База та передбаза топології

Топологія

Лекція 12

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Лекція 12: База та передбаза топології

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_{∂} на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X,τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X,τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_D на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_D на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології $\tau_д$ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X,τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X,τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології $\tau_д$ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.1

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X,τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X,τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_{∂} на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.1

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X,τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X,τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології $\tau_{д}$ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.1

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X,τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X,τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_{∂} на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології τ_∂ на X.

Означення 3.2.1

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2

Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_{∂} на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_{∂} на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_∂ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_{∂} на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_∂ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_∂ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_{∂} на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_∂ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології τ_∂ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1

Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2

Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in$

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що x

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) *для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;*

($\mathscr{B}2$) *для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in$*

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) *для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;*

($\mathscr{B}2$) *для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in$*

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Лекція 12: База та передбаза топології

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathscr{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathscr{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Лекція 12: База та передбаза топології

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ∎

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова $(\mathscr{B}2)$, оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова $(\mathscr{B}1)$.

Припустимо, що умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова $(\mathscr{O}1)$ для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова $(\mathscr{O}3)$ для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови $(\mathscr{B}1)$ випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4

Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{B}1$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;

($\mathscr{B}2$) для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathcal{I}\}$ і $V = \bigcup \{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathcal{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. ■

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)

задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$). Справді, $x_0 \in [x_0, x_0 + 1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)

задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$). Справді, $x_0 \in [x_0, x_0 + 1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)

задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$). Справді, $x_0 \in [x_0, x_0 + 1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

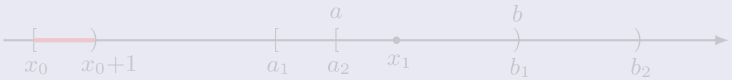
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

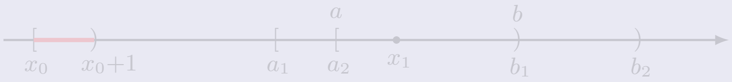
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



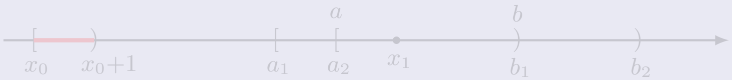
задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$). Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



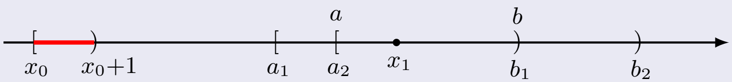
задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

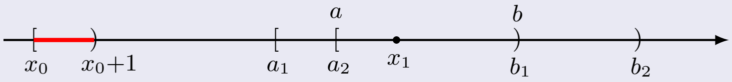
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ (див. рис.)



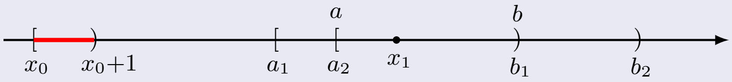
задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a=\max\{a_1,a_2\}$ і $b=\min\{b_1,b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

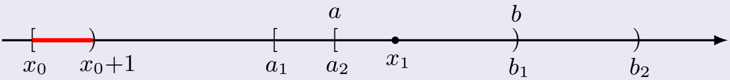
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



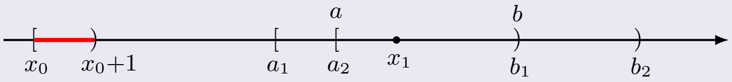
задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$.
Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



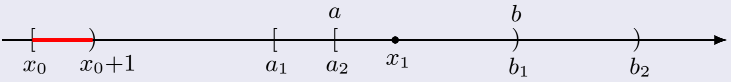
задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



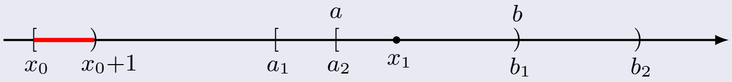
задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$.
Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

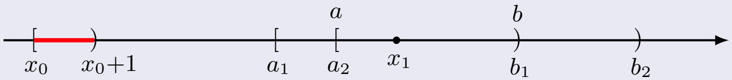
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

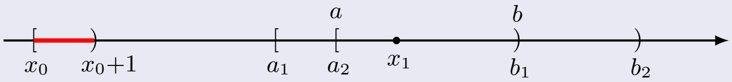
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

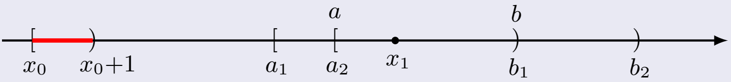
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$.
Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

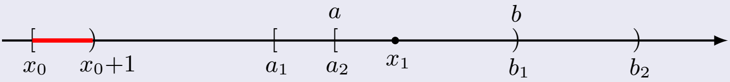
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0 + 1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

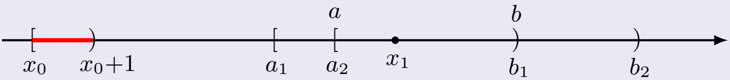
Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



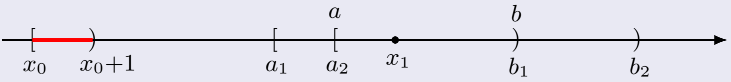
задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, то $x_1 \in [a,b) \subseteq [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$, де $a = \max\{a_1,a_2\}$ і $b = \min\{b_1,b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X,τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X,τ), і позначається $w((X,\tau))$.

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5

Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис.)



задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$. Справді, $x_0 \in [x_0, x_0+1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається $w((X, \tau))$.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x)$ – база топологічного простору (X,τ) в точці $x\}$. А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці x*, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.
А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x)$ – база топологічного простору (X,τ) в точці $x\}$.
А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.
А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x)$ – база топологічного простору (X,τ) в точці $x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X,τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X,τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X,τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X,τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X,τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал $\chi(x,(X,\tau)) = \min\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.
А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору (X, τ) в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3

Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X, τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X, τ) в точці x. Також доведіть якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X, τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X, τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X, τ) називається кардинал $\chi(x,(X, \tau)) = \min \{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\}$.

А *характером топологічного простору* (X, τ) називається кардинал

$$\chi((X, \tau)) = \sup \{\chi(x, (X, \tau)) \mid x \in (X, \tau)\}.$$

Якщо $\chi((X, \tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X, τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X, \tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X, τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X, τ) має зліченну базу.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.
Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я
$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$
відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я
$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$
є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.
Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї
$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.
Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.
Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X,d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x,y) = |x-y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.
Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X,d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я
$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$
відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_u, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x,y)=|x-y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я
$$\mathscr{B}_u = \{(a,b) \mid a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$$
є базою евклідової топології τ_u на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_u$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї
$$\mathscr{B}'_u=\{(a,b)\mid a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\}.$$
Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R},\tau_u)$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я
$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$
відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я
$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$
є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.
Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї
$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я
$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$
відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я
$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$
є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї
$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відрриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я
$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$
відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я
$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$
є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї
$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я
$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$
відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я
$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$
є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{R}$.
Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї
$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.6

Кожен метричний простір (X, d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b, \ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як злічення об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b, \ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0, 1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_u, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x, y) = |x - y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_u = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_u на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_u$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_u = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_u)$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_u будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0, 1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x, y) = |x - y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

---

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0, 1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x, y) = |x - y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0, 1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x, y) = |x - y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a,b)\cap[0,1] \mid a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a,b)\cap[0,1] \mid a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I},\tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0, 1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x, y) = |x - y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

---

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0, 1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x, y) = |x - y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a, b) \cap [0, 1] \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.8

На одиничному замкненому інтервалі[a] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія τ_{u}, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології τ_{u} на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathrm{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathrm{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

[a] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією τ_{u} будемо позначати через $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \{[a, a + \tfrac{1}{n}) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in [x, x + \tfrac{1}{n}) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $[x, x + \frac{1}{n}) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{\left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b, \; a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.9

Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c, d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c, d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c, d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ злічена, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}\,.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то

$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$

— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}\,.$$

на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то

$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$

— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup\{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія
$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$
на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то
$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$
— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \not\subseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Приклад 3.2.10

Доведіть, що топологія

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}\,.$$

на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина, то

$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$

— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4

Доведіть, що топологія $\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}$ на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5

Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ∎

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології τ*, або *передбазою топологічного простору (X, τ)*, якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію τ* на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології τ*, або *передбазою топологічного простору (X, τ)*, якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію τ* на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології τ*, або *передбазою топологічного простору (X, τ)*, якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію τ на X*.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ∎

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології τ*, або *передбазою топологічного простору (X, τ)*, якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію τ* на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ∎

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ∎

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Твердження 3.2.11 надає передумови означення передбази топології.

Твердження 3.2.11

Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. ■

Означенн 3.2.12

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.13

Нехай (X,τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X,τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X,τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X,τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ відкритих околів топологічного простору (X,τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

$(\mathscr{BP}1)$ $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

$(\mathscr{BP}2)$ якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

$(\mathscr{BP}3)$ для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Справді, властивість $(\mathscr{BP}1)$ випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$ також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ■

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X,τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X,τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X,τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X,τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ відкритих околів топологічного простору (X,τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ■

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

$(\mathscr{BP}1)$ $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

$(\mathscr{BP}2)$ якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

$(\mathscr{BP}3)$ для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Справді, властивість $(\mathscr{BP}1)$ випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$ також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X,τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X,τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X,τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X,τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ відкритих околів топологічного простору (X,τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ■

Лекція 12: База та передбаза топології

Означення 3.2.13

Нехай (X,τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X,τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X,τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X,τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ відкритих околів топологічного простору (X,τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X,τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X,τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X,τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X,τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ відкритих околів топологічного простору (X,τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ■

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

$(\mathscr{BP}1)$ $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

$(\mathscr{BP}2)$ якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

$(\mathscr{BP}3)$ для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Справді, властивість $(\mathscr{BP}1)$ випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$ також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ■

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X,τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X,τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X,τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X,τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ відкритих околів топологічного простору (X,τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ■

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

($\mathscr{BP}1$) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

($\mathscr{BP}2$) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

($\mathscr{BP}3$) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Справді, властивість ($\mathscr{BP}1$) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

$(\mathscr{BP}1)$ $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

$(\mathscr{BP}2)$ якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

$(\mathscr{BP}3)$ для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Справді, властивість $(\mathscr{BP}1)$ випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$ також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ∎

Означення 3.2.13

Нехай (X,τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X,τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X,τ).

Твердження 3.2.14

Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X,τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

$(\mathscr{BP}1)$ $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

$(\mathscr{BP}2)$ якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;

$(\mathscr{BP}3)$ для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ відкритих околів топологічного простору (X,τ) задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$. Справді, властивість $(\mathscr{BP}1)$ випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$ також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ∎

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ∎

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ∎

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ∎

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ∎

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ∎

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). ■

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \operatorname{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то
$$U \cap \operatorname{Cl}(V) = \varnothing = \operatorname{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \operatorname{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \operatorname{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то
$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);
(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;
(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то
$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то
$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то
$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A\subset X$ і $U\cap A=\varnothing$, то $U\cap \mathrm{Cl}(A)=\varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то
$$U\cap \mathrm{Cl}(V)=\varnothing=\mathrm{Cl}(U)\cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x\in U\cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U\cap A=\varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U\cap \mathrm{Cl}(A)=\varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A\subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U\cap A\neq\varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U\in\mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U\cap A\neq\varnothing$ для довільного $U\in\mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то
$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);
(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;
(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

Лекція 12: База та передбаза топології

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то
$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);
(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;
(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то
$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ■

Наслідок 3.2.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X, τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A\subset X$ і $U\cap A=\varnothing$, то $U\cap \mathrm{Cl}(A)=\varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U\cap \mathrm{Cl}(V)=\varnothing=\mathrm{Cl}(U)\cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x\in U\cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U\cap A=\varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U\cap \mathrm{Cl}(A)=\varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A\subset X$ такі умови є еквівалентними:

- (i) A щільна в (X,τ);
- (ii) $U\cap A\neq\varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U\in\mathscr{B}$;
- (iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U\cap A\neq\varnothing$ для довільного $U\in\mathscr{B}$.

З твердження 3.2.15 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.2.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X,τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X,τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. ∎

Наслідок 3.2.17

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) A щільна в (X,τ);

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X,τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;

(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X,τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \operatorname{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \operatorname{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ∎

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ∎

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ∎

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ∎

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ∎

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18

Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. ■

Лекція 12: База та передбаза топології

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ∎

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\operatorname{Cl}(U) = \operatorname{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \operatorname{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \operatorname{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\operatorname{Cl}(U) \subseteq \operatorname{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\operatorname{Cl}(U \cap A) \subseteq \operatorname{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \operatorname{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\operatorname{Cl}(U) = \operatorname{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \operatorname{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \operatorname{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\operatorname{Cl}(U) \subseteq \operatorname{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\operatorname{Cl}(U \cap A) \subseteq \operatorname{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \operatorname{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то
$\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;
(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;
(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то
$\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;
(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;
(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ∎

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19

Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$ для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ очевидне. ■

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Твердження 3.2.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:

(i) $x \in \mathrm{Cl}(A)$;

(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;

(iii) існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.

Лекція 12: База та передбаза топології

З властивості $(\mathscr{CO}3)$ оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{ \left\{ \tfrac{1}{n} \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup \left\{ \left\{ \tfrac{1}{n} \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}\right) = \{0\} \cup \left\{ \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\mathrm{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\mathrm{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \mathrm{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості $(\mathscr{CO}3)$ оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин
$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже
$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

Лекція 12: База та передбаза топології

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\mathrm{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\mathrm{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \mathrm{Cl}\left(\bigcup \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин
$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже
$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{C}\!\ell 3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин
$$\mathscr{C}=\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\mid n\in\mathbb{N}\right\}.$$
Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)=\left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\}=\left\{\tfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}.$$
Однак, очевидно, що точка $0\in\mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup\mathscr{C}$, а отже
$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup\mathscr{C}\right)=\operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\right)=\{0\}\cup\left\{\tfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\neq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин
$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже
$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20

На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин
$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже
$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup\left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) \cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність

$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення

$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$

для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$

Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина

$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$

скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що

$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$

Оскільки

$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$

то маємо

$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$

що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність

$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення

$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$

для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$

Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина

$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що

$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$

Оскільки

$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) \cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$

то маємо

$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$

що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Лекція 12: База та передбаза топології

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0=\{s\in\mathcal{S}\mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)=\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)=\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність

$$\mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення

$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right)$$

для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right).$$

Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right)$ існує такий її окіл U, що множина

$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що

$$x\notin \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\right).$$

Оскільки

$$x\in\mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right) = \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\right)\cup \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\right),$$

то маємо

$$x\in\mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\right) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$

що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність

$$\mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення

$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right)$$

для довільного $s \in \mathcal{S}$, а отже виконується включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right).$$

Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right)$ існує такий її окіл U, що множина

$$\mathcal{S}_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що

$$x \notin \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\right).$$

Оскільки

$$x \in \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right) = \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\right) \cup \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\right),$$

то маємо

$$x \in \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\right) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$

що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)=\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0=\{s\in\mathcal{S}\mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)=\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)=\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)=\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0=\{s\in\mathcal{S}\mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)=\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)=\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x \notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x \in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) \cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x \in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. $\blacksquare$

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) \cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s)\subseteq\bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність

$$\operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \operatorname{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення

$$\operatorname{Cl}_X(A_s) \subseteq \operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$

для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \operatorname{Cl}_X(A_s) \subseteq \operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$

Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина

$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$

скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що

$$x\notin\operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$

Оскільки

$$x\in\operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup\operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$

то маємо

$$x\in\operatorname{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\operatorname{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\operatorname{Cl}_X(A_s),$$

що і завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s \neq \varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x \notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0}\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}}\mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 3.2.21

Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність
$$\mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення
$$\mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$$
для довільного $s\in\mathcal{S}$, а отже виконується включення
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big).$$
Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big)$ існує такий її окіл U, що множина
$$\mathcal{S}_0 = \{s\in\mathcal{S} \mid U\cap A_s\neq\varnothing\}$$
скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що
$$x\notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$
Оскільки
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big)\cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$
то маємо
$$x\in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$
що і завершує доведення теореми. ■

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X, τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X, τ) називається *сепаребельним*, якщо (X, τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X, τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in S}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in S}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепарабельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F=\bigcup\mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau))=\min\{|A|\mid \mathrm{Cl}(A)=X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепарабельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau))\leqslant\aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau))\leqslant w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\left\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\right\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал
$$d((X,\tau)) = \min\left\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\right\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Наслідок 3.2.22

Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.

Теорема 3.2.23

Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24

Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25

Для довільного топологічного простору (X,τ) виконується нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})) = w((\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})) = w((\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_u)$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_u)$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_u)$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_u)) = w((\mathbb{R}, \tau_u)) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.26

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$, і топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})) = w((\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27

Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R}, \tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R}, \tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.28

Нехай

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\},$$
$$L_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \subset L$$

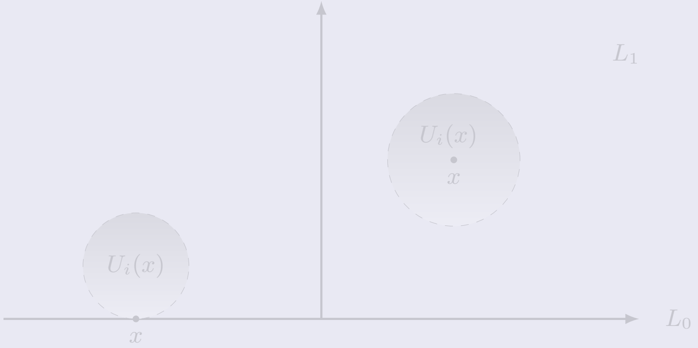
і $L_1 = L \setminus L_0$. Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис.).

Приклад 3.2.28

Нехай

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\},$$
$$L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \subset L$$

і $L_1 = L \setminus L_0$. Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x,r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис.).

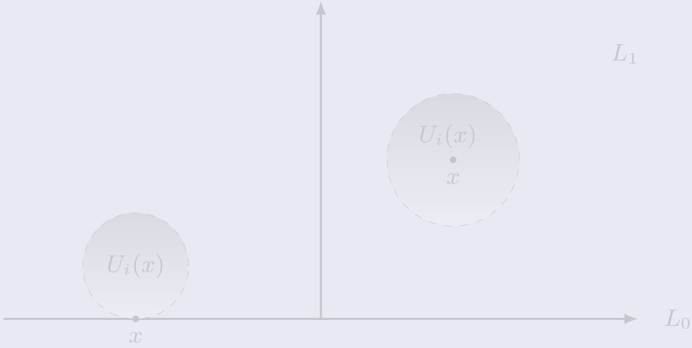


Приклад 3.2.28

Нехай

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\},$$
$$L_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \subset L$$

і $L_1 = L \setminus L_0$. Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис.).

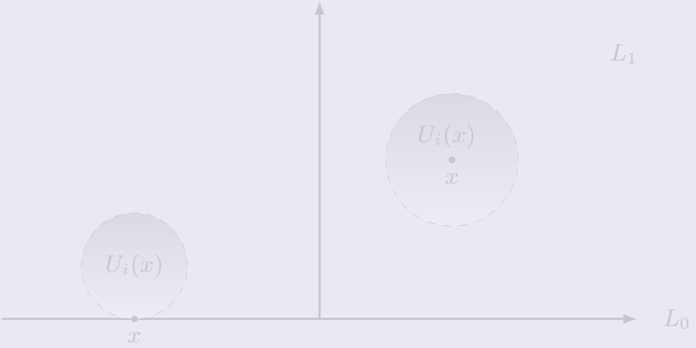


Приклад 3.2.28

Нехай

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\},$$
$$L_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \subset L$$

і $L_1 = L \setminus L_0$. Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис.).

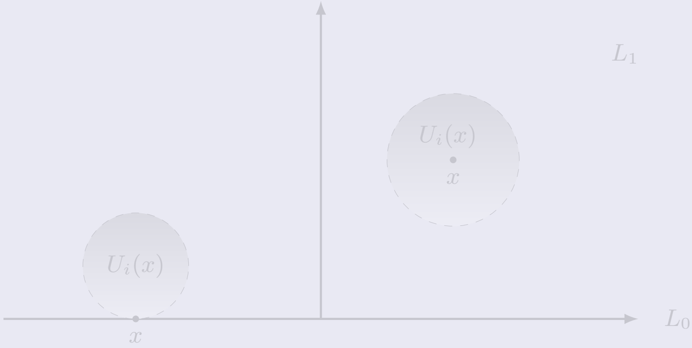


Приклад 3.2.28

Нехай

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\},$$
$$L_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \subset L$$

і $L_1 = L \setminus L_0$. Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис.).

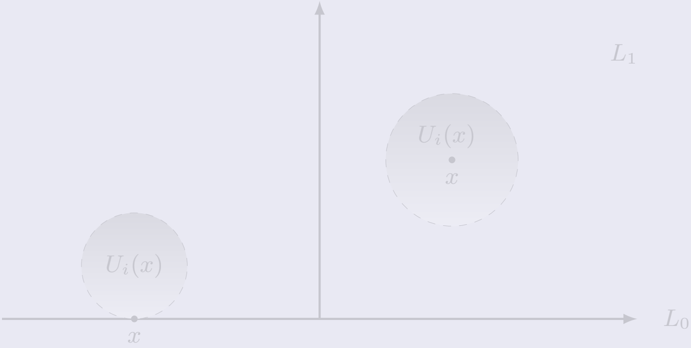


Приклад 3.2.28

Нехай

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\},$$
$$L_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \subset L$$

і $L_1 = L \setminus L_0$. Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x,r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис.).

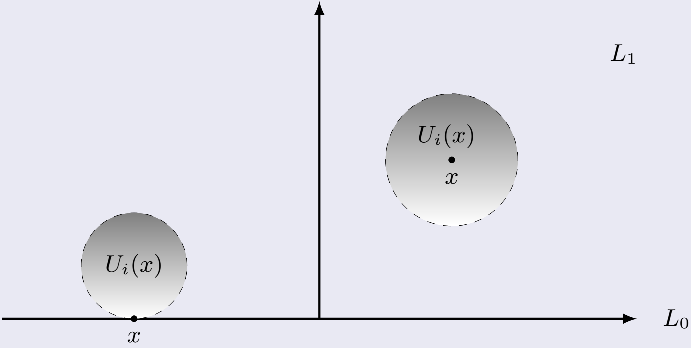


Приклад 3.2.28

Нехай

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\},$$
$$L_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \subset L$$

і $L_1 = L \setminus L_0$. Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис.).



Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\big(x, \tfrac{1}{i}\big) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\big(x, \tfrac{1}{i}\big), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

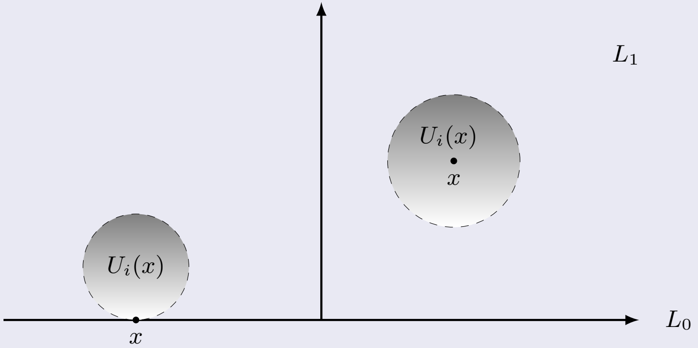
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x,r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



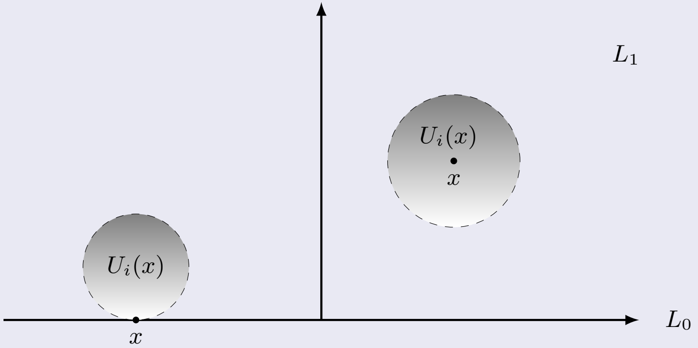
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



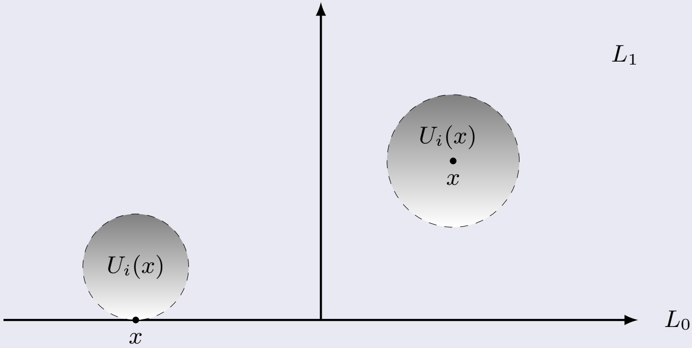
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\big(x, \tfrac{1}{i}\big) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\big(x, \tfrac{1}{i}\big), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



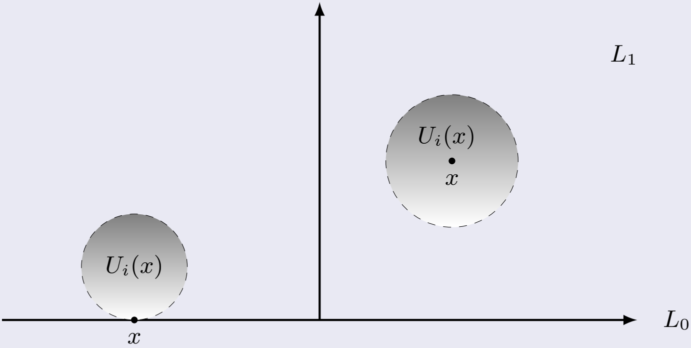
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



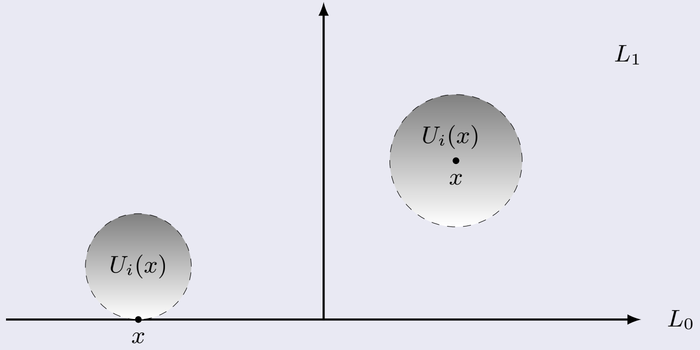
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\big(x, \tfrac{1}{i}\big) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\big(x, \tfrac{1}{i}\big), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



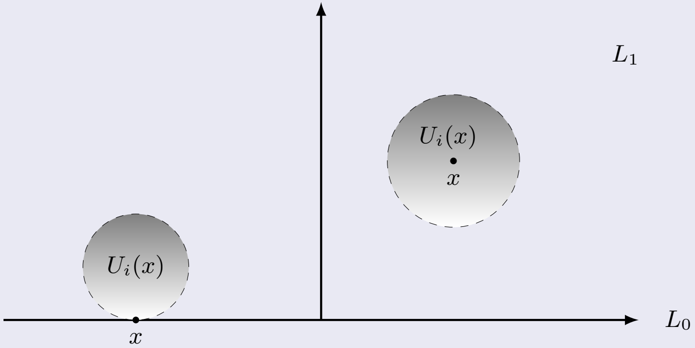
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x,r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



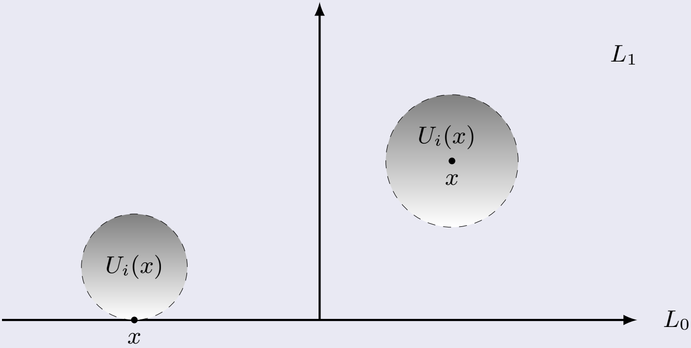
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



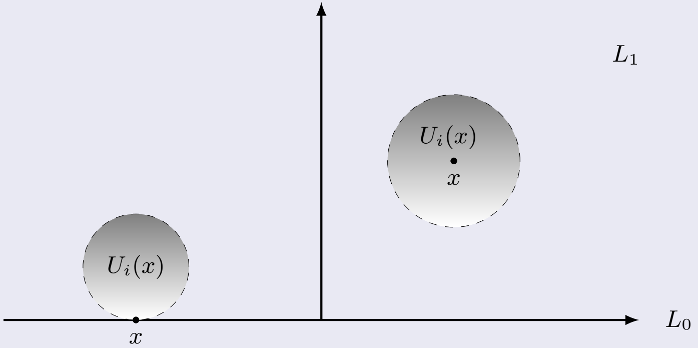
Приклад 3.2.28 (продовження)

Нехай далі

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x, r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right), \qquad i \in \mathbb{N}.$$



Приклад 3.2.28 (продовження)

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я підмножин $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$.

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in L}$.

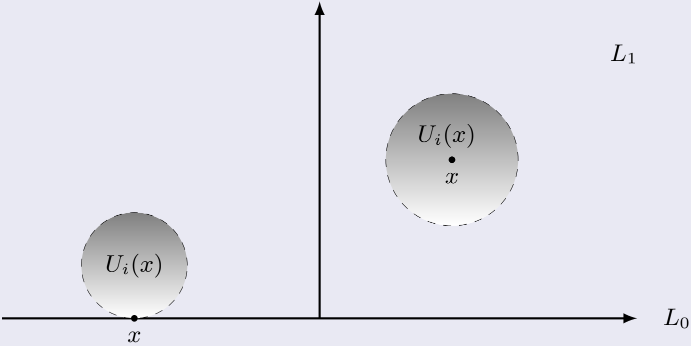
Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.

Приклад 3.2.28 (продовження)

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я підмножин $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$.

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in L}$.

Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.

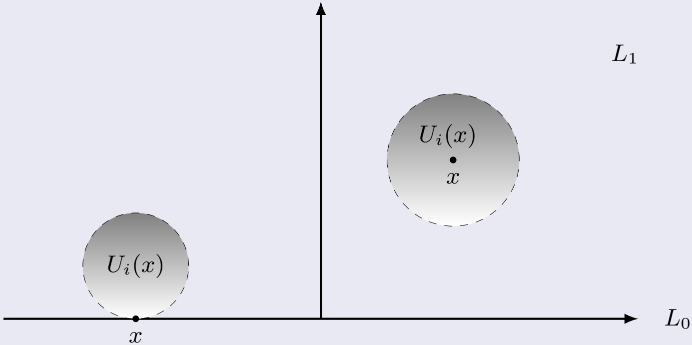


Приклад 3.2.28 (продовження)

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я підмножин $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{B}\mathscr{P}1)$, $(\mathscr{B}\mathscr{P}2)$ і $(\mathscr{B}\mathscr{P}3)$.

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in L}$.

Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.

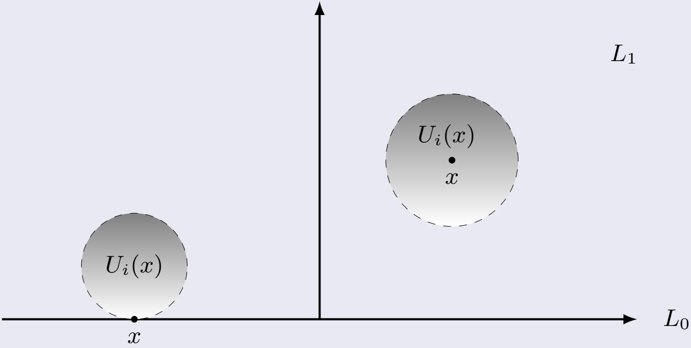


Приклад 3.2.28 (продовження)

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я підмножин $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$.

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in L}$.

Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.

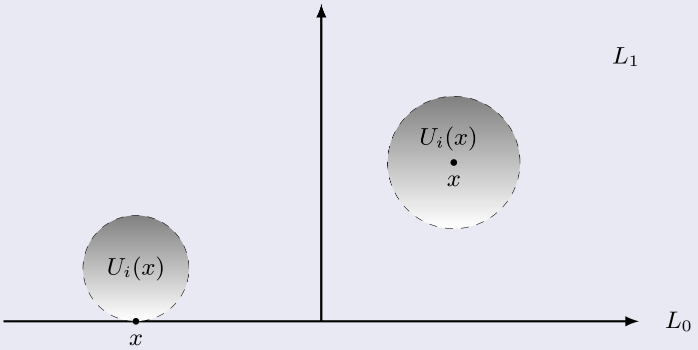


Приклад 3.2.28 (продовження)

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я підмножин $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$.

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in L}$.

Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.

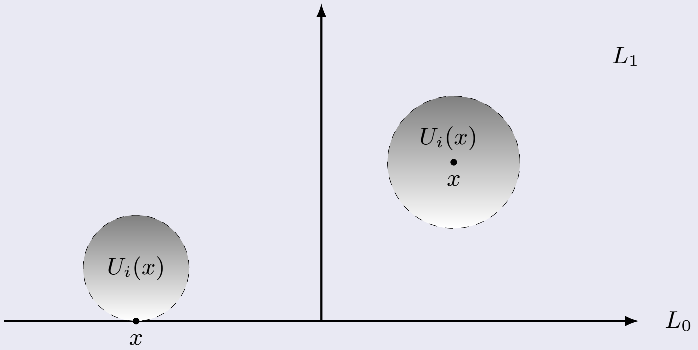


Приклад 3.2.28 (продовження)

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я підмножин $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$.

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in L}$.

Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.

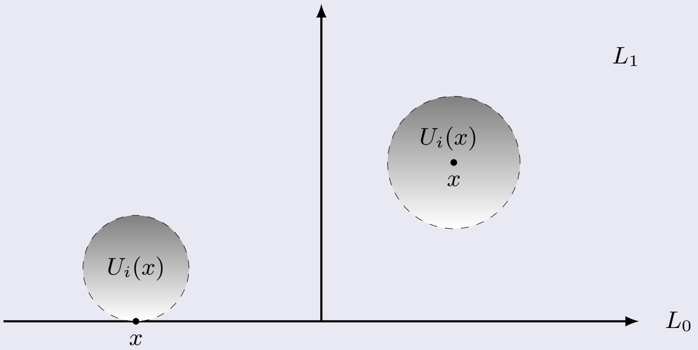


Приклад 3.2.28 (продовження)

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я підмножин $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{B}\mathscr{P}1)$, $(\mathscr{B}\mathscr{P}2)$ і $(\mathscr{B}\mathscr{P}3)$.

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in L}$.

Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.



Вправа 3.2.6

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in L}$, означена в прикладі 3.2.28, де $\mathscr{B}(x)=\{U_i(x)\mid i\in\mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$, а також для площини Немицького виконуються умови:[a]

$$d(L)=\chi(L)=\aleph_0 \qquad \text{і} \qquad w(L)>\aleph_0.$$

[a]Надалі, якщо зрозуміло про який топологічний простір X йде мова, то вагу, характер і щільність цього простору X будемо позначати через $w(X)$, $\chi(X)$ і $d(X)$, відповідно.

Вправа 3.2.7

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}_{\mathrm{u}}(x)\}_{x\in\mathbb{I}}$, де

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}}(x)=\begin{cases}\{U_\varepsilon(0)=[0,\varepsilon)\mid 0<\varepsilon<1\}, & \text{якщо } x=0;\\ \{U_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\mid 0<x-\varepsilon<x+\varepsilon<1\}, & \text{якщо } 0<x<1;\\ \{U_\varepsilon(1)=(1-\varepsilon,1]\mid 0<\varepsilon<1\}, & \text{якщо } x=1,\end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$, а також є базою звичайної (евклідової) топології τ_{u} на одиничному замкненому інтервалі $\mathbb{I}$.

Вправа 3.2.6

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in L}$, означена в прикладі 3.2.28, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$, а також для площини Немицького виконуються умови:[a]

$$d(L) = \chi(L) = \aleph_0 \qquad \text{і} \qquad w(L) > \aleph_0.$$

[a] Надалі, якщо зрозуміло про який топологічний простір X йде мова, то вагу, характер і щільність цього простору X будемо позначати через $w(X)$, $\chi(X)$ і $d(X)$, відповідно.

Вправа 3.2.7

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}_{\mathrm{u}}(x)\}_{x\in\mathbb{I}}$, де

$$\mathscr{B}_{\mathrm{u}}(x) = \begin{cases} \{U_\varepsilon(0)=[0,\varepsilon) \mid 0 < \varepsilon < 1\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{U_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid 0<x-\varepsilon<x+\varepsilon < 1\}, & \text{якщо } 0<x<1; \\ \{U_\varepsilon(1)=(1-\varepsilon, 1] \mid 0 < \varepsilon < 1\}, & \text{якщо } x = 1, \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$, а також є базою звичайної (евклідової) топології τ_{u} на одиничному замкненому інтервалі $\mathbb{I}$.

Вправа 3.2.6

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in L}$, означена в прикладі 3.2.28, де $\mathscr{B}(x)=\{U_i(x)\mid i\in\mathbb{N}\}$, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$, а також для площини Немицького виконуються умови:[a]

$$d(L)=\chi(L)=\aleph_0 \qquad \text{і} \qquad w(L)>\aleph_0.$$

[a] Надалі, якщо зрозуміло про який топологічний простір X йде мова, то вагу, характер і щільність цього простору X будемо позначати через $w(X)$, $\chi(X)$ і $d(X)$, відповідно.

Вправа 3.2.7

Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}(x)\}_{x\in\mathbb{I}}$, де

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}(x)=\begin{cases}\{U_\varepsilon(0)=[0,\varepsilon)\mid 0<\varepsilon<1\}, & \text{якщо } x=0;\\ \{U_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\mid 0<x-\varepsilon<x+\varepsilon<1\}, & \text{якщо } 0<x<1;\\ \{U_\varepsilon(1)=(1-\varepsilon,1]\mid 0<\varepsilon<1\}, & \text{якщо } x=1,\end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}3)$, а також є базою звичайної (евклідової) топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на одиничному замкненому інтервалі $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\mathbb{R}^2, \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 4\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\mathbb{R}^2, \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - \varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \{(0, 0)\}$.

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - \varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \left\{(0, 0)\right\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;
(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - \varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \{(0, 0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;
(ii) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;
(iii) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;
(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\mathbb{R}^2, \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$;

(iv) $D = \{(0,0)\}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\}$$

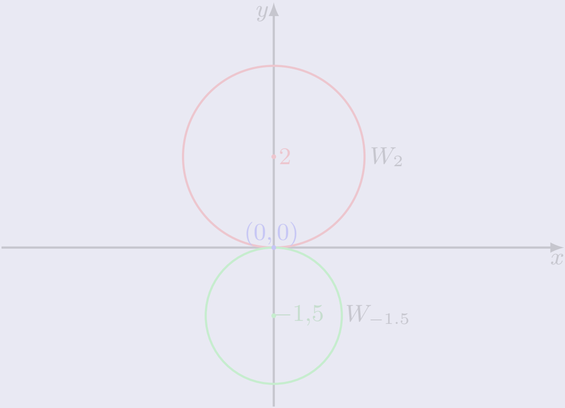
— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0,\varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0, \varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

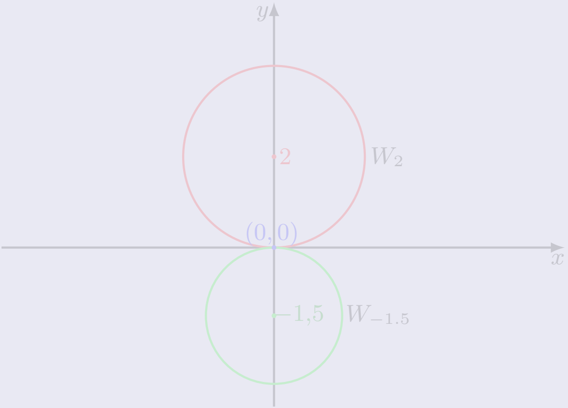


Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - \varepsilon)^2 = \varepsilon^2\right\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0, \varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

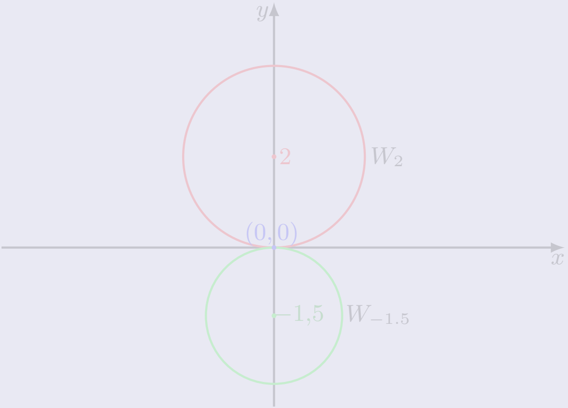


Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0,\varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

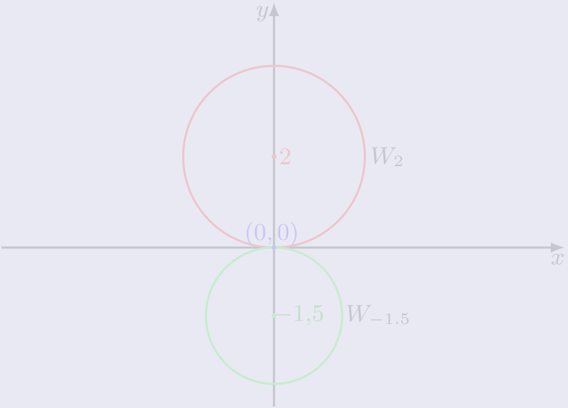


Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - \varepsilon)^2 = \varepsilon^2\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0, \varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

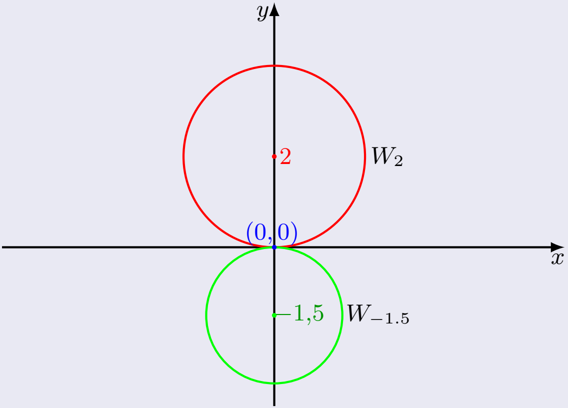


Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0,\varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

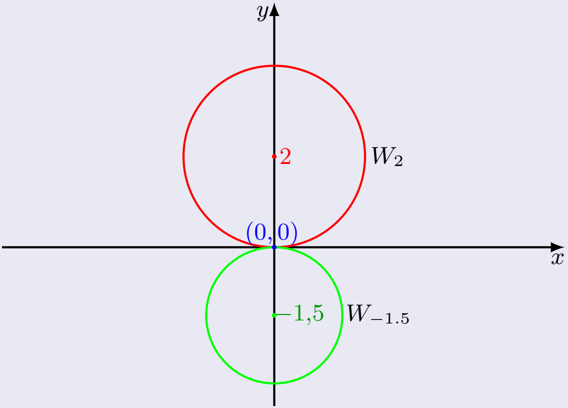


Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0,\varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

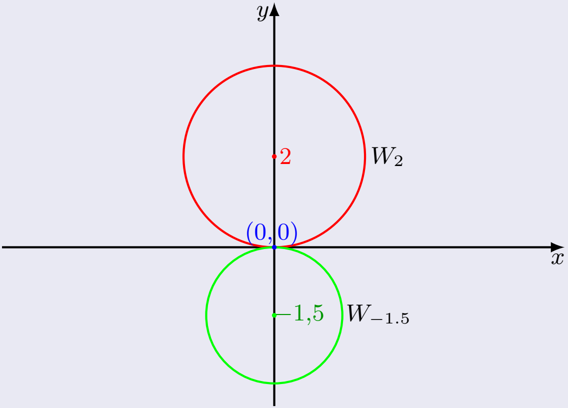


Приклад 3.2.29 (продовження)

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис.). Множина

$$W_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0,\varepsilon)$, причому $\varepsilon \neq 0$.

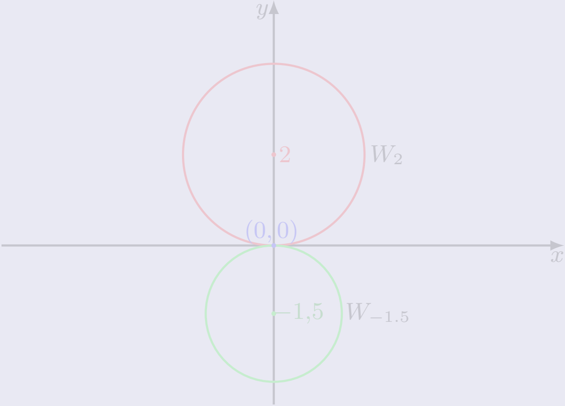


Приклад 3.2.29 (продовження)

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2 \cap W_{-1,5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова $(\mathscr{B}1)$ твердження 3.2.4.

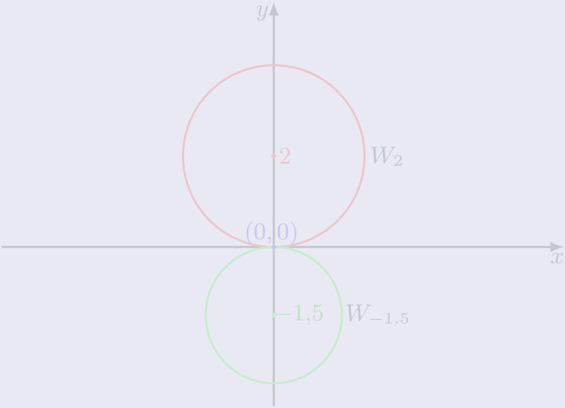
Приклад 3.2.29 (продовження)

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2 \cap W_{-1,5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова $(\mathscr{B}1)$ твердження 3.2.4.



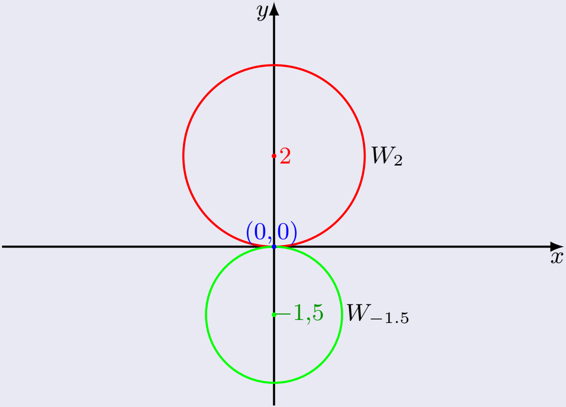
Приклад 3.2.29 (продовження)

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2 \cap W_{-1,5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова $(\mathscr{B}1)$ твердження 3.2.4.



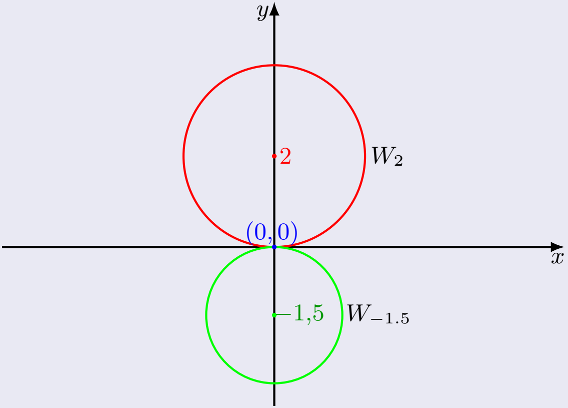
Приклад 3.2.29 (продовження)

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2 \cap W_{-1,5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова $(\mathscr{B}1)$ твердження 3.2.4.



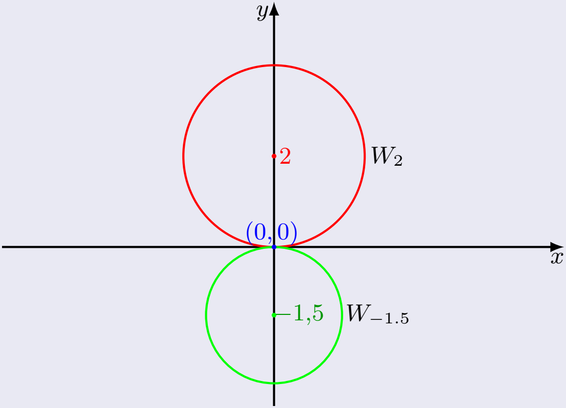
Приклад 3.2.29 (продовження)

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2 \cap W_{-1,5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова ($\mathscr{B}1$) твердження 3.2.4.



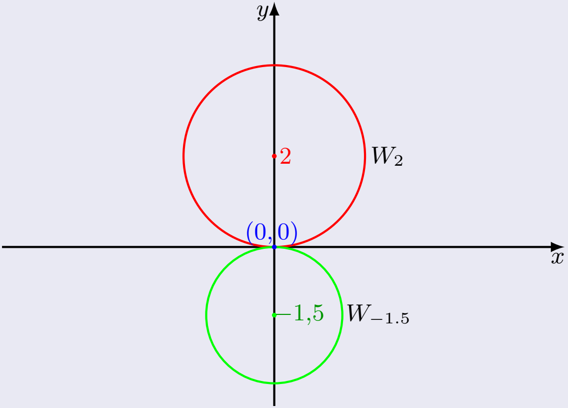
Приклад 3.2.29 (продовження)

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2 \cap W_{-1,5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова $(\mathscr{B}1)$ твердження 3.2.4.



Приклад 3.2.29 (продовження)

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2 \cap W_{-1,5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова $(\mathscr{B}1)$ твердження 3.2.4.

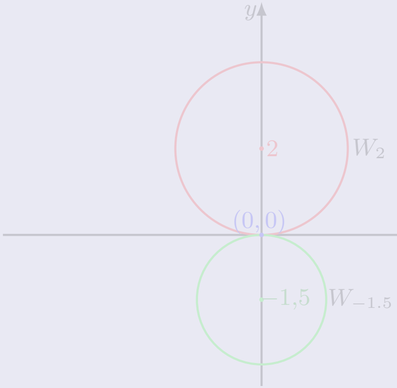


Приклад 3.2.29 (продовження)

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x, y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x, 0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

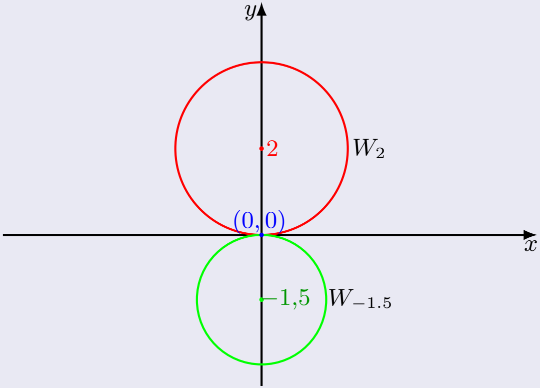
Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



Приклад 3.2.29 (продовження)

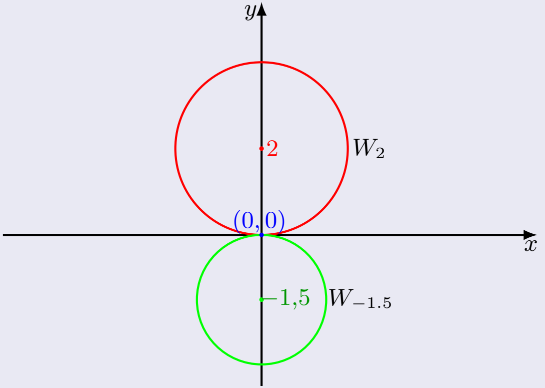
Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$.

Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x, y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x, 0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



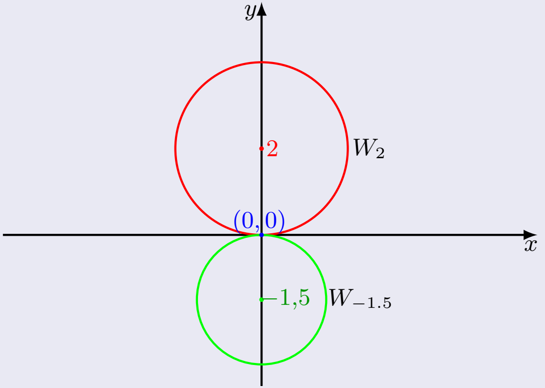
Приклад 3.2.29 (продовження)

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x, y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x, 0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



Приклад 3.2.29 (продовження)

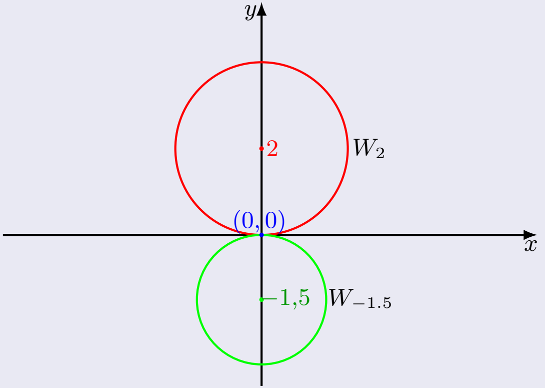
Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



Приклад 3.2.29 (продовження)

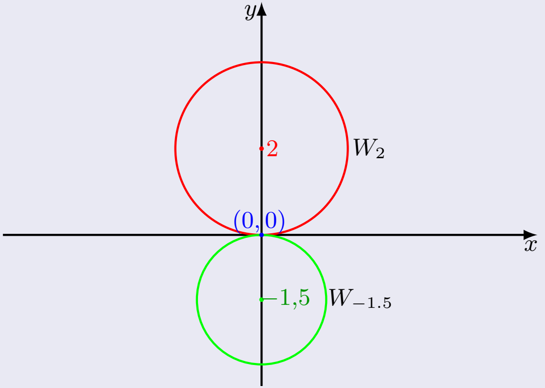
Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$.

Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



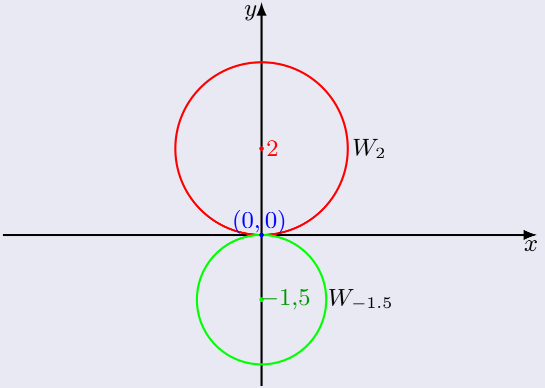
Приклад 3.2.29 (продовження)

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



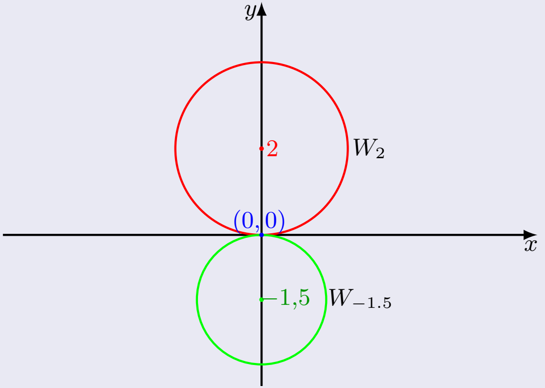
Приклад 3.2.29 (продовження)

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



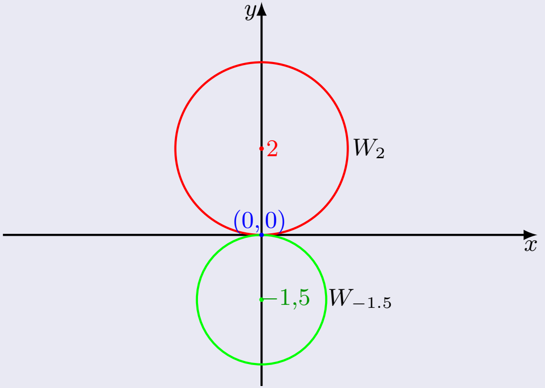
Приклад 3.2.29 (продовження)

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



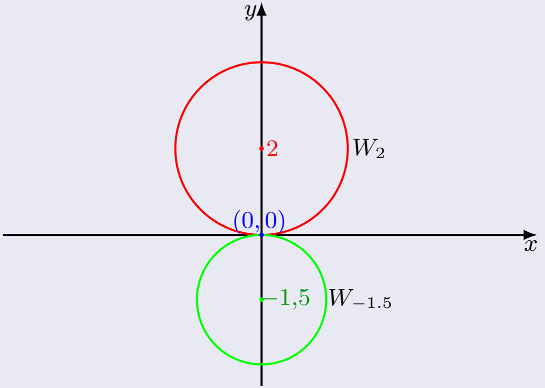
Приклад 3.2.29 (продовження)

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x, y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x, 0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.



Приклад 3.2.29 (продовження)

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P} \cup \{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови $(\mathscr{B}1)$ і $(\mathscr{B}2)$ твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y \neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x \neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.

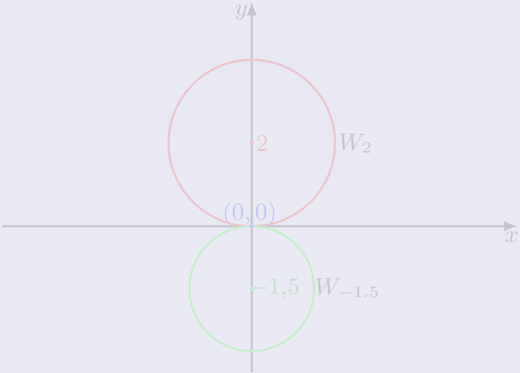


Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon,\varepsilon)\in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1}\cap W_{\varepsilon_2}=\{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U}=\{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2,\tau)$, що для довільного числа $\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ існує відкрита множина $U_i\in\mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon,\varepsilon)\in U_i\subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2,\tau)$ не має зліченної бази.

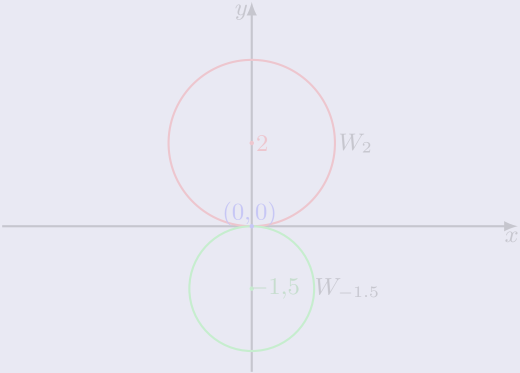
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon,\varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon,\varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



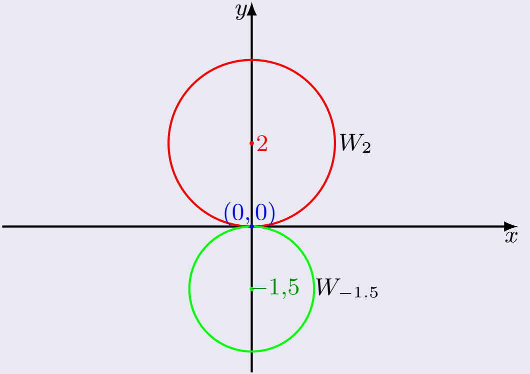
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon, \varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незлічення та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon, \varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



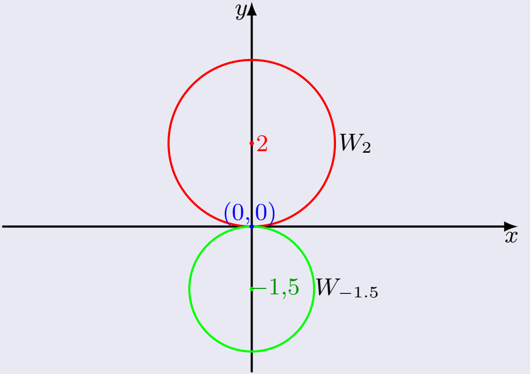
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon, \varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon, \varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



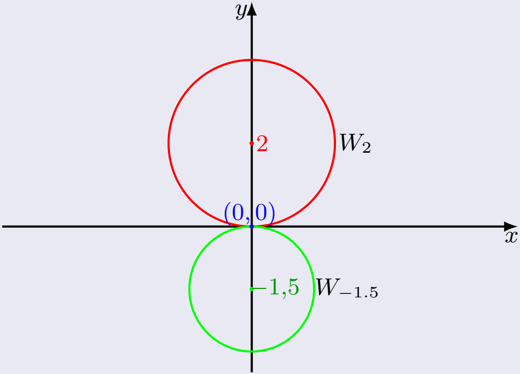
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon, \varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon, \varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



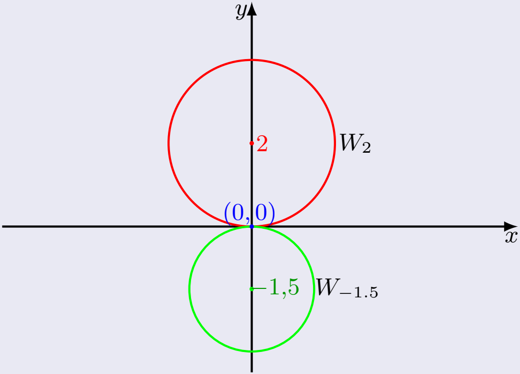
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon, \varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon, \varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



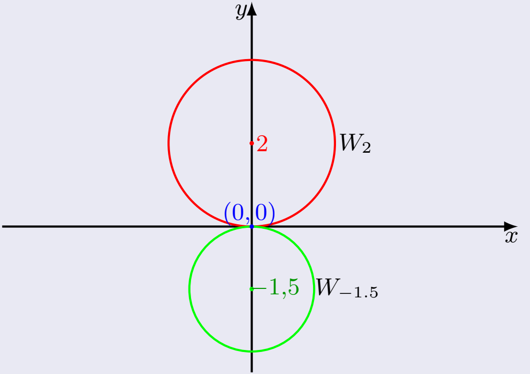
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon, \varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon, \varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



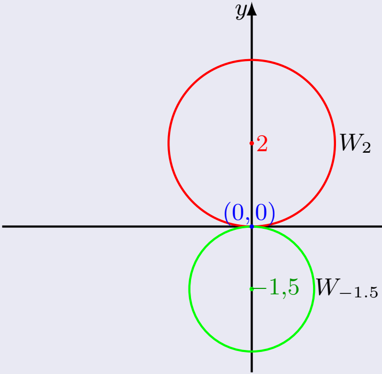
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon,\varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon,\varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



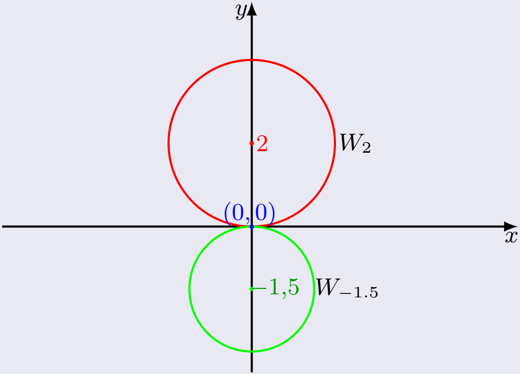
Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon,\varepsilon) \in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1} \cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, що для довільного числа $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує відкрита множина $U_i \in \mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon,\varepsilon) \in U_i \subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не має зліченної бази.



Приклад 3.2.29 (продовження)

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon,\varepsilon)\in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1}\cap W_{\varepsilon_2}=\{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U}=\{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2,\tau)$, що для довільного числа $\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ існує відкрита множина $U_i\in\mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon,\varepsilon)\in U_i\subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2,\tau)$ не має зліченної бази.



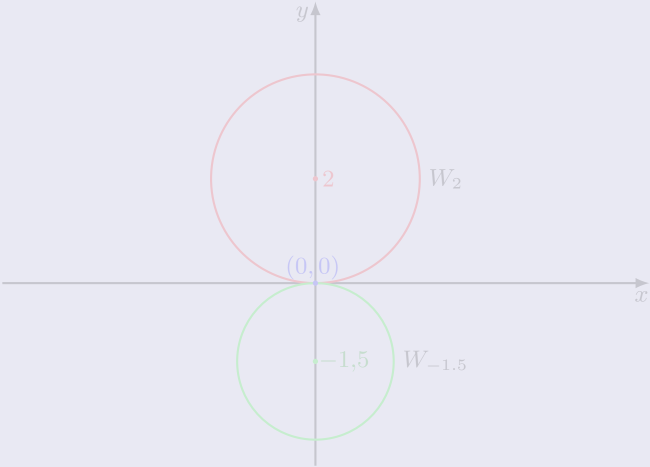
Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.29 (продовження)

(3) Зауважимо, що кожен елемент бази $\mathscr{B}$ містить точку $(0,0)$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що множина $\{(0,0)\}$ щільна в просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, а отже топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним.

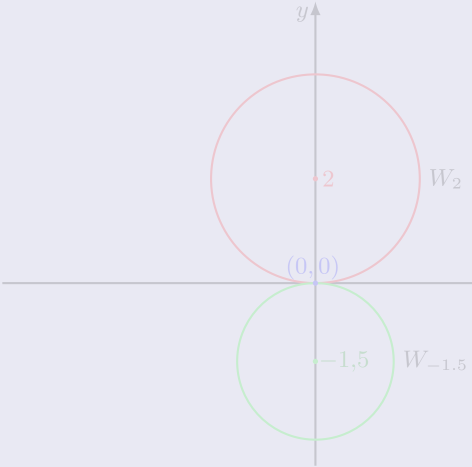
Приклад 3.2.29 (продовження)

(3) Зауважимо, що кожен елемент бази $\mathscr{B}$ містить точку $(0,0)$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що множина $\{(0,0)\}$ щільна в просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, а отже топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним.



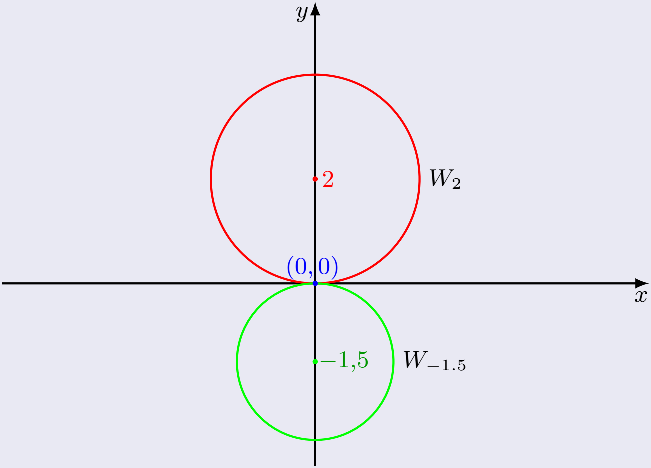
Приклад 3.2.29 (продовження)

(3) Зауважимо, що кожен елемент бази $\mathscr{B}$ містить точку $(0,0)$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що множина $\{(0,0)\}$ щільна в просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, а отже топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним.



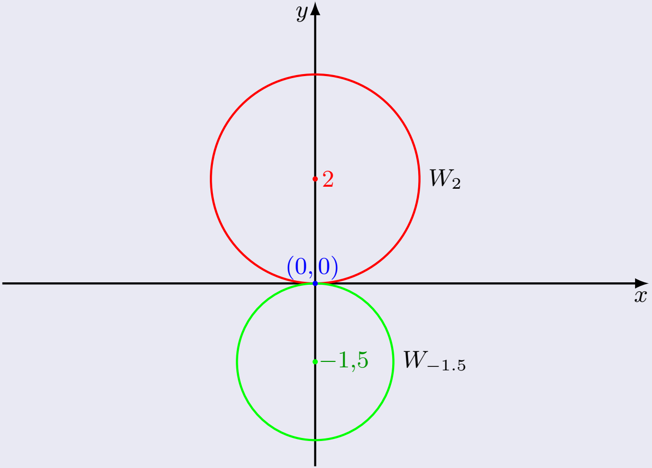
Приклад 3.2.29 (продовження)

(3) Зауважимо, що кожен елемент бази $\mathscr{B}$ містить точку $(0,0)$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що множина $\{(0,0)\}$ щільна в просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, а отже топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним.



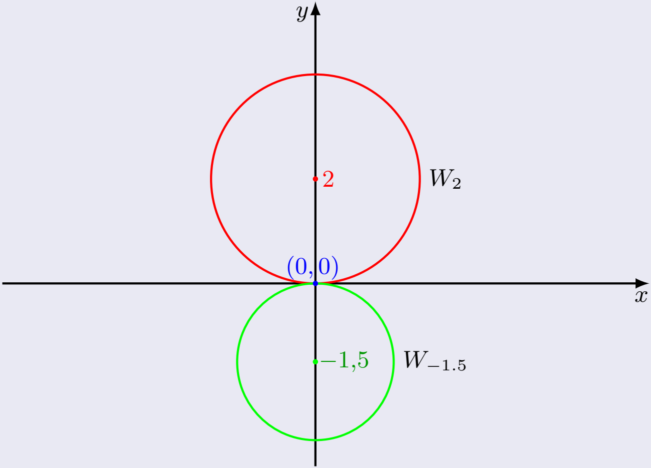
Приклад 3.2.29 (продовження)

(3) Зауважимо, що кожен елемент бази $\mathscr{B}$ містить точку $(0,0)$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що множина $\{(0,0)\}$ щільна в просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, а отже топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним.



Приклад 3.2.29 (продовження)

(3) Зауважимо, що кожен елемент бази $\mathscr{B}$ містить точку $(0,0)$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що множина $\{(0,0)\}$ щільна в просторі $(\mathbb{R}^2,\tau)$, а отже топологічний простір $(\mathbb{R}^2,\tau)$ є сепарабельним.



Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X,τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X,τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X,τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X,τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X,τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X,τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X,τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X,τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X,τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X,τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X,τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X,τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\operatorname{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\operatorname{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X,τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X,τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X,τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X,τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[a]

[a]Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше, будемо позначати через $\overline{A}$.

Приклад 3.2.29 (продовження)

Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i)

(ii)

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv)

(i) (ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

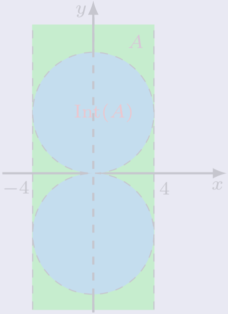
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i)

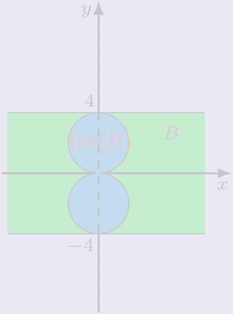
(ii)

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv)



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

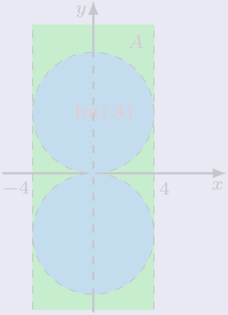
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i)

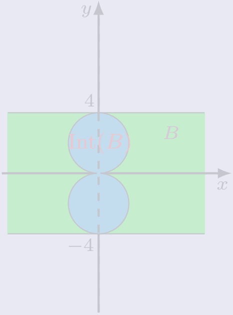
(ii)

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv)



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

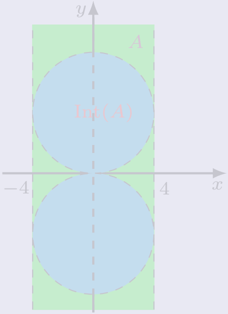
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\}\cup\{(0,0)\}$, $\overline{A}=\mathbb{R}^2$, де $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

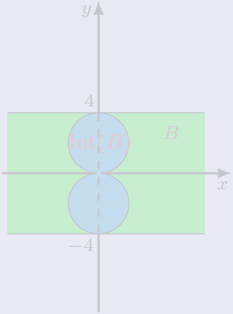
(ii) $\mathrm{Int}(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$, $\overline{B}=\mathbb{R}^2$, де $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C)=\{(0,0)\}$, $\overline{C}=\mathbb{R}^2$, де $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D)=\{(0,0)\}$, $\overline{D}=\mathbb{R}^2$, де $D=\{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

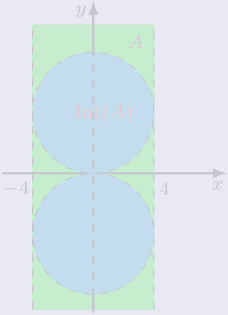
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

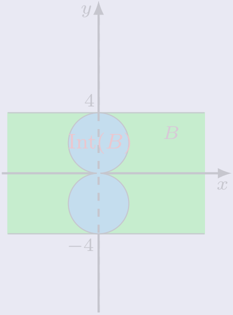
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

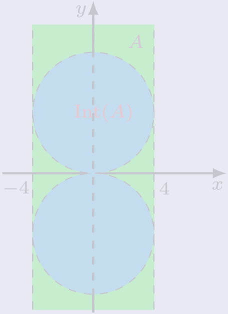
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$,
$\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

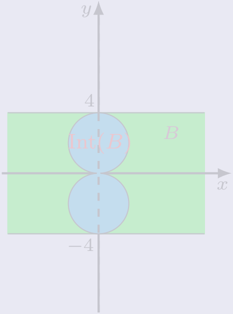
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$,
$\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

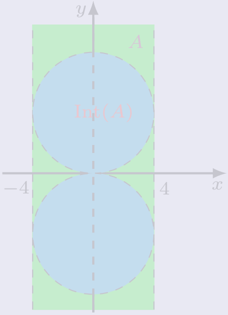
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(*i*) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

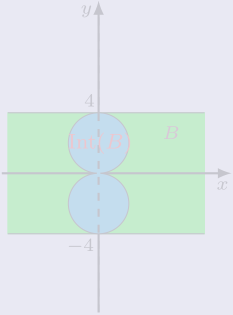
(*ii*) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(*iii*) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(*iv*) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

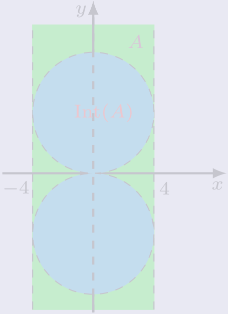
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

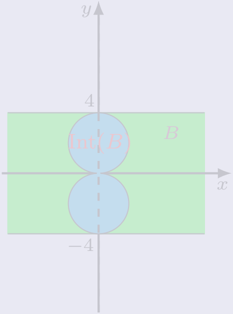
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

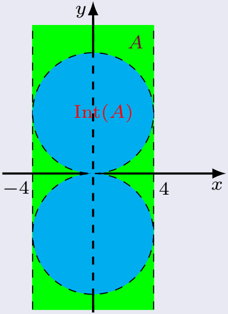
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

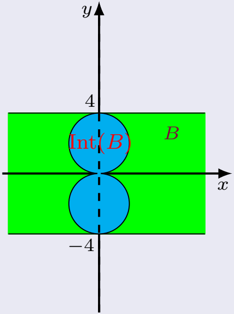
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

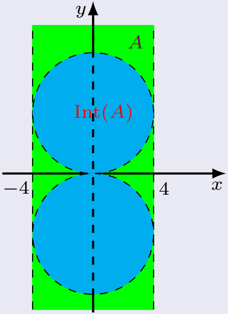
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$,
$\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

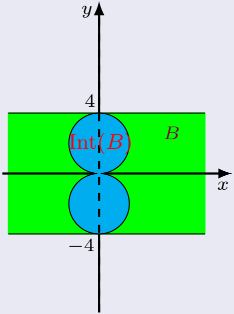
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$,
$\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.29 (продовження)

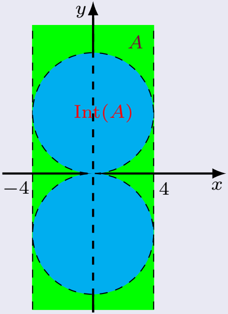
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

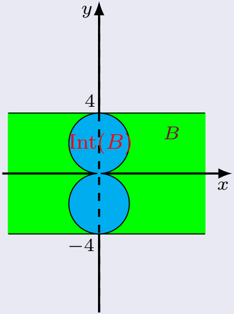
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.29 (продовження)

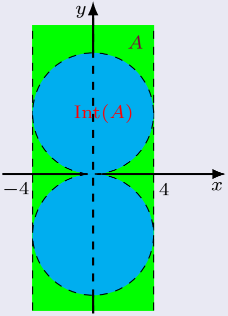
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

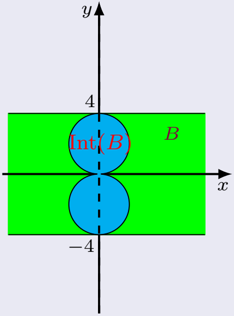
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)

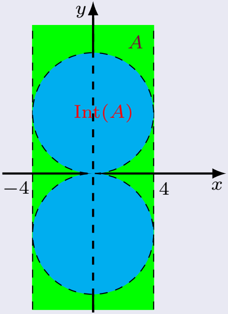


(ii)

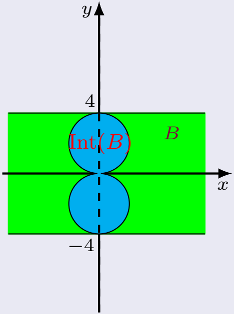
Приклад 3.2.29 (продовження)

Використавши попередні два зауваження отримуємо:

- (i) $\operatorname{Int}(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A}=\mathbb{R}^2$, де $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));
- (ii) $\operatorname{Int}(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$, $\overline{B}=\mathbb{R}^2$, де $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));
- (iii) $\operatorname{Int}(C)=\{(0,0)\}$, $\overline{C}=\mathbb{R}^2$, де $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;
- (iv) $\operatorname{Int}(D)=\{(0,0)\}$, $\overline{D}=\mathbb{R}^2$, де $D=\{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

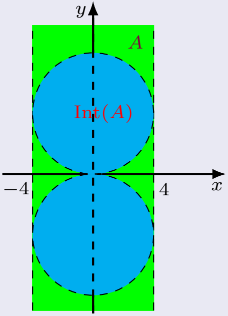
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\}\cup\{(0,0)\}$, $\overline{A}=\mathbb{R}^2$, де $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

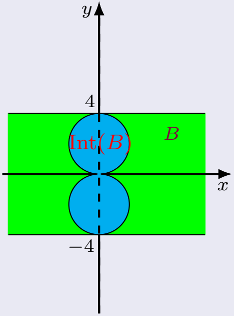
(ii) $\mathrm{Int}(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$, $\overline{B}=\mathbb{R}^2$, де $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C)=\{(0,0)\}$, $\overline{C}=\mathbb{R}^2$, де $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D)=\{(0,0)\}$, $\overline{D}=\mathbb{R}^2$, де $D=\{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

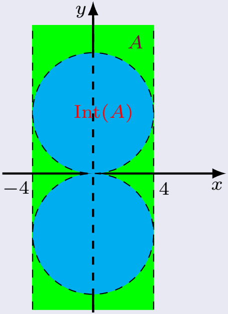
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$,
$\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

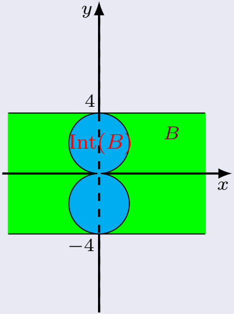
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$,
$\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

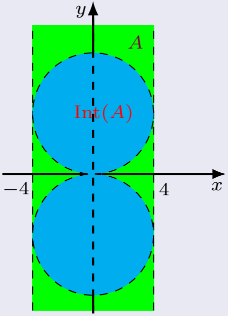
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\operatorname{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

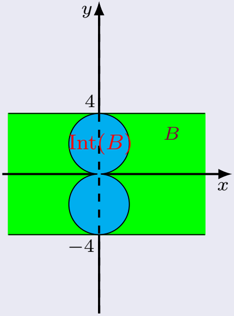
(ii) $\operatorname{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\operatorname{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\operatorname{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.29 (продовження)

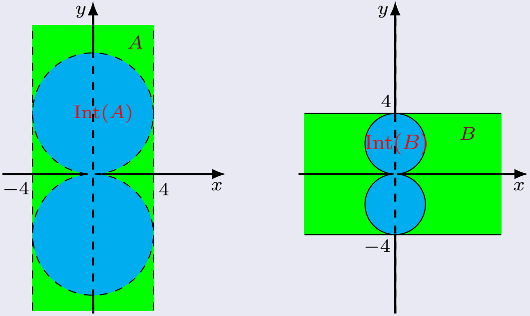
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\right\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\right\}$ (див. рис. (i));

(ii) $\mathrm{Int}(B) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\right\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\right\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\right\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i) (ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

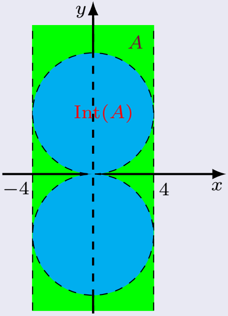
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-4)^2 < 16\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+4)^2 < 16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

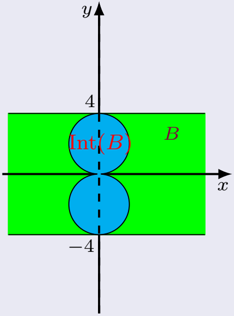
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

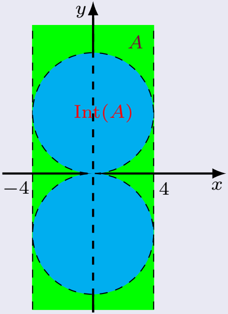
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

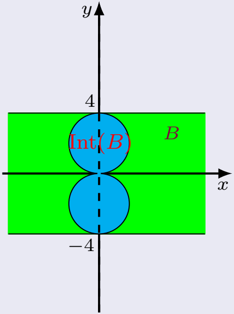
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

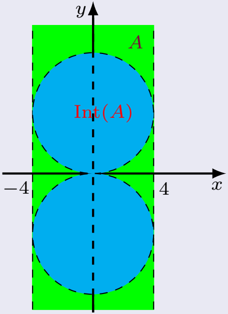
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

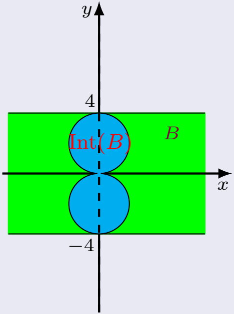
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

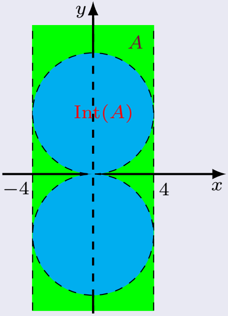
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<4\}$ (див. рис. (i));

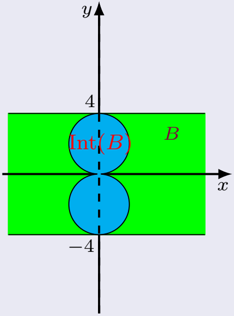
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.29 (продовження)

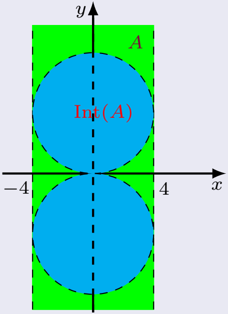
Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-4)^2<16\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+4)^2<16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. (i));

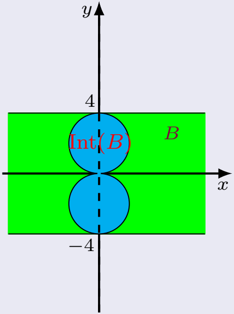
(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. (ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.



(i)



(ii)

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ – скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ – нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ – скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ – нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A - \text{скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A - \text{нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A - \text{скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A - \text{нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A \text{ — скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A \text{ — нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A \text{ — нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A - \text{скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A - \text{нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A - \text{скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A - \text{нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A - \text{скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A - \text{нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A - \text{скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A - \text{нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A - \text{скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A - \text{нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A - \text{скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A - \text{нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Приклад 3.2.30

Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X,τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X,τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X,τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X,\tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ tє передбазою топологічного простору (X,τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A - \text{скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A - \text{нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\operatorname{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A - \text{скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A - \text{нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X,τ) перетинаються.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має злічену базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x > -1\}$;

(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;

(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geq -1\}$;

(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;

(v) $E = \{(1,2)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;

(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;

(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \big\{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\big\} \cup \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;

(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;

(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$;

(ii) $B = \{(x, y) \mid y = (x-1)^2\}$;

(iii) $C = \{(x, y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;

(iv) $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$;

(v) $E = \{(1, 1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x, y) \mid y = (x - 1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x, y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1, 1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;

(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;

(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$;
(ii) $B = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \big\{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;

(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;

(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;

(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;

(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x, y) \mid y = (x-1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x, y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1, 1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \big\{\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\left\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\right\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$;
(ii) $B = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\}$;
(iii) $C = \left\{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\right\}$;
(iv) $D = \left\{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\right\}$;
(v) $E = \left\{(1,1)\right\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\left\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\right\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?

(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?

(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$;

(ii) $B = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\}$;

(iii) $C = \left\{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\right\}$;

(iv) $D = \left\{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\right\}$;

(v) $E = \left\{(1,1)\right\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\left\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\right\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1,1)\}$.

Вправа 3.2.8

Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31

На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.
Перевірити:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $\left(\mathbb{R}^2, \tau\right)$:

(i) $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$;
(ii) $B = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\}$;
(iii) $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1,1)\}$.

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{\left\{(x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$.

(i)

(ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

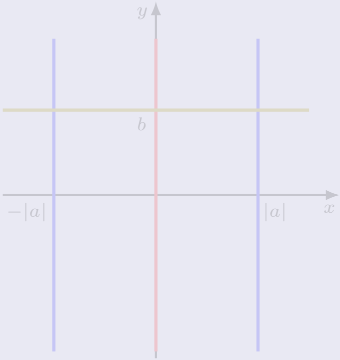
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{\left\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i)

(ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

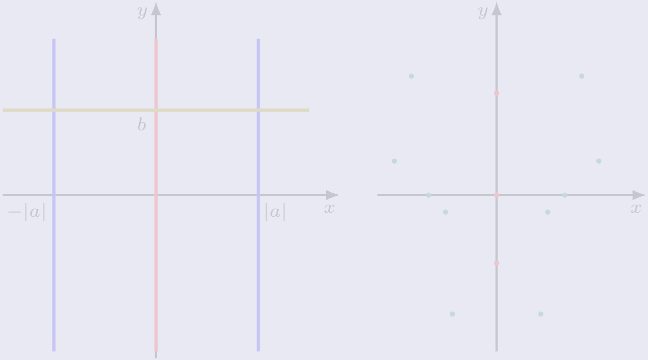
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{ \left\{ (x,y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R} \right\} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i) (ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x,y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

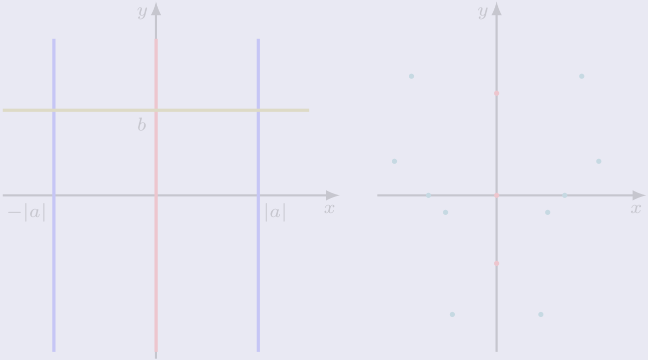
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{\left\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i) (ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

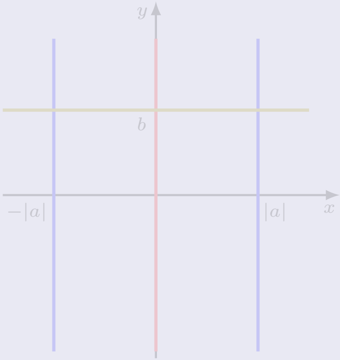
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{ \left\{ (x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R} \right\} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i)

(ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{\left\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

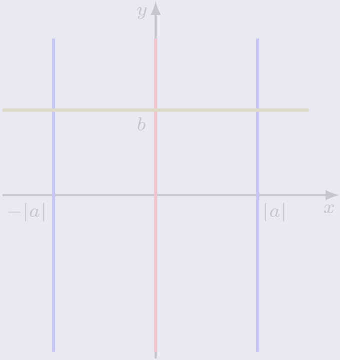
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{ \left\{ (x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R} \right\} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i)

(ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

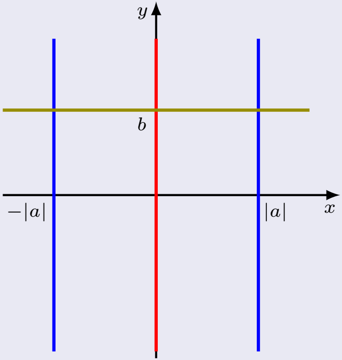
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

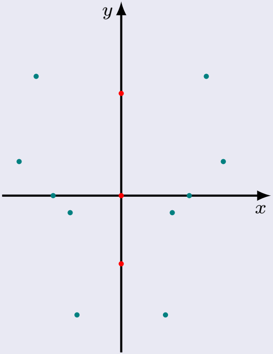
Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{ \left\{ (x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R} \right\} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i)



(ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

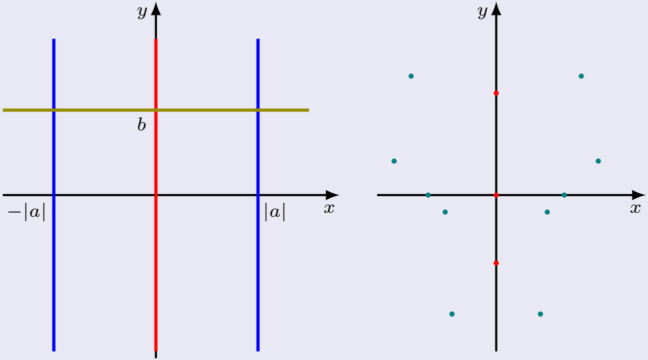
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{ \left\{ (x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R} \right\} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i) (ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{ \{ (x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R} \} \mid b \in \mathbb{R} \}$$

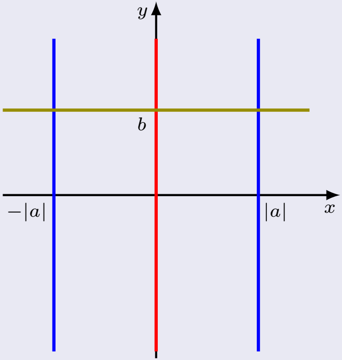
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

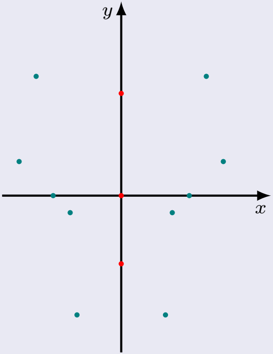
Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{ \left\{ (x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R} \right\} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i)



(ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

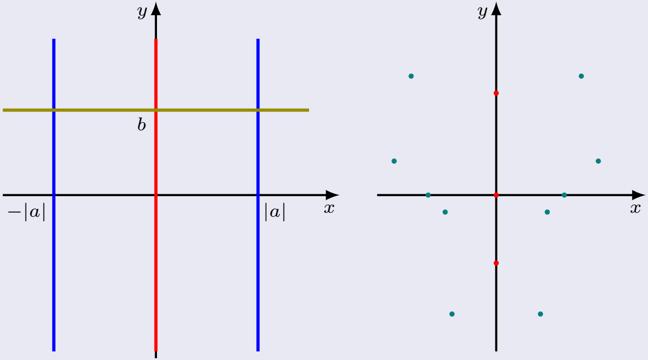
є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \left\{\left\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\right\} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. (i) вони зображені синім кольором), і пряма $x = 0$,



(i) (ii)

а елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. (i) вони зображені оливковим кольором).

Приклад 3.2.31 (продовження)

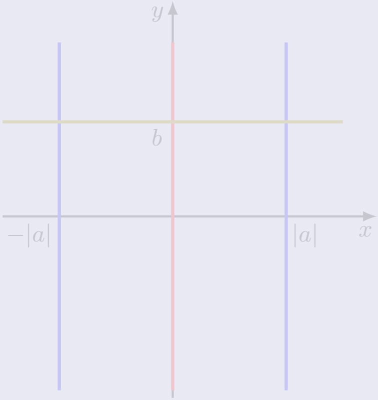
Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).

(i)

(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).

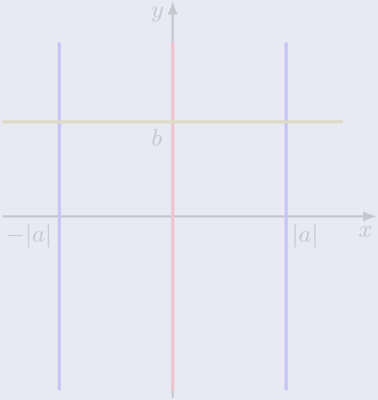


(i)

(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).

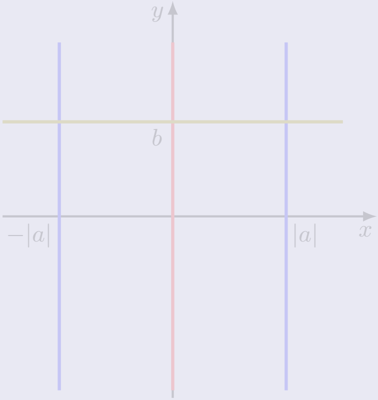


(i)

(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).

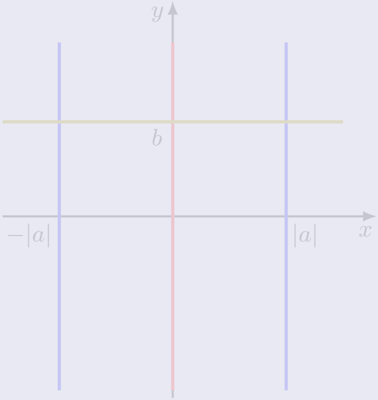


(i)

(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).

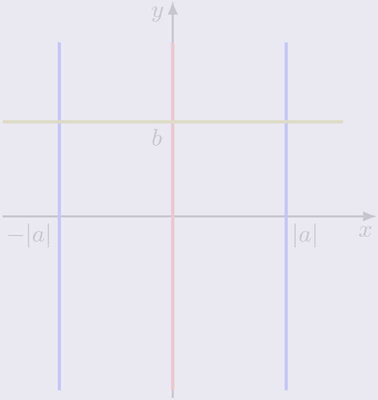


(i)

(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).

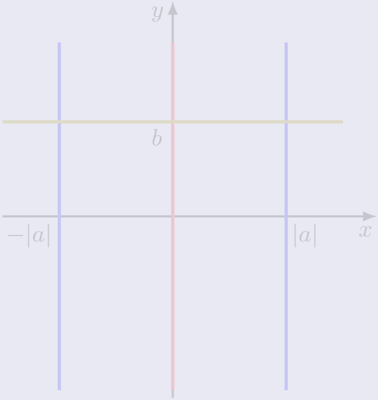


(i)

(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).

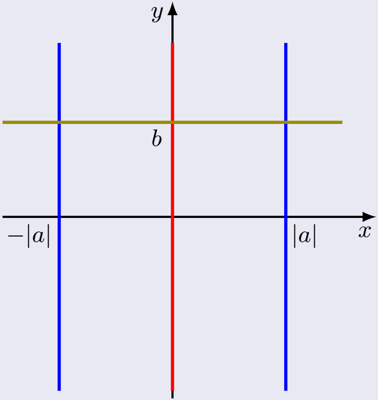


(i)

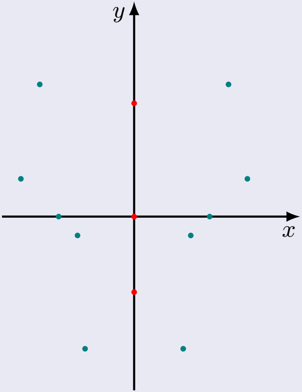
(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова $(\mathscr{B}1)$).



(i)



(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B}=\{U_1\cap U_2 \mid U_1\in\mathscr{P}_1, U_2\in\mathscr{P}_2\}=\{\{(-a,b),(a,b)\}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y)=\begin{cases}\{(x,y)\}, & \text{якщо} \quad x=0;\\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо} \quad x\neq 0.\end{cases} \tag{1}$$

(i)

(ii)

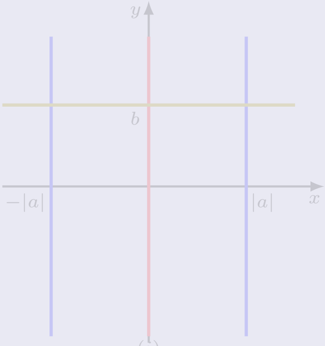
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



(i)

(ii)

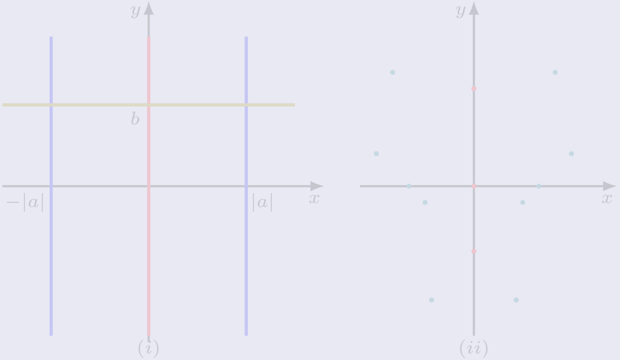
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



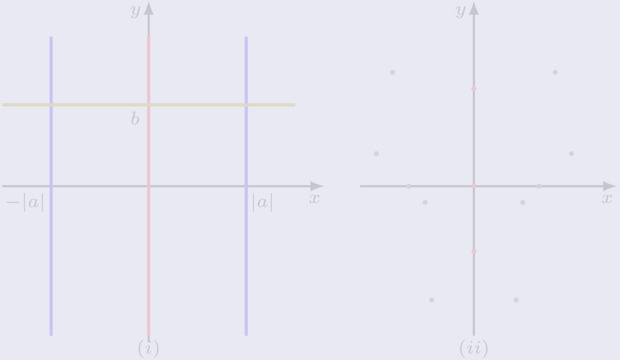
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$



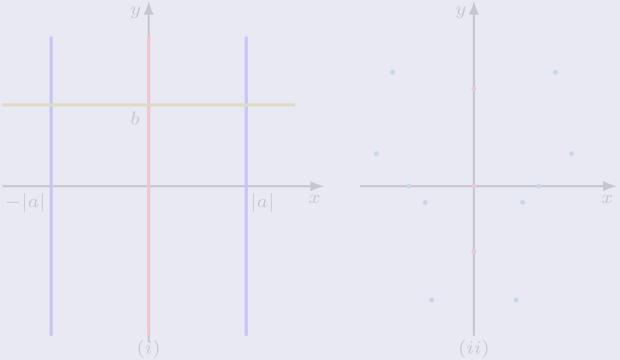
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



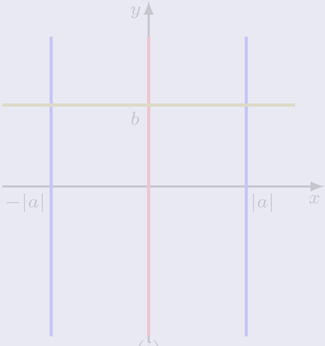
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



(i)

(ii)

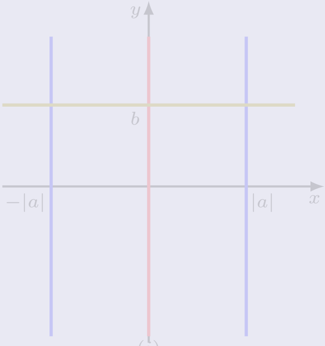
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо} \quad x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо} \quad x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



(i)

(ii)

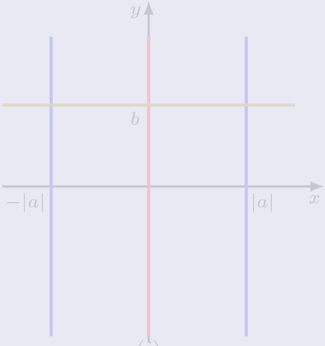
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \qquad (1)$$



(i)

(ii)

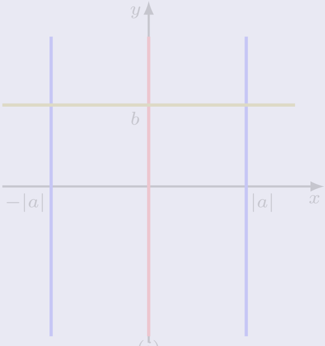
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \qquad (1)$$



(i)

(ii)

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

(i) (ii)

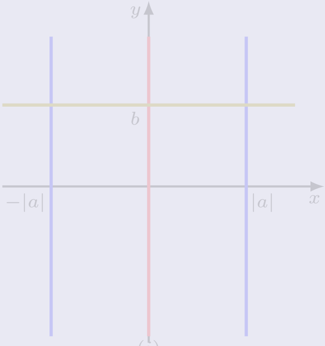
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

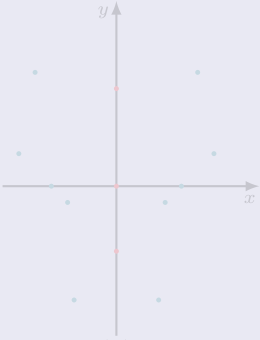
$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



(i)



(ii)

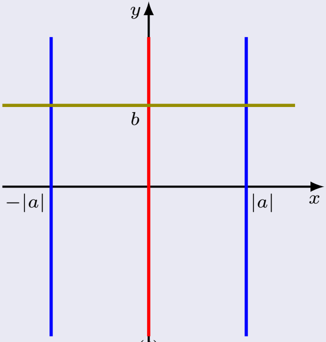
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

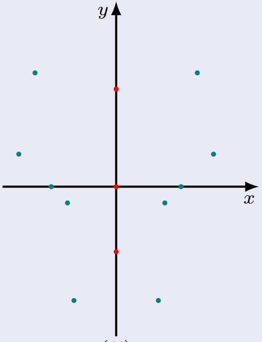
$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



(i)



(ii)

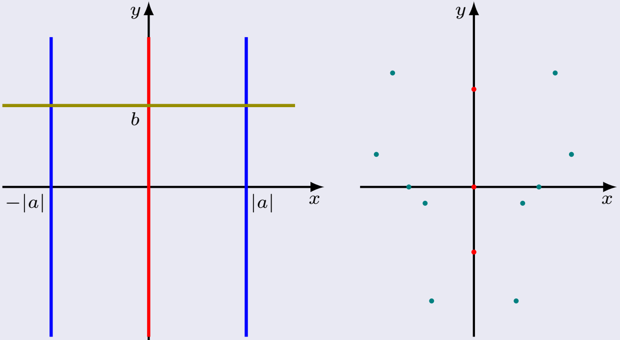
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



(i) (ii)

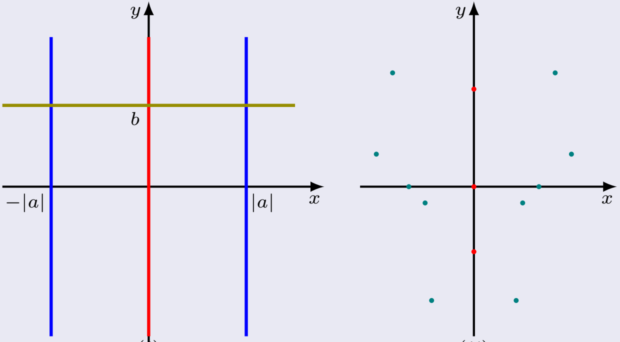
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a, b), (a, b)\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x, y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y), (-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$



(i) (ii)

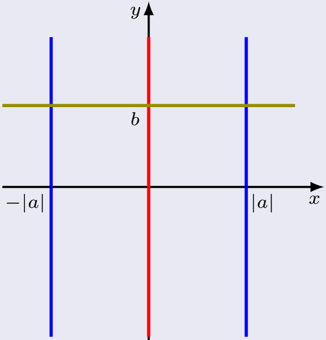
Приклад 3.2.31 (продовження)

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

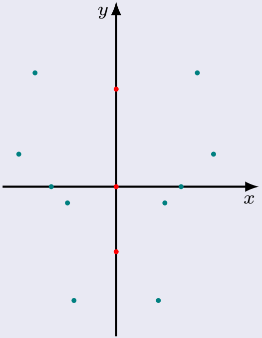
$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a,b),(a,b)\} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. (ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. (ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вищесказаного випливає, що кожна точка (x,y) має найменший базовий окіл

$$U(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{(x,y),(-x,y)\}, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases} \qquad (1)$$



(i)



(ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),

(i)

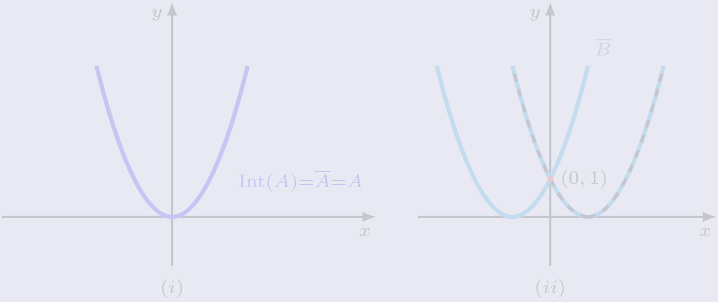
(ii)

то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x, y) \notin A$ випливає, що $(-x, y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і
$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



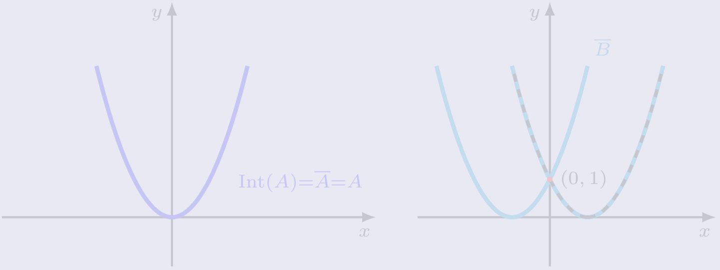
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i) (ii)

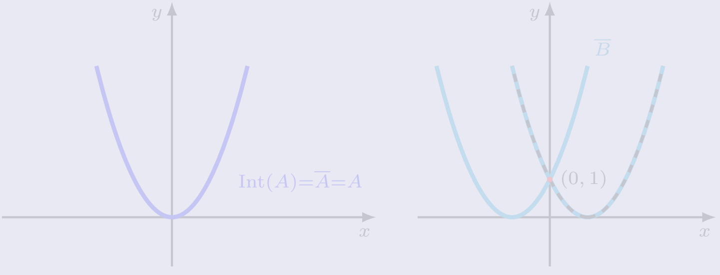
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i) (ii)

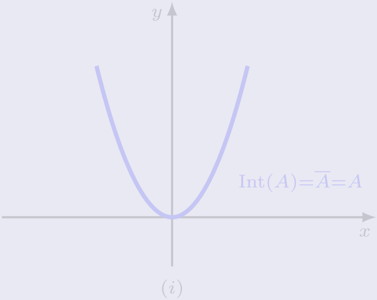
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

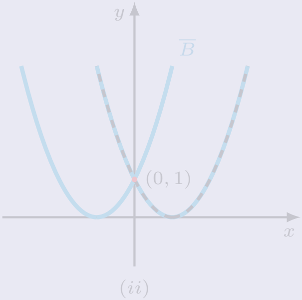
$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),





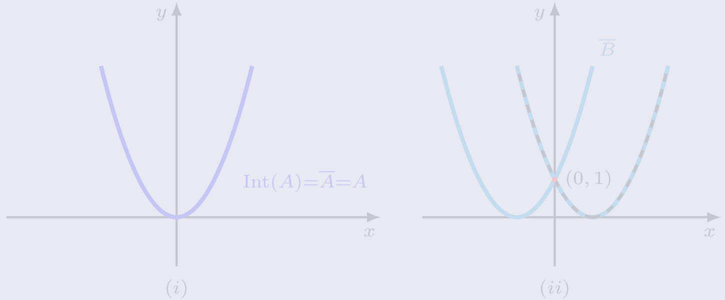
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x, y) \notin A$ випливає, що $(-x, y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



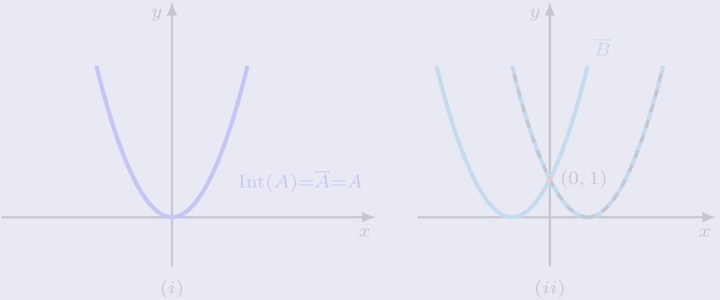
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



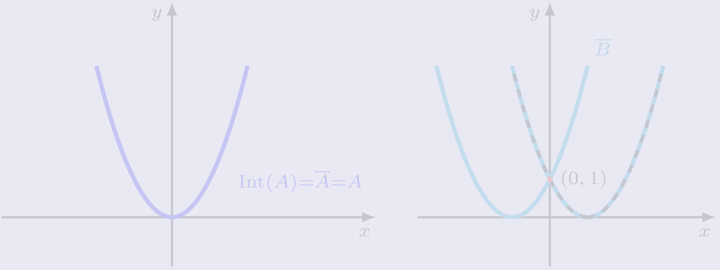
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i) (ii)

то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

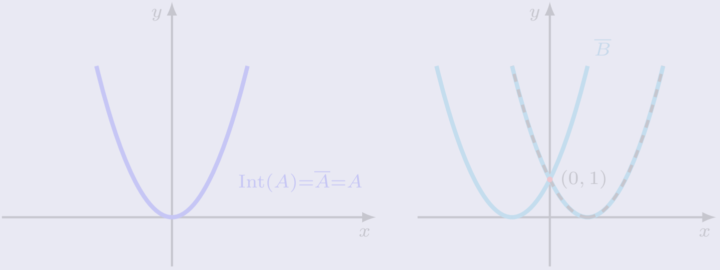
$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Лекція 12: База та передбаза топології

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i) (ii)

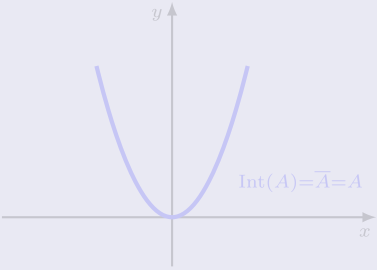
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\mathrm{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

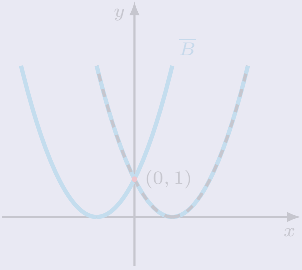
Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i)



(ii)

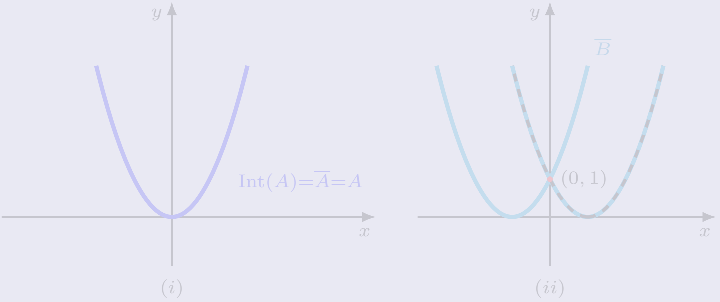
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x, y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



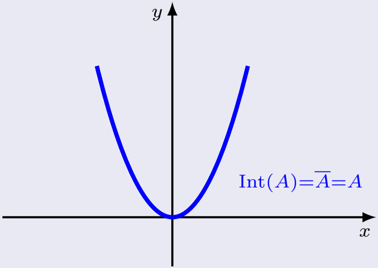
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x, y) \notin A$ випливає, що $(-x, y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

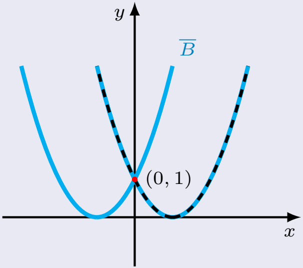
Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i)



(ii)

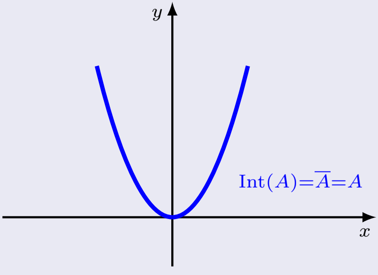
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x, y) \notin A$ випливає, що $(-x, y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

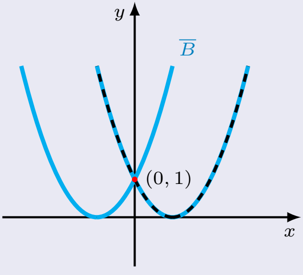
Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i)



(ii)

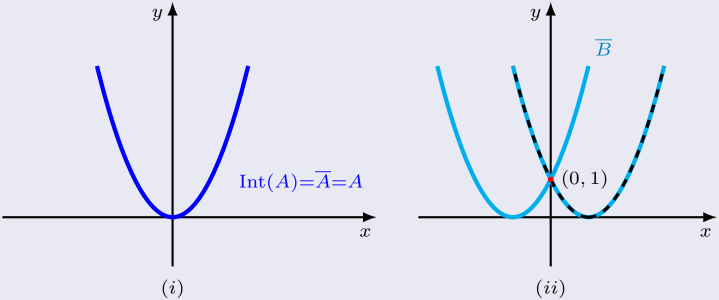
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



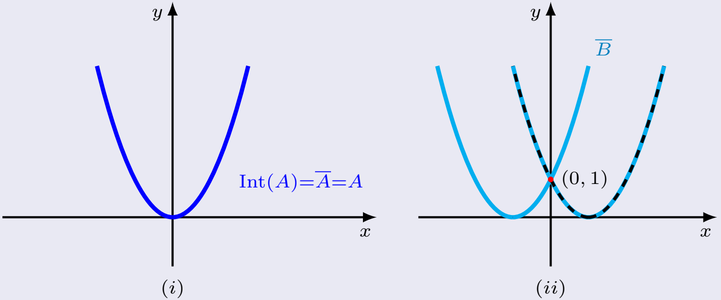
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\mathrm{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



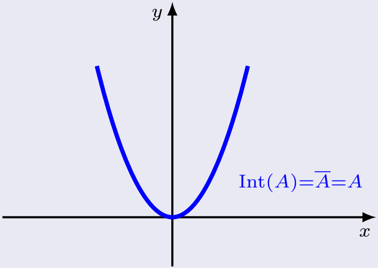
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

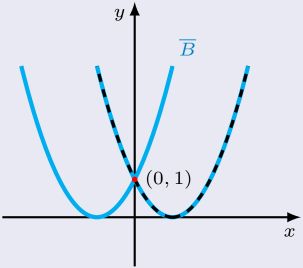
Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i)



(ii)

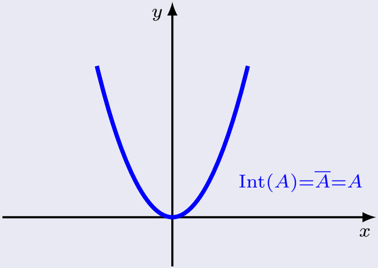
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\mathrm{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

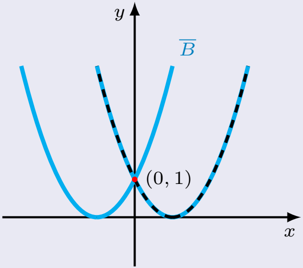
Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \left\{(x, y) \mid y = x^2\right\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



(i)



(ii)

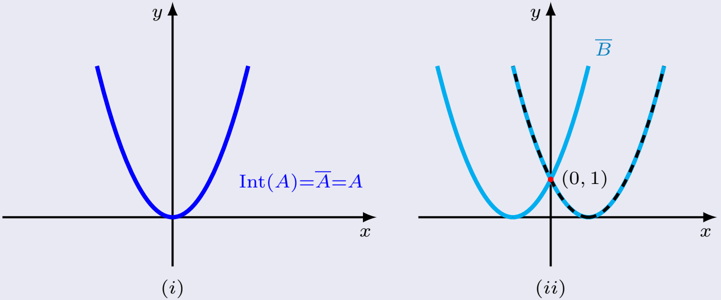
то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x, y) \notin A$ випливає, що $(-x, y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

З вищесказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. (i)),



то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є внутрішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x,y) \notin A$ випливає, що $(-x,y) \notin A$ (див. рис. (i)), то з (1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0, 1)$, то $\operatorname{Int}(B) = \{(0, 1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\operatorname{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0, 1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$

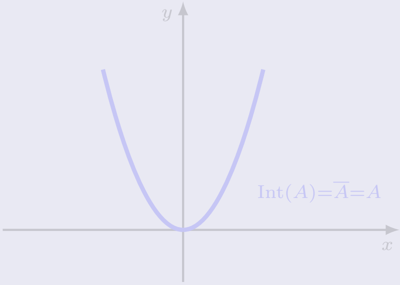
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0,1)$, то $\mathrm{Int}(B) = \{(0,1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

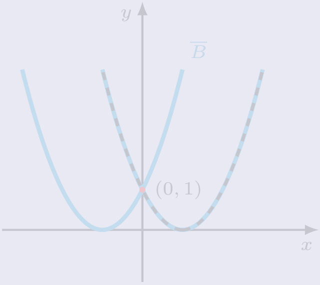
$$\overline{B} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0,1)\} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

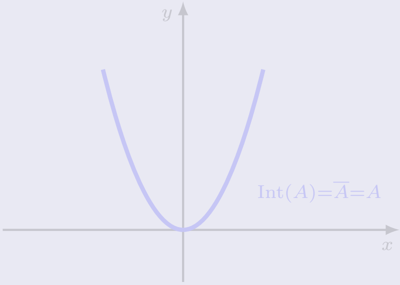
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B=\left\{(x,y)\mid y=(x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0,1)$, то $\operatorname{Int}(B)=\{(0,1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

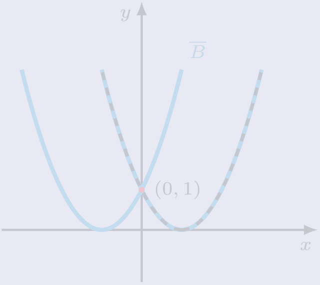
$$\overline{B}=\left\{(x,y)\mid y=(x-1)^2\right\}\cup\left\{(x,y)\mid y=(x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\operatorname{Fr}(B)=\overline{B}\setminus\{(0,1)\}=\left\{(x,y)\mid y=(x-1)^2, x\neq 0\right\}\cup\left\{(x,y)\mid y=(x+1)^2, x\neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

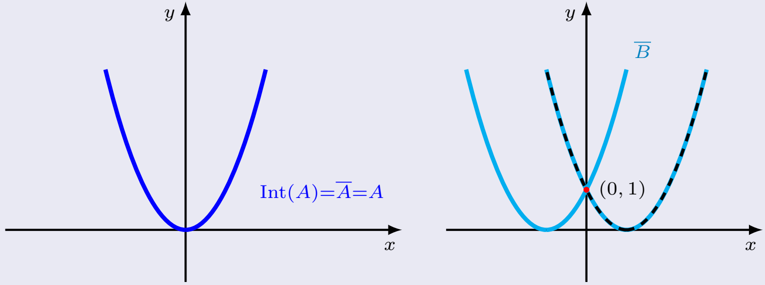
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0, 1)$, то $\mathrm{Int}(B) = \{(0, 1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0, 1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i) (ii)

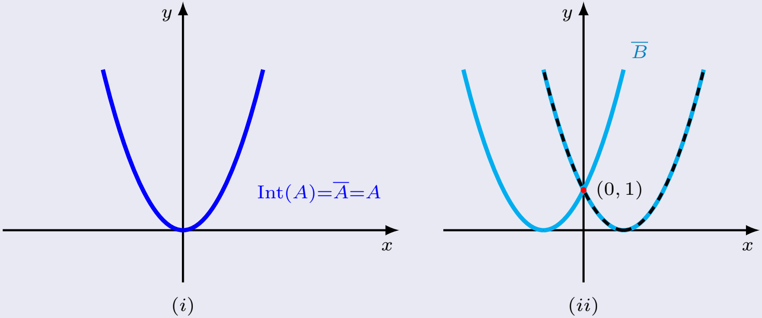
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0, 1)$, то $\mathrm{Int}(B) = \{(0, 1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0, 1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



Лекція 12: База та передбаза топології

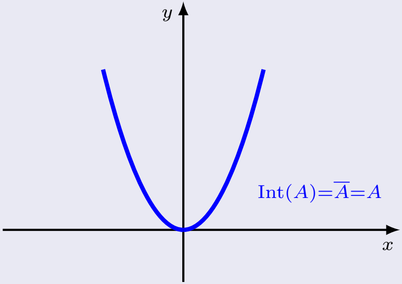
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0,1)$, то $\operatorname{Int}(B) = \{(0,1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

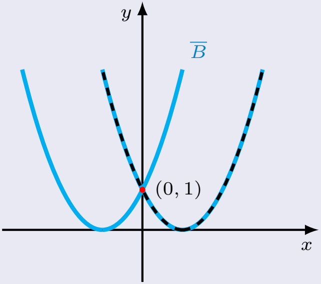
$$\overline{B} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\operatorname{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0,1)\} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

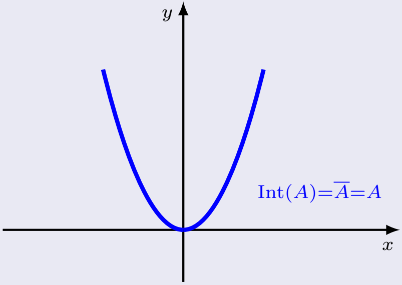
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0,1)$, то $\mathrm{Int}(B) = \{(0,1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

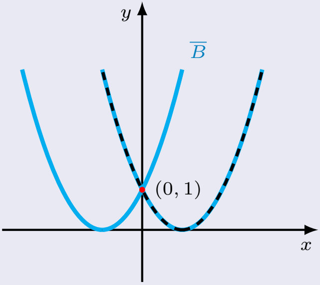
$$\overline{B} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0,1)\} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

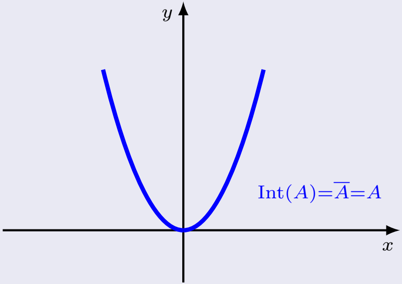
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0,1)$, то $\mathrm{Int}(B) = \{(0,1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

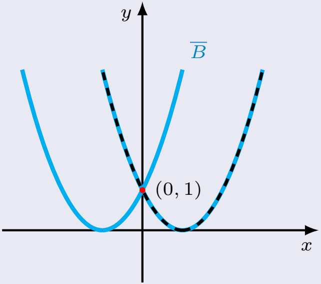
$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0,1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

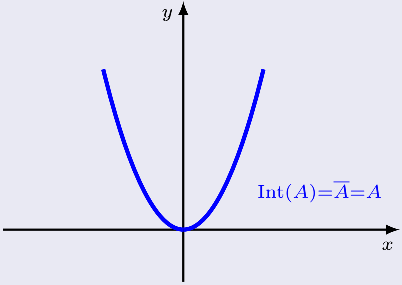
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0, 1)$, то $\operatorname{Int}(B) = \{(0, 1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

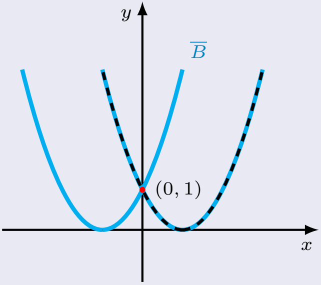
$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\operatorname{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0, 1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

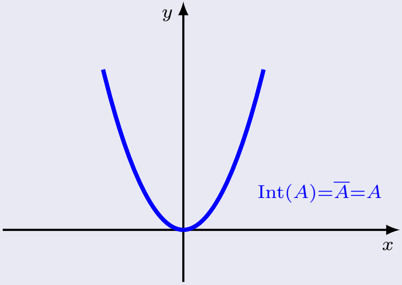
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \{(x,y) \mid y = (x-1)^2\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0,1)$, то $\mathrm{Int}(B) = \{(0,1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

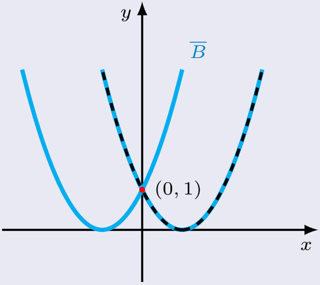
$$\overline{B} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0,1)\} = \left\{(x,y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

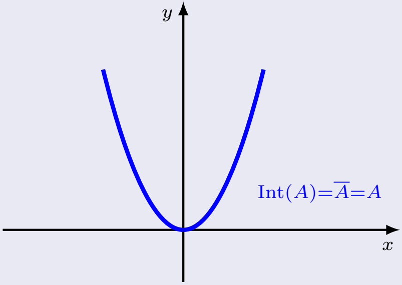
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0, 1)$, то $\mathrm{Int}(B) = \{(0, 1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

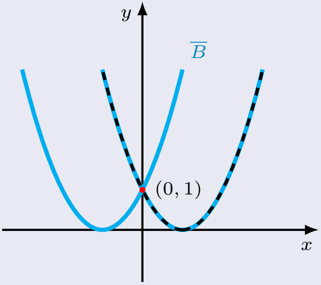
$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0,1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i)



(ii)

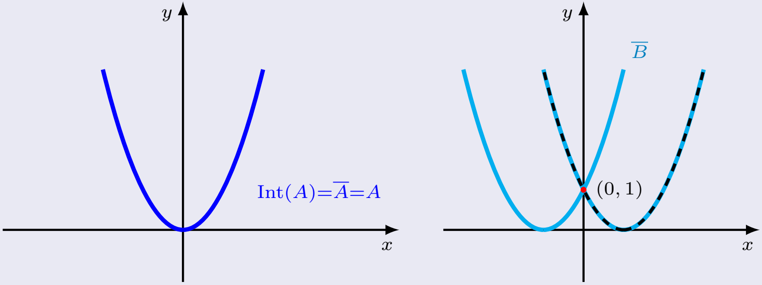
Приклад 3.2.31 (продовження)

(ii) Оскільки множина $B = \{(x, y) \mid y = (x-1)^2\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. (ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0, 1)$, то $\operatorname{Int}(B) = \{(0, 1)\}$. Також, з з (1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. (ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\operatorname{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0, 1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$



(i) (ii)

Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\mathrm{Int}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\},$$
$$\overline{C} = \{(x,y) \mid y = 0\},$$
$$\mathrm{Fr}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}.$$

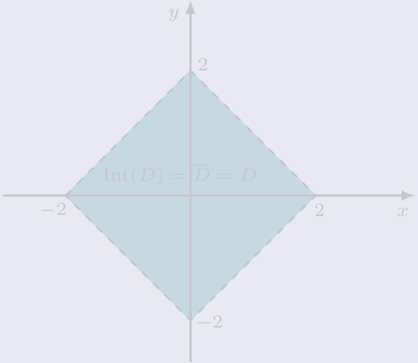
(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\mathrm{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\mathrm{Fr}(D) = \varnothing$.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\mathrm{Int}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\},$$
$$\overline{C} = \{(x,y) \mid y = 0\},$$
$$\mathrm{Fr}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}.$$

(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\mathrm{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\mathrm{Fr}(D) = \varnothing$.



Приклад 3.2.31 (продовження)

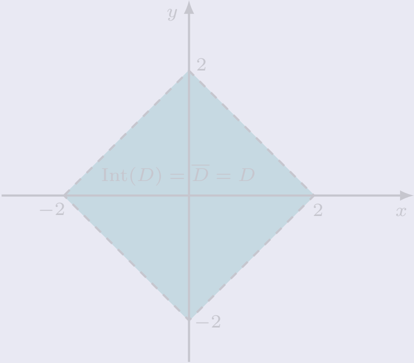
(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\operatorname{Int}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\},$$

$$\overline{C} = \{(x,y) \mid y = 0\},$$

$$\operatorname{Fr}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}.$$

(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\operatorname{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\operatorname{Fr}(D) = \varnothing$.

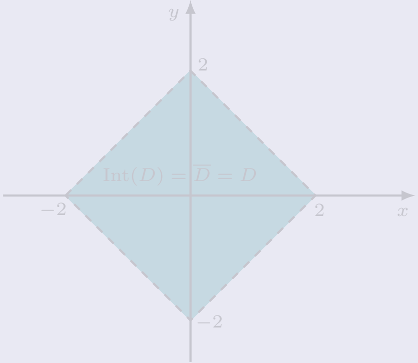


Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\operatorname{Int}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\},$$
$$\overline{C} = \{(x,y) \mid y = 0\},$$
$$\operatorname{Fr}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}.$$

(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\operatorname{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\operatorname{Fr}(D) = \varnothing$.

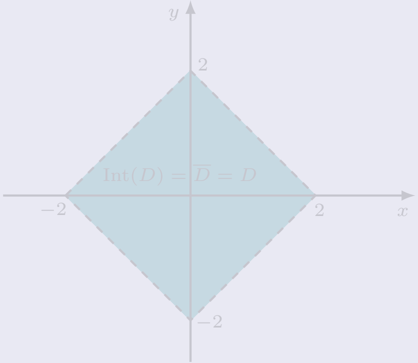


Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\operatorname{Int}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\},$$
$$\overline{C} = \{(x,y) \mid y = 0\},$$
$$\operatorname{Fr}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}.$$

(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\operatorname{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\operatorname{Fr}(D) = \varnothing$.

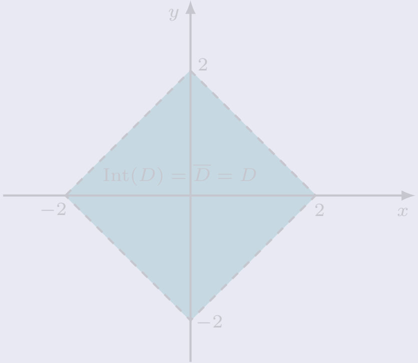


Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}(C) &= \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\}, \\ \overline{C} &= \{(x,y) \mid y = 0\}, \\ \operatorname{Fr}(C) &= \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}. \end{aligned}$$

(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\operatorname{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\operatorname{Fr}(D) = \varnothing$.

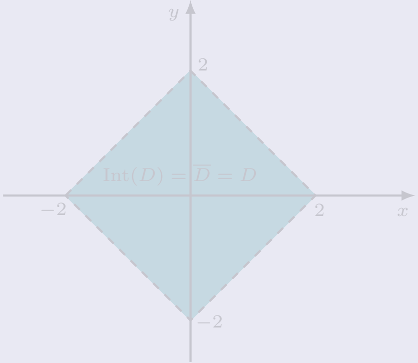


Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\mathrm{Int}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\},$$
$$\overline{C} = \{(x,y) \mid y = 0\},$$
$$\mathrm{Fr}(C) = \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}.$$

(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\mathrm{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\mathrm{Fr}(D) = \varnothing$.

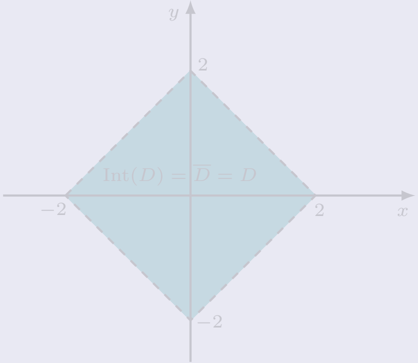


Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x, y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}(C) &= \{(x, y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\}, \\ \overline{C} &= \{(x, y) \mid y = 0\}, \\ \mathrm{Fr}(C) &= \{(x, y) \mid y = 0, x < -1\}. \end{aligned}$$

(iv) Для множини $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\mathrm{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\mathrm{Fr}(D) = \varnothing$.

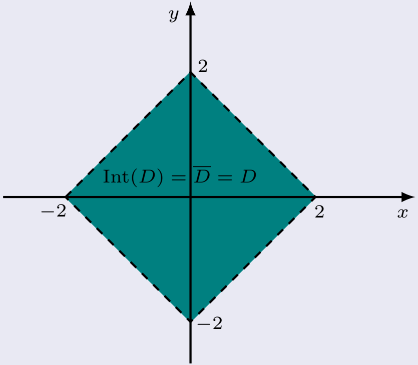


Приклад 3.2.31 (продовження)

(iii) Для множини $C = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}(C) &= \{(x,y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\}, \\ \overline{C} &= \{(x,y) \mid y = 0\}, \\ \operatorname{Fr}(C) &= \{(x,y) \mid y = 0, x < -1\}. \end{aligned}$$

(iv) Для множини $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\operatorname{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис.), а отже $\operatorname{Fr}(D) = \varnothing$.



Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна злічена підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна злічена підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна злічення підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна злічення підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна злічена підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна злічена підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна злічена підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна злічена підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна злічення підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна злічення підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\mathrm{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \mathrm{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна злічення підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна злічення підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна злічена підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна злічена підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\mathrm{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \mathrm{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\mathrm{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \mathrm{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1),(-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\mathrm{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \mathrm{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

Приклад 3.2.31 (продовження)

(v) Для множини $E = \{(1,1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

Приклад 3.2.32

Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. $\blacksquare$

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

Лекція 12: База та передбаза топології

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

Лекція 12: База та передбаза топології

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \qquad (2)$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ■

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються під час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих підмножин простору X існує така множини $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, що $|\mathcal{S}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}_0} U_s = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$.

Доведення. Виберемо базу $\mathscr{B}$ топологічного простору X, яка задовольняє умову $|\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}$, та позначимо через $\mathscr{B}_0$ сім'ю всіх $U \in \mathscr{B}$ таких, що існує $s \in \mathcal{S}$, для якого виконується умова $U \subseteq U_s$. Кожному елементу $U \in \mathscr{B}_0$ поставимо у відповідність індекс $s(U) \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалось включення

$$U \subseteq U_{s(U)}. \tag{2}$$

Отож, визначено відображення $s\colon \mathscr{B}_0 \to \mathcal{S}$. Доведемо, що множина $\mathcal{S}_0 = s(\mathscr{B}_0) \subseteq \mathcal{S}$ задовольняє умови теореми. Очевидно, що

$$|\mathcal{S}_0| = |s(\mathscr{B}_0)| \leqslant |\mathscr{B}_0| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \mathfrak{m}.$$

Виберемо точку $x \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$. Існує такий індекс $s \in \mathcal{S}$, що $x \in U_s$ і такий базовий окіл $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_s$. Очевидно, що $U \in \mathscr{B}_0$ і $s(U) \in \mathcal{S}_0$. З включення (2) випливає, що

$$x \in U \subseteq U_{s(U)} \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Отож, отримуємо включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} U_s.$$

Обернене включення очевидне. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s \in \mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}_0(t), t \in \mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s \in \mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}_0(t), t \in \mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t),t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t),t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}\,, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t),t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s \in \mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}_0(t), t \in \mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}\,, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s \in \mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}_0(t), t \in \mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t),t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s\in\mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}_0(t), t\in\mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ∎

Теорема 3.2.34

Нехай X — топологічний простір і $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}$ топологічного простору X існує така його база $\mathscr{B}_0$, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$ і $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Виберемо таку базу $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ топологічного простору X, що $|\mathcal{T}| \leqslant \mathfrak{m}$. Нехай $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Приймемо

$$\mathcal{S}(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid U_s \subseteq W_t\}, \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\mathscr{B}$ — база топологічного простору X, то $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = W_t$. За теоремою 3.2.33 існує множина $\mathcal{S}_0(t) \subseteq \mathcal{S}(t)$ така, що

$$|\mathcal{S}_0(t)| \leqslant \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$W_t = \bigcup_{s \in \mathcal{S}(t)} U_s = \bigcup_{s \in \mathcal{S}_0(t)} U_s. \tag{4}$$

Приймемо $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s \in \mathcal{S}_0(t), t \in \mathcal{T}}$. Оскільки $\mathcal{T} \leqslant \mathfrak{m}$, то з нерівності (3) і рівності $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ випливає, що $|\mathscr{B}_0| \leqslant \mathfrak{m}$. Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{B}_0$ є базою топологічного простору X. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та її відкритий окіл V. Оскільки сім'я $\mathscr{B}_1$ є базою простору X, то існує такий індекс $t \in \mathcal{T}$, що $x \in W_t \subseteq V$. З рівностей (4) випливає, існування такого індекса $s \in \mathcal{S}_0(t)$, що

$$x \in U_s \subseteq W_t \subseteq V.$$

Очевидно, що $U_s \in \mathscr{B}_0$, а це означає, що $\mathscr{B}_0$ — база топологічного простору X. ■

Дякую за увагу!!!