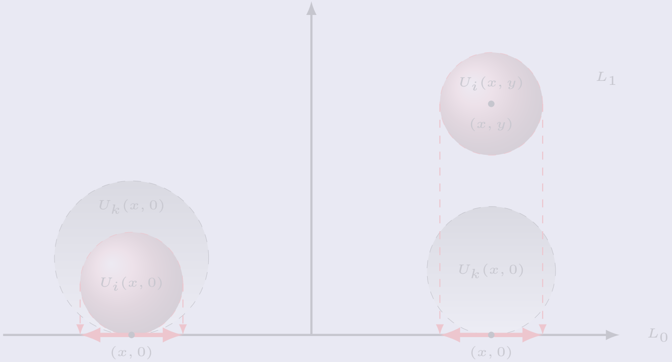
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1\colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2\colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

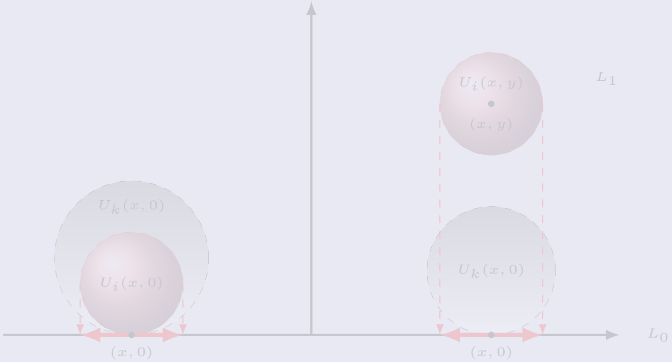
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 \colon L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

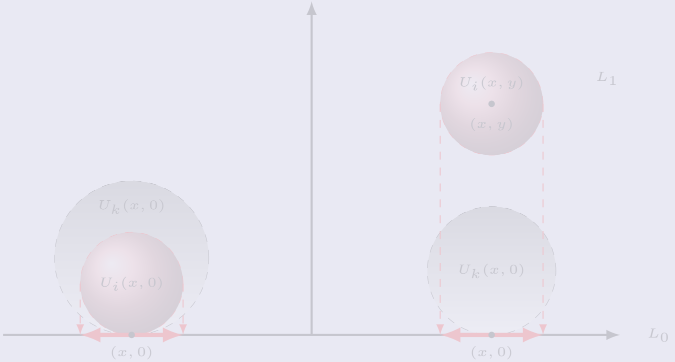
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 : L \to L,\ (x,y) \mapsto (x,0),$$

$$\mathrm{pr}_2 : L \to L,\ (x,y) \mapsto (0,y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

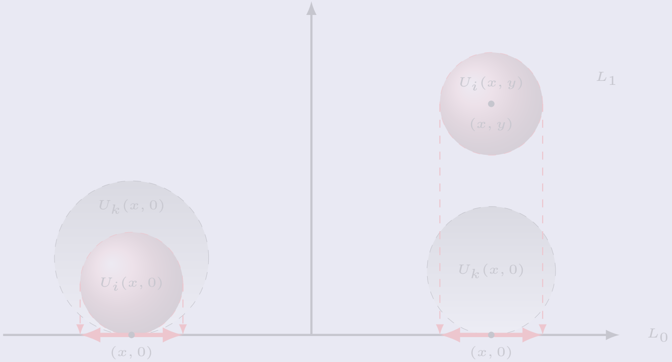
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 \colon L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8

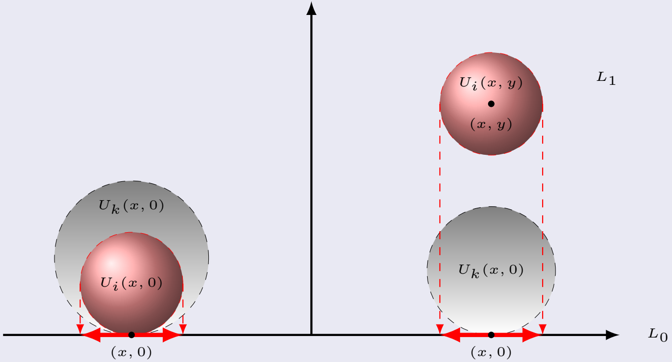
Нехай L — площина Немицького. Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$

$$\mathrm{pr}_2 \colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1 \colon L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x, y) = (x, 0)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x, y)) = \left\{(a, 0) \mid x - \tfrac{1}{i} < a < x + \tfrac{1}{i}\right\} \not\subseteq U_k(x, 0)$$

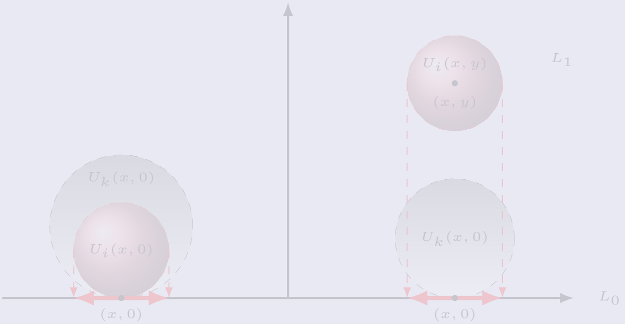
для довільних околів $U_i(x, y)$ та $U_k(x, 0)$ точок (x, y) і $(x, 0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x,y)=(x,0)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x,y))=\left\{(a,0)\mid x-\tfrac{1}{i}<a<x+\tfrac{1}{i}\right\}\nsubseteq U_k(x,0)$$

для довільних околів $U_i(x,y)$ та $U_k(x,0)$ точок (x,y) і $(x,0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x,y))$ відкритого околу $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1\colon L\to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

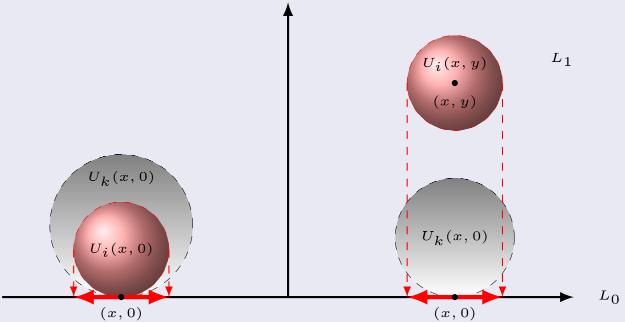


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x, y) = (x, 0)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x, y)) = \left\{(a, 0) \mid x - \tfrac{1}{i} < a < x + \tfrac{1}{i}\right\} \nsubseteq U_k(x, 0)$$

для довільних околів $U_i(x, y)$ та $U_k(x, 0)$ точок (x, y) і $(x, 0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1 \colon L \to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

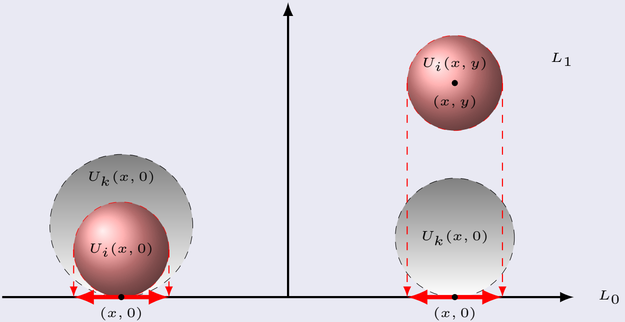


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x,y) = (x,0)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x,y)) = \left\{(a,0) \mid x - \tfrac{1}{i} < a < x + \tfrac{1}{i}\right\} \nsubseteq U_k(x,0)$$

для довільних околів $U_i(x,y)$ та $U_k(x,0)$ точок (x,y) і $(x,0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x,y))$ відкритого околу $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

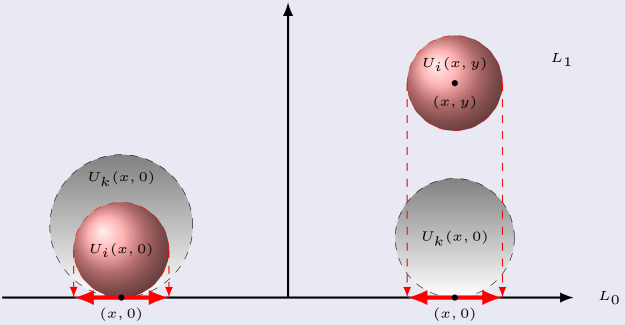


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x, y) = (x, 0)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x, y)) = \left\{(a, 0) \mid x - \tfrac{1}{i} < a < x + \tfrac{1}{i}\right\} \nsubseteq U_k(x, 0)$$

для довільних околів $U_i(x, y)$ та $U_k(x, 0)$ точок (x, y) і $(x, 0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

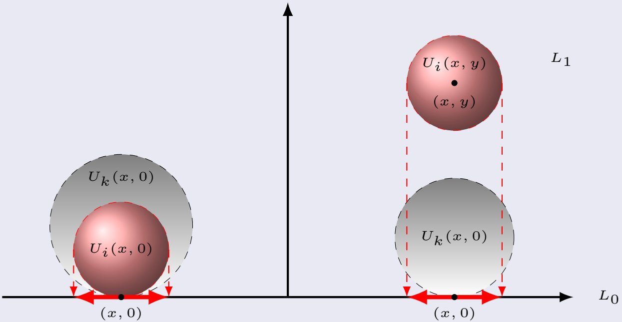


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x, y) = (x, 0)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x, y)) = \left\{(a, 0) \mid x - \tfrac{1}{i} < a < x + \tfrac{1}{i}\right\} \nsubseteq U_k(x, 0)$$

для довільних околів $U_i(x, y)$ та $U_k(x, 0)$ точок (x, y) і $(x, 0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1 : L \to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

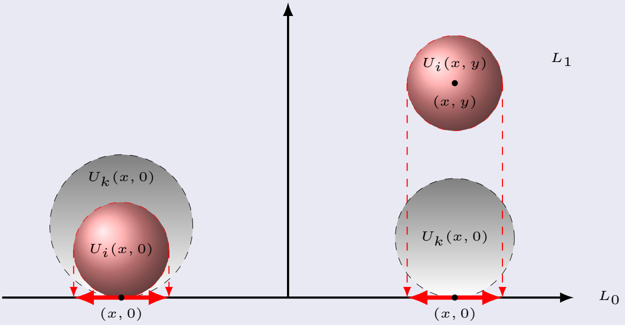


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x,y) = (x,0)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x,y)) = \left\{(a,0) \mid x - \tfrac{1}{i} < a < x + \tfrac{1}{i}\right\} \nsubseteq U_k(x,0)$$

для довільних околів $U_i(x,y)$ та $U_k(x,0)$ точок (x,y) і $(x,0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x,y))$ відкритого околу $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1 \colon L \to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

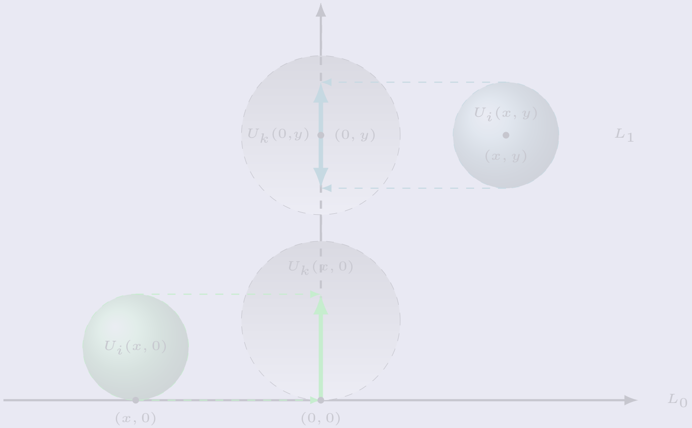


Приклад 3.3.8 (продовження)

Тепер розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_2 : L \to L$ (див. рис.).

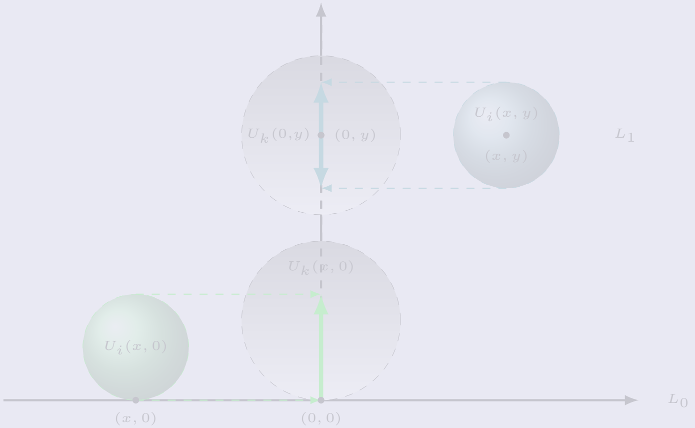
Приклад 3.3.8 (продовження)

Тепер розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ (див. рис.).



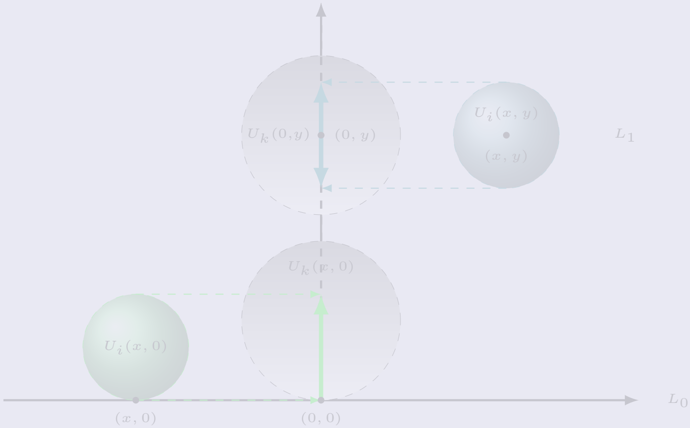
Приклад 3.3.8 (продовження)

Тепер розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ (див. рис.).



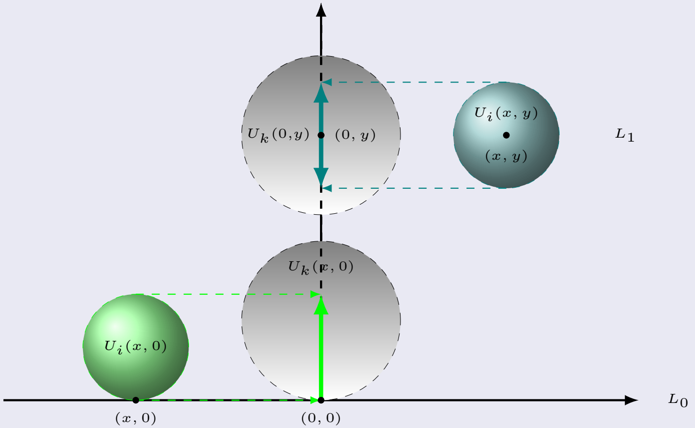
Приклад 3.3.8 (продовження)

Тепер розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8 (продовження)

Тепер розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ (див. рис.).



Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x,y)=(0,y)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x,y)) = \left\{(0,b) \mid y-\tfrac{1}{i}<b<y+\tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0,y)$$

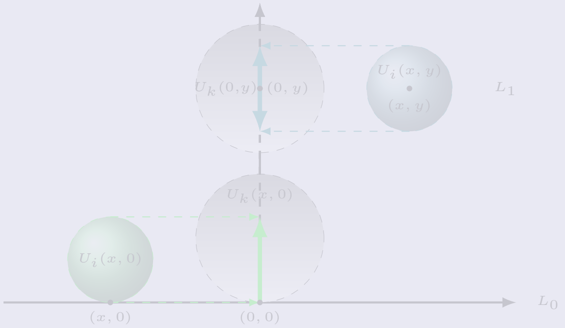
для околів $U_i(x,y)$ та $U_k(0,y)$ точок (x,y) і $(0,y)$, відповідно, де $i>k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x,y))$ відкритого околу $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2\colon L\to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x, y) = (0, y)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x, y)) = \left\{(0, b) \mid y - \tfrac{1}{i} < b < y + \tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0, y)$$

для околів $U_i(x, y)$ та $U_k(0, y)$ точок (x, y) і $(0, y)$, відповідно, де $i > k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

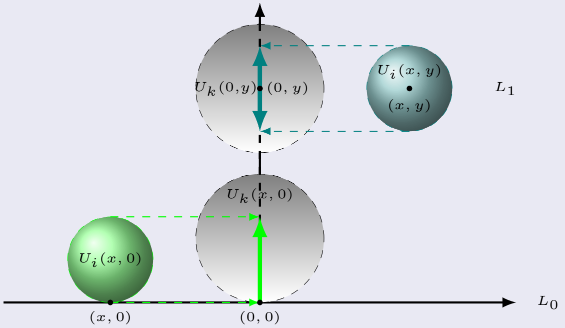


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x, y) = (0, y)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x, y)) = \left\{(0, b) \mid y - \tfrac{1}{i} < b < y + \tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0, y)$$

для околів $U_i(x, y)$ та $U_k(0, y)$ точок (x, y) і $(0, y)$, відповідно, де $i > k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

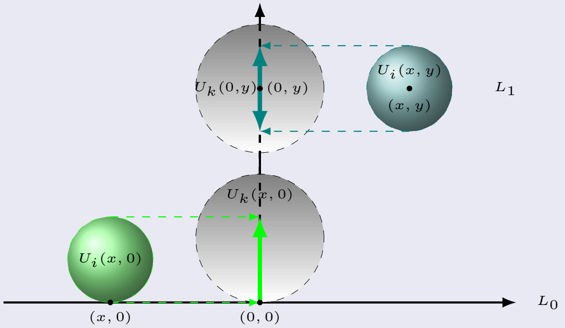


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x, y) = (0, y)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x, y)) = \left\{(0, b) \mid y - \tfrac{1}{i} < b < y + \tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0, y)$$

для околів $U_i(x, y)$ та $U_k(0, y)$ точок (x, y) і $(0, y)$, відповідно, де $i > k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

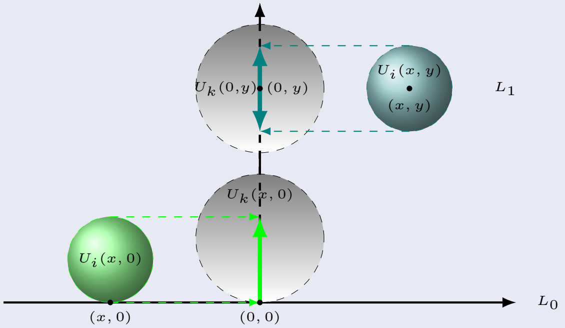


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x,y)=(0,y)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x,y))=\left\{(0,b) \mid y-\tfrac{1}{i}<b<y+\tfrac{1}{i}\right\}\subseteq U_k(0,y)$$

для околів $U_i(x,y)$ та $U_k(0,y)$ точок (x,y) і $(0,y)$, відповідно, де $i>k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x,y))$ відкритого околу $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2\colon L\to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

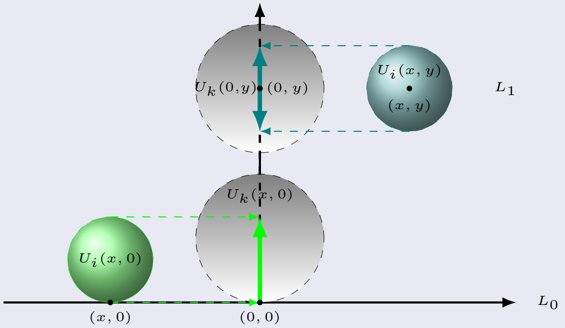


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x,y) = (0,y)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x,y)) = \left\{(0,b) \mid y - \tfrac{1}{i} < b < y + \tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0,y)$$

для околів $U_i(x,y)$ та $U_k(0,y)$ точок (x,y) і $(0,y)$, відповідно, де $i > k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x,y))$ відкритого околу $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2\colon L \to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

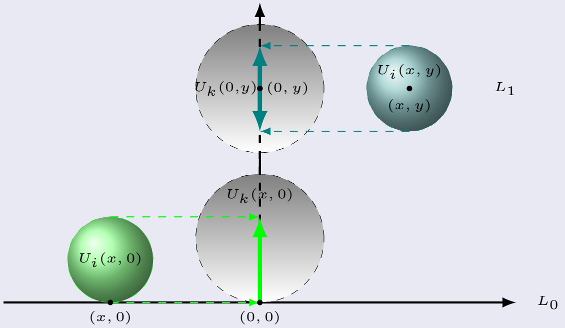


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x,y) = (0,y)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x,y)) = \left\{(0,b) \mid y - \tfrac{1}{i} < b < y + \tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0,y)$$

для околів $U_i(x,y)$ та $U_k(0,y)$ точок (x,y) і $(0,y)$, відповідно, де $i > k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x,y))$ відкритого околу $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

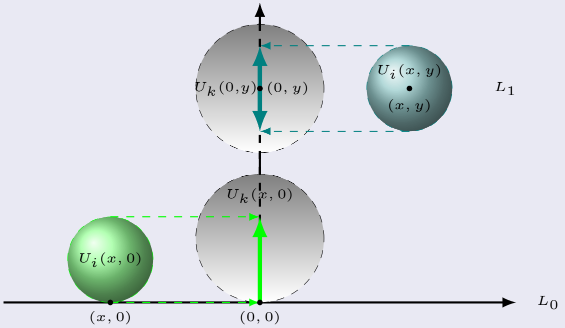


Приклад 3.3.8 (продовження)

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x, y) = (0, y)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x, y)) = \left\{(0, b) \mid y - \tfrac{1}{i} < b < y + \tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0, y)$$

для околів $U_i(x, y)$ та $U_k(0, y)$ точок (x, y) і $(0, y)$, відповідно, де $i > k$, в топологічному просторі L. На рис. образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x, y))$ відкритого околу $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2 \colon L \to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.



Вправа 3.3.1

Доведіть, якщо довільне відображення з топологічного простору X у довільний топологічний простір Y є неперервним, то X — дискретний простір.

Вправа 3.3.2

Наведіть приклади відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів, що композиція $g \circ f\colon X \to Z$ є неперервним відображенням і виконується одна з умов:

(i) $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ не є неперервними відображеннями;

(ii) $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення, але $g\colon Y \to Z$ не є неперервним відображенням;

(iii) $f\colon X \to Y$ не є неперервним відображенням, але $g\colon Y \to Z$ — неперервне відображення.

Вправа 3.3.3

Доведіть, якщо на множині X визначено дві топології τ_1 і τ_2, то тотожне відображення

$$f = \mathrm{id}_X\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2),\ x \mapsto x$$

є неперервним тоді і лише тоді, коли топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2.

Вправа 3.3.1

Доведіть, якщо довільне відображення з топологічного простору X у довільний топологічний простір Y є неперервним, то X — дискретний простір.

Вправа 3.3.2

Наведіть приклади відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів, що композиція $g \circ f\colon X \to Z$ є неперервним відображенням і виконується одна з умов:

(i) $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ не є неперервними відображеннями;

(ii) $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення, але $g\colon Y \to Z$ не є неперервним відображенням;

(iii) $f\colon X \to Y$ не є неперервним відображенням, але $g\colon Y \to Z$ — неперервне відображення.

Вправа 3.3.3

Доведіть, якщо на множині X визначено дві топології τ_1 і τ_2, то тотожне відображення

$$f = \mathrm{id}_X\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2), \ x \mapsto x$$

є неперервним тоді і лише тоді, коли топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2.

Вправа 3.3.1

Доведіть, якщо довільне відображення з топологічного простору X у довільний топологічний простір Y є неперервним, то X — дискретний простір.

Вправа 3.3.2

Наведіть приклади відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів, що композиція $g \circ f\colon X \to Z$ є неперервним відображенням і виконується одна з умов:

(i) $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ не є неперервними відображеннями;

(ii) $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення, але $g\colon Y \to Z$ не є неперервним відображенням;

(iii) $f\colon X \to Y$ не є неперервним відображенням, але $g\colon Y \to Z$ — неперервне відображення.

Вправа 3.3.3

Доведіть, якщо на множині X визначено дві топології τ_1 і τ_2, то тотожне відображення

$$f = \mathrm{id}_X\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2), \ x \mapsto x$$

є неперервним тоді і лише тоді, коли топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2.

Вправа 3.3.1

Доведіть, якщо довільне відображення з топологічного простору X у довільний топологічний простір Y є неперервним, то X — дискретний простір.

Вправа 3.3.2

Наведіть приклади відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів, що композиція $g \circ f\colon X \to Z$ є неперервним відображенням і виконується одна з умов:

(*i*) $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ не є неперервними відображеннями;

(*ii*) $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення, але $g\colon Y \to Z$ не є неперервним відображенням;

(*iii*) $f\colon X \to Y$ не є неперервним відображенням, але $g\colon Y \to Z$ — неперервне відображення.

Вправа 3.3.3

Доведіть, якщо на множині X визначено дві топології τ_1 і τ_2, то тотожне відображення

$$f = \mathrm{id}_X\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2), \ x \mapsto x$$

є неперервним тоді і лише тоді, коли топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2.

Вправа 3.3.4

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[a]

[a] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Вправа 3.3.5

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Нехай $[a, b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a, b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Вправа 3.3.4

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[a]

[a] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Вправа 3.3.5

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Нехай $[a,b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a,b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Вправа 3.3.4

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[a]

[a] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Вправа 3.3.5

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Нехай $[a,b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a,b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Вправа 3.3.4

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[a]

[a] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Вправа 3.3.5

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Нехай $[a, b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a, b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Вправа 3.3.4

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[a]

[a] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Вправа 3.3.5

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Нехай $[a,b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a,b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Вправа 3.3.4

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[a]

[a] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Вправа 3.3.5

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Нехай $[a,b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a,b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Вправа 3.3.4

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[a]

[a] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Вправа 3.3.5

Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$. Нехай $[a, b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a, b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку}, \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ∎

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ■

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ∎

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже
$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$
що і завершує доведення. ∎

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x \in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y \in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ∎

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x \in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y \in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ∎

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже
$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$
що і завершує доведення. ■

Теорема 3.3.4

Нехай (X,τ_X) і (Y,τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y,τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X,τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X,τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y,τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y,τ_Y) замкнений в (X,τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ∎

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ■

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — **неперервне відображення;**

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ **для довільної множини** $U \in \tau_Y$, **тобто повний прообраз довільної відкритої множини в** (Y, τ_Y) **є відкритою підмножиною в просторі** (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ **для довільного елемента** U **передбази** $\mathscr{P}_Y$ **топології** τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ **для довільного елемента** U **бази** $\mathscr{B}_Y$ **топології** τ_Y;

(5) **існують системи околів** $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ **у топологічному просторі** (X, τ_X) **і** $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ **у топологічному просторі** (Y, τ_Y) **такі, що для довільної точки** $x \in X$ **і для кожного елемента** $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ **існує елемент** $U \in \mathscr{B}_X(x)$, **що виконується включення** $f(U) \subseteq V$;

(6) **повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору** (Y, τ_Y) **замкнений в** (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ **для довільної множини** $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ **для довільної множини** $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ **для довільної множини** $B \subseteq Y$.

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ■

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) **f — неперервне відображення;**

(2) **$f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);**

(3) **$f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;**

(4) **$f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;**

(5) **існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;**

(6) **повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);**

(7) **$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;**

(8) **$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;**

(9) **$f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.**

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ■

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — **неперервне відображення;**

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ **для довільної множини** $U \in \tau_Y$**, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в** (Y, τ_Y) **є відкритою підмножиною в просторі** (X, τ_X)**;**

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ **для довільного елемента** U **передбази** $\mathscr{P}_Y$ **топології** τ_Y**;**

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ **для довільного елемента** U **бази** $\mathscr{B}_Y$ **топології** τ_Y**;**

(5) **існують системи околів** $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ **у топологічному просторі** (X, τ_X) **і** $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ **у топологічному просторі** (Y, τ_Y) **такі, що для довільної точки** $x \in X$ **і для кожного елемента** $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ **існує елемент** $U \in \mathscr{B}_X(x)$**, що виконується включення** $f(U) \subseteq V$**;**

(6) **повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору** (Y, τ_Y) **замкнений в** (X, τ_X)**;**

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ **для довільної множини** $A \subseteq X$**;**

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ **для довільної множини** $B \subseteq Y$**;**

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ **для довільної множини** $B \subseteq Y$**.**

Вправа 3.3.6

Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. ■

Теорема 3.3.4

Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:

(1) f — неперервне відображення;

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;

(4) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;

(5) існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;

(6) повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в (X, τ_X);

(7) $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;

(8) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;

(9) $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f: X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f: X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10

Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.

Наслідок 3.3.11

Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[a]

[a] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F){=}Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ∎

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ∎

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f: X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f: X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f: X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B\subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A\subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C\subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C)\subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X\to Y$ замкнене, $B\subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C=Y\setminus f(X\setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C)=f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus A))=X\setminus f^{-1}(f(X\setminus A))\subseteq X\setminus(X\setminus A)=A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X\to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F\subseteq X$. Множина $A=X\setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B=Y\setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B)=X\setminus f^{-1}(f(F))\subseteq X\setminus F=A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C\subseteq Y$ така, що $Y\setminus f(F)\subseteq C$ і $f^{-1}(C)\subseteq A$, тобто $f^{-1}(C)\cap F=\varnothing$. Останнє означає, що $C\cap f(F)=\varnothing$, тобто $C\subseteq Y\setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y\setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ∎

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F)=Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B\subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A\subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C\subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C)\subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X\to Y$ замкнене, $B\subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C=Y\setminus f(X\setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C)=f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus A))=X\setminus f^{-1}(f(X\setminus A))\subseteq X\setminus(X\setminus A)=A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X\to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F\subseteq X$. Множина $A=X\setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B=Y\setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B)=X\setminus f^{-1}(f(F))\subseteq X\setminus F=A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C\subseteq Y$ така, що $Y\setminus f(F)\subseteq C$ і $f^{-1}(C)\subseteq A$, тобто $f^{-1}(C)\cap F=\varnothing$. Останнє означає, що $C\cap f(F)=\varnothing$, тобто $C\subseteq Y\setminus f(F)$. Отже, $f(F){=}Y\setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ◻

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13

Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.

Теорема 3.3.14

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для $B = Y \setminus f(F)$ маємо

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq X \setminus F = A.$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. ■

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Вправа 3.3.7

Доведіть теорему 3.3.15.

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15

Неперервне відображення $f: X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Вправа 3.3.7

Доведіть теорему 3.3.15.

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Вправа 3.3.7

Доведіть теорему 3.3.15.

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Вправа 3.3.7

Доведіть теорему 3.3.15.

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Вправа 3.3.7

Доведіть теорему 3.3.15.

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Вправа 3.3.7

Доведіть теорему 3.3.15.

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Вправа 3.3.7

Доведіть теорему 3.3.15.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y\in Y$ і кожної відкритої множини $U\subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V)\subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B\subseteq Y$ — деяка підмножина й $A\subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B)\subseteq A$. Для кожної точки $y\in B$ виберемо такий окіл $V_y\subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y)\subseteq A$. Для відкритої множини $C=\bigcup\limits_{y\in B} V_y$ виконуються умови

$$B\subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C)\subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X\to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U\in\mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{i} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y\in Y$ і кожної відкритої множини $U\subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V)\subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B\subseteq Y$ — деяка підмножина й $A\subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B)\subseteq A$. Для кожної точки $y\in B$ виберемо такий окіл $V_y\subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y)\subseteq A$. Для відкритої множини $C=\bigcup\limits_{y\in B}V_y$ виконуються умови

$$B\subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C)\subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X\to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U\in\mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y\in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y\in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup_{y\in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.

Теорема 3.3.16

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y\in Y$ і кожної відкритої множини $U\subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V)\subseteq U$.

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B\subseteq Y$ — деяка підмножина й $A\subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B)\subseteq A$. Для кожної точки $y\in B$ виберемо такий окіл $V_y\subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y)\subseteq A$. Для відкритої множини $C=\bigcup\limits_{y\in B} V_y$ виконуються умови

$$B\subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C)\subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X\to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14 . ■

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U\in\mathscr{B}_X$.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0,1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0,1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0, 1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 : L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 : (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0, 1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0,1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0,1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0, 1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 : L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 : (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0, 1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0, 1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0, 1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0, 1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0, 1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0,1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0,1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0,1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0,1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0, 1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0, 1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Приклад 3.3.18

Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0,1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Відображення $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2\colon L \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0,1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;
(ii) f — бієктивне;
(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;
(ii) f — бієктивне;
(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — біективне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{i} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{i} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(*i*) f — неперервне;

(*ii*) f — бієктивне;

(*iii*) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;
(ii) f — бієктивне;
(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;
(ii) f — бієктивне;
(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то
$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$
А якщо крім того $f(X) = Y$, то
$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;

(ii) f — бієктивне;

(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19

Якщо $f\colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20

Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

- (i) f — неперервне;
- (ii) f — бієктивне;
- (iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X: X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f: X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f : X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f \colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення “*гомеоморфності топологічних просторів*” на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X\to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і тільки тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f \colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f : X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(*i*) f — гомеоморфізм;

(*ii*) f — замкнене відображення;

(*iii*) f — відкрите відображення;

(*iv*) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(*v*) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(*vi*) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(*vii*) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f \colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f: X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f \colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(*i*) f — гомеоморфізм;

(*ii*) f — замкнене відображення;

(*iii*) f — відкрите відображення;

(*iv*) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(*v*) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(*vi*) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(*vii*) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21

Нехай $f\colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:

(i) f — гомеоморфізм;

(ii) f — замкнене відображення;

(iii) f — відкрите відображення;

(iv) множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;

(v) множина $f^{-1}(B)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B замкнена в топологічному просторі Y;

(vi) множина $f(A)$ відкрита в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A відкрита в топологічному просторі X;

(vii) множина $f^{-1}(B)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина B відкрита в топологічному просторі Y.

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності

$$A = f^{-1}(f(A))$$

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності

$$A = f^{-1}(f(A))$$

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що
$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності
$$A = f^{-1}(f(A))$$
для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). ■

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{C}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{C}\mathscr{O}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;
(ii) звичайна топологія;
(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;
(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;
(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;
(ii) звичайна топологія;
(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;
(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;
(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a\colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a\colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(*i*) дискретна топологія;
(*ii*) звичайна топологія;
(*iii*) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;
(*iv*) топологія стрілки Зорґенфрея;
(*v*) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a\colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a\colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.22

Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R},\tau_1)$ і $(\mathbb{R},\tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{r_1}) \to (\mathbb{R},\tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R},\tau_1)$ і $(\mathbb{R},\tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{r_1}) \to (\mathbb{R},\tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Приклад 3.3.23

Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8

Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Вправа 3.3.9

Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}$ і $g\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервні відображення[a]. Доведіть, що такі функції

$$|f|(x) = |f(x)|;$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x);$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$$
$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\};$$
$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

є неперервними. Якщо крім того функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ не перетворюється в нуль в жодній точці топологічного простору X, то функція $1/f$, де $(1/f)(x) = 1/f(x)$, неперервна.

Доведіть, що аналогічні твердження виконуються для неперервних функцій $f\colon X \to \mathbb{I}$ та $g\colon X \to \mathbb{I}$ за виконання відповідних обмежень[b].

[a] Надалі, якщо нічого не зазначено, то через $\mathbb{R}$ будемо позначати топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ (див. приклад 3.2.7).

[b] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} (див. приклад 3.2.8).

Вправа 3.3.9

Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}$ і $g\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервні відображення[a]. Доведіть, що такі функції

$$
\begin{aligned}
|f|(x) &= |f(x)|;\\
(f+g)(x) &= f(x)+g(x);\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x);\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x);\\
\min\{f,g\}(x) &= \min\{f(x),g(x)\};\\
\max\{f,g\}(x) &= \max\{f(x),g(x)\}
\end{aligned}
$$

є неперервними. Якщо крім того функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ не перетворюється в нуль в жодній точці топологічного простору X, то функція $1/f$, де $(1/f)(x) = 1/f(x)$, неперервна.

Доведіть, що аналогічні твердження виконуються для неперервних функцій $f\colon X \to \mathbb{I}$ та $g\colon X \to \mathbb{I}$ за виконання відповідних обмежень[b].

[a] Надалі, якщо нічого не зазначено, то через $\mathbb{R}$ будемо позначати топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ (див. приклад 3.2.7).

[b] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ (див. приклад 3.2.8).

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує злічення множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X,τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X,\tau)\to\mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0\subset X$ така, що $f(x)=f(x_0)$ для довільної точки $x\in X\setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X\setminus f^{-1}\left((f(x_0)-1/i, f(x_0)+1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X,τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0=\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X,τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X,\tau)\to\mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0\subset X$ така, що $f(x)=f(x_0)$ для довільної точки $x\in X\setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X\setminus f^{-1}\left((f(x_0)-1/i, f(x_0)+1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X,τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0=\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Приклад 3.3.24

Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що $\mathcal{P}$ *є інваріантом класу* $\mathcal{M}$ або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f \colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу $\mathcal{M}$*, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що $\mathcal{P}$ *є інваріантом класу* $\mathcal{M}$ або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f \colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.25

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що $\mathcal{P}$ *є оберненим інваріантом класу* $\mathcal{M}$ або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f \colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f \colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що $\mathcal{P}$ *є оберненим інваріантом класу* $\mathcal{M}$ або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f \colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f \colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень.

Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Означення 3.3.26

Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що *$\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$* або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f \colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Лекція 13: Неперервні відображення топологічних просторів

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з другою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з другою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з другою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з другою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.3.27

Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 у y_0 — точку накопичення простору Y. Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Означення 3.3.28

Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29

Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ∎

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ∎

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f \colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \qquad (2)$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \qquad (3)$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f \colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \qquad (2)$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \qquad (3)$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f \colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що
$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$
Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що
$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$
Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо
$$\begin{aligned}|f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant\\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| <\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} =\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f \colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{2}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (2) і (3) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f \colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. ■

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathscr{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathscr{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathfrak{I}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathfrak{I}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ∎

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де $f_i \colon X \to Y_i$ для довільного $i \in \mathscr{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i \colon X \to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathscr{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i \colon X \to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i \colon X \to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}} \subseteq \tau$. Звідси випливає включення $\tau \subseteq \tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ∎

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathscr{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathscr{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathscr{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathscr{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{I}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathcal{I}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathscr{I}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathscr{I}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$), і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathfrak{I}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathfrak{I}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{I}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathcal{I}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathscr{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathscr{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathscr{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathscr{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathscr{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\mathscr{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30

Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X\to Y_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k\in\mathcal{J}$ і V_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j=1,2,\ldots,k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X\to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині X, то $\mathscr{B}_{\{f_i\}}\subseteq\tau$. Звідси випливає включення $\tau\subseteq\tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. ■

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1} f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ∎

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{I}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{I}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності
$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$
що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ∎

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1} f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ∎

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{I}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{I}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне біективне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ∎

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1} f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathscr{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathscr{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Твердження 3.3.31

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1}f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. ■

Означення 3.3.32

Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Очевидно, що кожен гомеоморфізм топологічних просторів є ущільненням. Також, для довільного топологічного простору (X, τ) тотожні відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathfrak{d}}) \to (X, \tau),$$

де τ_{ad} і $\tau_{\mathfrak{d}}$ — антидискретна та дискретна топології на множині X, відповідно, є ущільненнями.

Очевидно, що кожен гомеоморфізм топологічних просторів є ущільненням. Також, для довільного топологічного простору (X, τ) тотожні відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathfrak{d}}) \to (X, \tau),$$

де τ_{ad} і $\tau_{\mathfrak{d}}$ — антидискретна та дискретна топології на множині X, відповідно, є ущільненнями.

Очевидно, що кожен гомеоморфізм топологічних просторів є ущільненням. Також, для довільного топологічного простору (X, τ) тотожні відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathfrak{d}}) \to (X, \tau),$$

де τ_{ad} і $\tau_{\mathfrak{d}}$ — антидискретна та дискретна топології на множині X, відповідно, є ущільненнями.

Очевидно, що кожен гомеоморфізм топологічних просторів є ущільненням. Також, для довільного топологічного простору (X, τ) тотожні відображення

$$\mathrm{id}_X \colon (X, \tau) \to (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{id}_X \colon (X, \tau_{\mathfrak{d}}) \to (X, \tau),$$

де τ_{ad} і $\tau_{\mathfrak{d}}$ — антидискретна та дискретна топології на множині X, відповідно, є ущільненнями.

Очевидно, що кожен гомеоморфізм топологічних просторів є ущільненням. Також, для довільного топологічного простору (X, τ) тотожні відображення

$$\mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{id}_X : (X, \tau_{\mathfrak{d}}) \to (X, \tau),$$

де τ_{ad} і $\tau_{\mathfrak{d}}$ — антидискретна та дискретна топології на множині X, відповідно, є ущільненнями.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1) \to (\mathbb{R},\tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R},\tau_2) \to (\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$), а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$), а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1) \to (\mathbb{R},\tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R},\tau_2) \to (\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$), а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1) \to (\mathbb{R},\tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R},\tau_2) \to (\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3}\cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $\quad x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X\to Y$ і $g\colon Y\to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1=\{\{\{x\}\mid x<0\},\{[0,1]\},\{\{x\}\mid x>1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2=\{\{\{x\}\mid x<0\},\{[0,1]\},\{\{x\}\mid 1<x<2\},\{[2,3]\},\{\{x\}\mid x>3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1)\to(\mathbb{R},\tau_2)$, $x\mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1\subset\tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon(\mathbb{R},\tau_2)\to(\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x)=\dfrac{1}{3}\cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x\in(\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x<0$ або $x>1$ маємо $g^{-1}(\{x\})=\{3x\}\in\tau_2$ і $g^{-1}([0,1])=[0,3]\in\tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X=(\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y=(\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$), а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $\ x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення

$g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1) \to (\mathbb{R},\tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R},\tau_2) \to (\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1) \to (\mathbb{R},\tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R},\tau_2) \to (\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $\;x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1) \to (\mathbb{R},\tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R},\tau_2) \to (\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $\;x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $\quad x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Приклад 3.3.33

Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1 = \{\{\{x\} \mid x < 0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid x > 1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2 = \{\{\{x\} \mid x<0\}, \{[0,1]\}, \{\{x\} \mid 1<x<2\}, \{[2,3]\}, \{\{x\} \mid x > 3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$, а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, $x \mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1 \subset \tau_2$, а отже, воно є ущільненням. Також відображення $g\colon (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$, означене за формулою $g(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x \in (\mathbb{R}, \tau_1)$ такої, що $x < 0$ або $x > 1$ маємо $g^{-1}(\{x\}) = \{3x\} \in \tau_2$ і $g^{-1}([0,1]) = [0,3] \in \tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$ і $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

Дякую за увагу!!!