# Неперервні відображення метричних просторів

Топологія

Лекція 10

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

### Означення 2.4.1

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

### Означення 2.4.2

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

### Приклад 2.4.3

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

### Означення 2.4.1

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

### Означення 2.4.2

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

### Приклад 2.4.3

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

# Лекція 10: Неперервні відображення метричних просторів

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

# Лекція 10: Неперервні відображення метричних просторів

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

**Означення 2.4.1**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

**Означення 2.4.2**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

**Приклад 2.4.3**

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

### Означення 2.4.1

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

### Означення 2.4.2

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

### Приклад 2.4.3

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

### Означення 2.4.1

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $X$, яка збігається до точки $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні $x$ до точки $x_0$ значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в $X'$. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

### Означення 2.4.2

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

### Приклад 2.4.3

Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

# Лекція 10: Неперервні відображення метричних просторів

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою* $\varepsilon - \delta$, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x, x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою* $\varepsilon - \delta$, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою* $\varepsilon - \delta$, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x, x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x, x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x, x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x, x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою $\varepsilon - \delta$*, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

**Означення 2.4.4**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в $X'$.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

**Означення 2.4.5**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в $X'$ з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в $X$ з центром в точці $x_0$ така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою* $\varepsilon - \delta$, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X, d) \to (X', d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X, d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x, x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n, x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X, d) \to (X', d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0\in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0\in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon>0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta>0$, міститься така точка $x$, що $f(x)\notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в точці $x_0\in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon>0$ існує таке дійсне число $\delta>0$, що для всіх $x\in X$, з $d(x,x_0)<\delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta>0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0)<\delta$ для всіх $n\geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$ для всіх $n\geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0\in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n, x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0\in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0\in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon>0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta>0$, міститься така точка $x$, що $f(x)\notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в точці $x_0\in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon>0$ існує таке дійсне число $\delta>0$, що для всіх $x\in X$, з $d(x,x_0)<\delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta>0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0)<\delta$ для всіх $n\geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$ для всіх $n\geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0\in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0\in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0\in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon>0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta>0$, міститься така точка $x$, що $f(x)\notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в точці $x_0\in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon>0$ існує таке дійсне число $\delta>0$, що для всіх $x\in X$, з $d(x,x_0)<\delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta>0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0)<\delta$ для всіх $n\geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$ для всіх $n\geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0\in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n, x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n, x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n, x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0\in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0\in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon>0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta>0$, міститься така точка $x$, що $f(x)\notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в точці $x_0\in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0\in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon>0$ існує таке дійсне число $\delta>0$, що для всіх $x\in X$, з $d(x,x_0)<\delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta>0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0)<\delta$ для всіх $n\geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$ для всіх $n\geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d)\to(X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0\in X$ за Гейне ◻

**Твердження 2.4.6**

Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.

***Доведення.*** Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що $f$ не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка $x$, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа $n$ через $x_n$ позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в $(X,d)$. Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в $X$ випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі $X'$. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число $n_0$, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отже, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне ■

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ такі умови є еквівалентними:

(i) $f$ — неперервне;

(ii) повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

(iii) повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X, d) \to (X', d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

### Теорема 2.4.7

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d)\to(X',d')$ такі умови є еквівалентними:

- $(i)$ $f$ — неперервне;
- $(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;
- $(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i)\Rightarrow(ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d)\to(X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x\in X$ такої, що $f(x)\in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x))\subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x))\subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

### Теорема 2.4.7

Для відображення метричних просторів $f\colon (X, d) \to (X', d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X, d) \to (X', d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

- $(i)$ $f$ — неперервне;
- $(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;
- $(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

- $(i)$ $f$ — неперервне;
- $(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;
- $(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

**Теорема 2.4.7**

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;
$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;
$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

### Теорема 2.4.7

Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:

$(i)$ $f$ — неперервне;

$(ii)$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$;

$(iii)$ повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини $K$ в $X'$ є замкненою множиною в метричному просторі $X$.

***Доведення.*** $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та $U$ відкрита непорожня множина в метричному просторі $X'$. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в $X'$, що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення $f$ випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що $x$ — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини $U$ в $X'$ є відкритою множиною в метричному просторі $X$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X,d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X,d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X, d) \to (X', d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X, d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X, d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X, d) \to (X', d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X, d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X, d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X,d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X,d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X,d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X,d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X,d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X,d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X, d) \to (X', d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X, d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X, d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X,d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X,d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X,d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X,d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X, d) \to (X', d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X, d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X, d)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини $U$ в метричному просторі $X'$ повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в $X$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в $X'$. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в $X$. Отже, для точки $x$ існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці $x$ в $X$, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. ■

**Твердження 2.2.8**

Множина $A$ метричного простору $(X,d)$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в $(X,d)$.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

(i) якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$,

(ii) якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

(*i*) якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$,

(*ii*) якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d)\to (X',d')$ і $g\colon (X',d')\to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0\in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0=f(x_0)\in X'$,

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g\circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d)\to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$,

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$, то композиція $g \circ f\colon (X,d) \to (X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$, то композиція $g \circ f\colon (X,d) \to (X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$, то композиція $g \circ f\colon (X,d) \to (X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d)\to(X',d')$ і $g\colon (X',d')\to(X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0\in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0=f(x_0)\in X'$, то композиція $g\circ f\colon (X,d)\to(X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0\in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g\circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

### Теорема 2.4.9

Нехай $f\colon (X,d)\to(X',d')$ і $g\colon (X',d')\to(X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0\in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0=f(x_0)\in X'$, то композиція $g\circ f\colon (X,d)\to(X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0\in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g\circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

### Вправа 2.4.1

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

### Вправа 2.4.2

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

### Вправа 2.4.3

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$, то композиція $g \circ f\colon (X,d) \to (X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$, то композиція $g \circ f\colon (X,d) \to (X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d)\to(X',d')$ і $g\colon (X',d')\to(X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0\in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0=f(x_0)\in X'$, то композиція $g\circ f\colon (X,d)\to(X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0\in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g\circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

**Теорема 2.4.9**

Нехай $f\colon (X,d) \to (X',d')$ і $g\colon (X',d') \to (X'',d'')$ — відображення метричних просторів. Тоді:

$(i)$ якщо $f$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ і $g$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in X'$, то композиція $g \circ f\colon (X,d) \to (X'',d'')$ — неперервне відображення в точці $x_0 \in X$;

$(ii)$ якщо $f$ і $g$ — неперервні відображення, то композиція $g \circ f$ — неперервне відображення.

Доведення твердження $(i)$ випливає з означення неперервності за Коші, а твердження $(i)$ безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

**Вправа 2.4.1**

Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

**Вправа 2.4.2**

Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

**Вправа 2.4.3**

Доведіть, якщо $(X,d)$ — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в довільний метричний простір $(X',d')$ є неперервним, то $(X,d)$ — дискретний метричний простір.

Дякую за увагу!!!