Означення топології та топологічного простору

Топологія

Лекція 11

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{T}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{T}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{T}3$) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1) - (\mathscr{T}3)$.

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

$(\mathscr{O}1)$ $\varnothing, X \in \tau$;

$(\mathscr{O}2)$ $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

$(\mathscr{O}3)$ $\bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

$(\mathscr{T}1)$ τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

$(\mathscr{T}2)$ τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

$(\mathscr{T}3)$ τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$ – $(\mathscr{T}3)$.

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

$(\mathscr{O}1)$ $\varnothing, X \in \tau$;

$(\mathscr{O}2)$ $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

$(\mathscr{O}3)$ $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

$(\mathscr{T}1)$ τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

$(\mathscr{T}2)$ τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

$(\mathscr{T}3)$ τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$ – $(\mathscr{T}3)$.

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається ***топологічним простором***. Елементи сім'ї τ називаються ***відкритими множинами*** в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати ***точками***.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1) - (\mathscr{T}3)$.

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Означення 3.1.1

Топологією на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1) - (\mathscr{T}3)$.

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{ad} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;
(ii) $\tau_{D} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{ad} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{D} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{ad} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\partial} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\text{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\text{D}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathrm{D}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;
(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;
(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;
(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;
(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Приклад 3.1.2

На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3

На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(i) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(ii) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\partial}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.
Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів $(n \in \mathbb{N})$?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів $(n \in \mathbb{N})$?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\partial}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоншою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів $(n \in \mathbb{N})$?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.
Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\text{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.
Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.

Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\eth}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*.
Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Вправа 3.1.1

Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2

Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3

Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо для топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_\mathfrak{d}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_\mathfrak{d}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Сєрпіньського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Сєрпіньського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Сєрпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Сєрпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Сєрпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Сєрпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Сєрпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Сєрпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\text{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\text{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Приклад 3.1.4

На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпінського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпінського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5

Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4

Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5

Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі $(X, \tau_{a.d})$ замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X, τ_∂) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(*i*) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;
(*ii*) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;
(*iii*) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;
(*iv*) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;
(*v*) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X, τ_{∂}) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X,τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X,τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X,τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X,τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X,τ_∂) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X, τ_∂) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі $(X, \tau_{\mathrm{a.d}})$ замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X, τ_{d}) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X, τ_∂) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;
(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;
(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;
(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;
(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X, τ_{∂}) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі (X, τ_{∂}) замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$ замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$ замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$ замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Означення 3.1.7

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо множина $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8

У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише порожня множина $\varnothing$ та сама множина X.

Приклад 3.1.9

У дискретному просторі $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$ замкненими є усі підмножини множини X.

Приклад 3.1.10

Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;

(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;

(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.

Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.

Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$
$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathscr{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathscr{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (*ii*) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathscr{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathscr{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(*iii*) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.

Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.

Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.

Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.

Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. *(ii)* $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. *(ii)* $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. *(ii)* $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. *(ii)* $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. *(ii)* $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.
Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathcal{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.
Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathscr{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathscr{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathscr{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (*iv*) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(*v*) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min\mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$
оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:
$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$
Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:
$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$
Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$.
Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$

Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$

Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$

Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min\mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (*iv*) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(*v*) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетину "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min\mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (*iv*) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$
оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(*v*) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:
$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$
Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:
$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$
Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Приклад 3.1.10 (продовження)

Розв'язок. (iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$
Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_4,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$
Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$. Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k\in\mathcal{J}\subseteq\mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathcal{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathcal{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком. Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}$1) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$2) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$3) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}$1), ($\mathscr{C}$2) і ($\mathscr{C}$3), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}$1) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$2) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$3) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}$1), ($\mathscr{C}$2) і ($\mathscr{C}$3), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}$1) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$2) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$3) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}$1), ($\mathscr{C}$2) і ($\mathscr{C}$3), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}$1) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$2) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$3) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}$1), ($\mathscr{C}$2) і ($\mathscr{C}$3), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}$1) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$2) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$3) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup\{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap\{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}$1), ($\mathscr{C}$2) і ($\mathscr{C}$3), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}$1) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$2) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$3) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}$1), ($\mathscr{C}$2) і ($\mathscr{C}$3), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup\{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap\{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}$1) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$2) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}$3) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}$1), ($\mathscr{C}$2) і ($\mathscr{C}$3), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Через $\mathscr{C}(X,\tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X,τ). Тоді з законів де Моргана випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X,\tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X,\tau)$;

($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X,\tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X,\tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup\{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap\{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11

Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незлічення множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Приклад 3.1.12

Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13

Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$, $(\mathscr{C}2)$ і $(\mathscr{C}3)$, а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\mathrm{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\mathrm{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \mathrm{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\mathrm{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\mathrm{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \mathrm{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\mathrm{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\mathrm{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \mathrm{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\mathrm{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\mathrm{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \mathrm{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати ***внутрішністю множини*** A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\mathrm{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\mathrm{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \mathrm{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є ***околом точки*** x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\mathrm{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\mathrm{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \mathrm{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\mathrm{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\mathrm{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \mathrm{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.14

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X, τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X, τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X, τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X, τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x \text{ – точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відрриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Означення 3.1.15

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X, τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X, τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ∎

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \not\subseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \not\subseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \not\subseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \not\subseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ∎

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

($\Leftarrow$) Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \not\subseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \not\subseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ∎

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X,τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X,τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X,τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X,τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

Твердження 3.1.16

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді, коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X, τ).

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X, τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X, τ), а отже $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X, τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(A)$. ■

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містять множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містять множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

- (i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);
- (ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;
- (iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;
- (iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
- (v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;
- (vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *операторoм замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

- (i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);
- (ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;
- (iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;
- (iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
- (v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;
- (vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *операторомзамикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(*i*) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(*ii*) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(*iii*) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(*iv*) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(*v*) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(*vi*) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *операторам замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:

(i) $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ);

(ii) $\mathrm{Cl}(A)$ — найменша замкнена підмножина в (X, τ), яка містить множину A;

(iii) $\mathrm{Cl}(A)$ — перетин усіх замкнених підмножин в (X, τ), які містить множину A;

(iv) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(v) якщо U — відкрита множина множина в (X, τ) і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;

(vi) якщо $B \subseteq A$, то $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (iv) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *операторомзамикання* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X,τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X,τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

$(\mathscr{CO}1)$ $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{CO}2)$ $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

$(\mathscr{CO}3)$ $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

$(\mathscr{CO}4)$ $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості $(\mathscr{CO}1)$ і $(\mathscr{CO}2)$ безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість $(\mathscr{CO}4)$ випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X,τ).

$(\mathscr{CO}3)$ З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості $(\mathscr{CO}2)$ випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

$(\mathscr{CO}1)$ $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{CO}2)$ $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

$(\mathscr{CO}3)$ $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

$(\mathscr{CO}4)$ $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості $(\mathscr{CO}1)$ і $(\mathscr{CO}2)$ безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість $(\mathscr{CO}4)$ випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

$(\mathscr{CO}3)$ З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості $(\mathscr{CO}2)$ випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X,τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

$(\mathscr{CO}1)$ $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{CO}2)$ $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

$(\mathscr{CO}3)$ $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

$(\mathscr{CO}4)$ $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості $(\mathscr{CO}1)$ і $(\mathscr{CO}2)$ безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість $(\mathscr{CO}4)$ випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

$(\mathscr{CO}3)$ З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості $(\mathscr{CO}2)$ випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

$(\mathscr{CO}1)$ $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{CO}2)$ $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

$(\mathscr{CO}3)$ $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

$(\mathscr{CO}4)$ $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості $(\mathscr{CO}1)$ і $(\mathscr{CO}2)$ безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість $(\mathscr{CO}4)$ випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

$(\mathscr{CO}3)$ З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості $(\mathscr{CO}2)$ випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{C}\mathscr{O}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{C}\mathscr{O}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{C}\mathscr{O}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{C}\mathscr{O}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{C}\mathscr{O}$1) і ($\mathscr{C}\mathscr{O}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{C}\mathscr{O}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{C}\mathscr{O}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{C}\mathscr{O}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X,τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

$(\mathscr{C}\mathscr{O}1)$ $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{C}\mathscr{O}2)$ $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

$(\mathscr{C}\mathscr{O}3)$ $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

$(\mathscr{C}\mathscr{O}4)$ $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості $(\mathscr{C}\mathscr{O}1)$ і $(\mathscr{C}\mathscr{O}2)$ безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість $(\mathscr{C}\mathscr{O}4)$ випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X,τ).

$(\mathscr{C}\mathscr{O}3)$ З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості $(\mathscr{C}\mathscr{O}2)$ випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}$1) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}$2) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}$3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}$4) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}$1) і ($\mathscr{CO}$2) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}$4) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}$3) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}$2) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ∎

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Теорема 3.1.18

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор замикання має такі властивості:

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;

($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X, τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(vi) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. ■

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X, τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A,B\subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing)=\varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A)\subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A\cap B)=\operatorname{Int}(A)\cap\operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A)=\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тодi оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{IO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{IO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{IO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{IO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{IO}1)$—$(\mathscr{IO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A,B\subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing)=\varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A)\subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A\cap B)=\operatorname{Int}(A)\cap\operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A)=\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A,B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing)=\varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A)\subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A\cap B)=\operatorname{Int}(A)\cap\operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A)=\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A,B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\mathrm{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям ($\mathscr{CO}1$)–($\mathscr{CO}4$) і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

($\mathscr{OO}1$) $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

($\mathscr{OO}2$) $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

($\mathscr{OO}3$) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

($\mathscr{OO}4$) $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови ($\mathscr{CO}1$)—($\mathscr{CO}4$), чи ($\mathscr{OO}1$)—($\mathscr{OO}4$), відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови ($\mathscr{C}1$)—($\mathscr{C}3$), чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови ($\mathscr{O}1$)—($\mathscr{O}3$), відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A,B\subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing)=\varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A)\subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A\cap B)=\operatorname{Int}(A)\cap\operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A)=\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям $(\mathscr{CO}1)$–$(\mathscr{CO}4)$ і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(iv), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:

$(\mathscr{OO}1)$ $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

$(\mathscr{OO}2)$ $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$;

$(\mathscr{OO}3)$ $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

$(\mathscr{OO}4)$ $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6

Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20

Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$, чи $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$, відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{C}1)$—$(\mathscr{C}3)$, чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}3)$, відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографіях із загальної топології. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_\mathfrak{d}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{d}, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{d}, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{d}, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{d}, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{d}, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_\text{д}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_ad на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{d}, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{d}, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_∂, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.21

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$. Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови $(\mathscr{CO}1)$—$(\mathscr{CO}4)$ і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_{∂} на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_∂ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_∂ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_0 на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_∂ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_0 на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_0 на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_0 на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$ і визначає дискретну топологію τ_0 на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_∂ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_∂ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\!\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\!\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\!\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\!\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію τ_∂ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{O}\mathscr{O}1)$—$(\mathscr{O}\mathscr{O}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Приклад 3.1.23

Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\operatorname{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\operatorname{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$. Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24

Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\operatorname{Int}(A) = A$ задовольняє умови $(\mathscr{OO}1)$—$(\mathscr{OO}4)$ і визначає дискретну топологію $\tau_\mathfrak{d}$ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A).$$

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;

(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;

(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;

(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;

(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;

(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;

(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;

(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;

(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;

(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;

(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\operatorname{Int}(A) = A \setminus \operatorname{Fr}(A)$;

(2) $\operatorname{Cl}(A) = A \cup \operatorname{Fr}(A)$;

(3) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$;

(4) $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$;

(5) $\operatorname{Fr}(X \setminus A) = \operatorname{Fr}(A)$;

(6) $X = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$;

(7) $\operatorname{Fr}(\operatorname{Cl}(A)) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$;

(8) $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int}(A)) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$;

(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus A$;

(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Fr}(A) = A \setminus \operatorname{Int}(A)$;

(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;

(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;

(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;

(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;

(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;

(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;

(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;

(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;

(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;

(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;

(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\operatorname{Int}(A) = A \setminus \operatorname{Fr}(A)$;
(2) $\operatorname{Cl}(A) = A \cup \operatorname{Fr}(A)$;
(3) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$;
(4) $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$;
(5) $\operatorname{Fr}(X \setminus A) = \operatorname{Fr}(A)$;
(6) $X = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\operatorname{Fr}(\operatorname{Cl}(A)) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$;
(8) $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int}(A)) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Fr}(A) = A \setminus \operatorname{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;

(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;

(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;

(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;

(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;

(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;

(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Найважливіші властивості оператора взяття межі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25

Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;
(10) множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$;
(11) множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

∎

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

■

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

∎

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

∎

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

■

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

■

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

∎

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

∎

Вправа 3.1.7

Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \operatorname{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \operatorname{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\operatorname{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\displaystyle\bigcup_{\gamma \in \mathscr{I}} A_\gamma^d = \Big(\bigcup_{\gamma \in \mathscr{I}} A_\gamma\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \left(\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup\limits_{s \in S} A_s^d = \left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i^d = \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i^d = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^d$

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d \subseteq \left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

1. $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;
2. якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\displaystyle\bigcup_{s\in\mathscr{S}} A_s^d = \Big(\bigcup_{s\in\mathscr{S}} A_s\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26

Похідна множина задовольняє такі умови:

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$;

(2) якщо $A \subseteq B$, то $A^d \subseteq B^d$;

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(4) $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8

Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною або всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною в собі*, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде не щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде не щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Лекція 11: Означення топології та топологічного простору

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Означення 3.1.27

Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28

Нехай X — топологічний простір. Тоді:

1. Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.
2. Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.
3. Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.29

Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup_{j \in \mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \quad \text{і} \quad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченній множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a]Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{i} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.30

Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9

Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[a] Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козлічeнних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незлічена множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ злічена, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох злічених множин є злічена множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козлічених підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченою, тобто множина A є зліченою, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незлічeнна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ злічeнна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох злічeнних множин є злічeнна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незлічeнній множині X називається *топологією козлічeнних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є злічeнною, тобто множина A є злічeнною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козлічених підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ злічeнна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ злічена, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є злічена множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\} .$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

[a]Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b]Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

---

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31

Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[a]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[b].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

[a] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[b] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}) = \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X\setminus\bigcup_{i\in\mathcal{I}}U_i=\bigcap_{i\in\mathcal{I}}X\setminus U_i\subseteq X\setminus U_{i_0}\quad \text{для кожного}\quad i_0\in\mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}}U_i\in\tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N})=\varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z})=\varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q})=\varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\})=\varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N})=\mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\})=\{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N})=\mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\})=\{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\})=\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\})=\mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\})=\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\mathrm{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\mathrm{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\mathrm{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\mathrm{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\mathrm{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\mathrm{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\mathrm{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\mathrm{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\mathrm{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Приклад 3.1.31 (продовження)

Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathcal{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R},\tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Дякую за увагу!!!