Властивості метричних просторів

Топологія

Лекція 9

Лекція 9: Властивості метричних просторів

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною або всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Лекція 9: Властивості метричних просторів

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Лекція 9: Властивості метричних просторів

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Лекція 9: Властивості метричних просторів

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить злічену щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X,d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це виплиаває з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X,d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить злічену щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Лекція 9: Властивості метричних просторів

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Лекція 9: Властивості метричних просторів

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X,d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X,d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Означення 2.3.1

Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2

У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3

Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить злічену щільну підмножину.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незлічeнний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Лекція 9: Властивості метричних просторів

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незлічений дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним называють *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сепарабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сепарабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сепарабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сепарабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5

Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ∎

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ∎

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ∎

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ∎

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6

Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. ■

Вправа 2.3.1

Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2

Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

Дякую за увагу!!!