Топологія метричного простору

Топологія

Лекція 8

Лекція 8: Топологія метричного простору

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$
називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина
$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$
називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо
$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$
і
$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X,d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X,d). Множина
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$
називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина
$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$$
називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо
$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$
і
$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X,d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X,d). Множина
$$B_r(x)=\{y\in X\mid d(x,y)<r\}$$
називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина
$$\overline{B}_r(x)=\{y\in X\mid d(x,y)\leqslant r\}$$
називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо
$$B_r(x)=\begin{cases}\{x\}, & \text{якщо } r\leqslant 1;\\ X, & \text{якщо } r>1\end{cases}$$
і
$$\overline{B}_r(x)=\begin{cases}\{x\}, & \text{якщо } r<1;\\ X, & \text{якщо } r\geqslant 1.\end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p\geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$
називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина
$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$
називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо
$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$
і
$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$
називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина
$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$
називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо
$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$
і
$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$
називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина
$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$
називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо
$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$
і
$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.1

Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина
$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$
називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина
$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$
називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо
$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$
і
$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1

Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.2

Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2

Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3

Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною на інтервалі $(0, 1)$ із звичайною метрикою

$$d_u(x, y) = |x - y|.$$

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ∎

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ∎

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ∎

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ∎

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ∎

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ∎

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ∎

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X,d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X,d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X,d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X,d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X,d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Означення 2.2.3

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4

Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X, d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X, d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X,d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X,d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X,d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X,d).

Множина A в метричному просторі (X,d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X,d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X,d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X,d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Лекція 8: Топологія метричного простору

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Лекція 8: Топологія метричного простору

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Лекція 8: Топологія метричного простору

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X, d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X, d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X, d).

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X, d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X, d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X,d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X,d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X,d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X,d).

Множина A в метричному просторі (X,d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5

Множина A метричного простору (X,d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.

Означення 2.2.6

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X,d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7

Множина A в метричному просторі (X,d) називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ∎

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X,d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X,d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X,d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X,d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X,d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X,d). ∎

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*.

Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ∎

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*.

Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*.

Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X,d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X\setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X,d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X\setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X,d). А отже $X\setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).

Припустимо, що $X\setminus A$ — замкнена множина в (X,d). Тоді множина $X\setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X,d), а отже кожна точка $x\in X\setminus(X\setminus A)=A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X,d). ∎

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*.

Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*.

Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ∎

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*.

Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ∎

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X,d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X\setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X,d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X\setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X,d). А отже $X\setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).

Припустимо, що $X\setminus A$ — замкнена множина в (X,d). Тоді множина $X\setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X,d), а отже кожна точка $x\in X\setminus(X\setminus A)=A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X,d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*.

Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Твердження 2.2.8

Множина A метричного простору (X, d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X, d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X, d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X, d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X, d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X, d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X, d). ■

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

Лекція 8: Топологія метричного простору

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_{\varepsilon}(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon}(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_{\varepsilon}(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X,d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X,d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X,d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X,d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X,d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X,d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X,d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X,d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X,d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X,d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X,d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X,d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X,d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X,d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X,d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X,d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ∎

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);

(ii) перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);

(iii) об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. ■

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

Лекція 8: Топологія метричного простору

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.10

Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:

(i) $\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);

(ii) об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);

(iii) перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

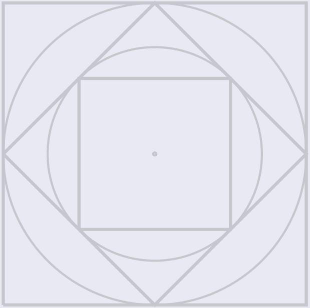
Приклад 2.2.11

Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),

то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

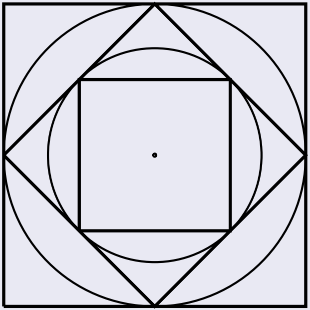
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

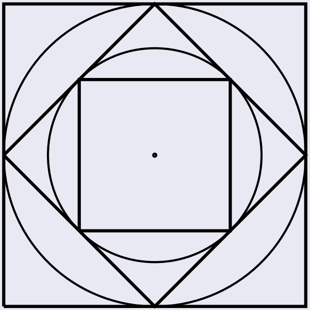
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

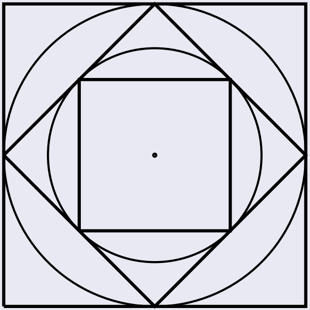
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

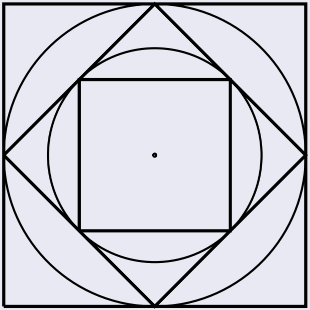
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

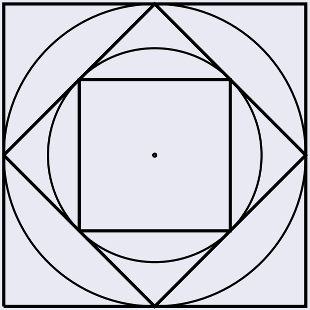
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

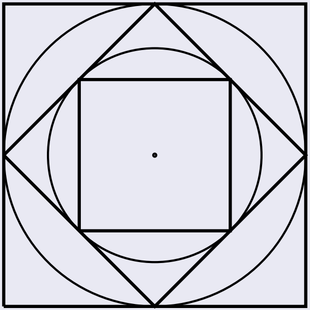
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

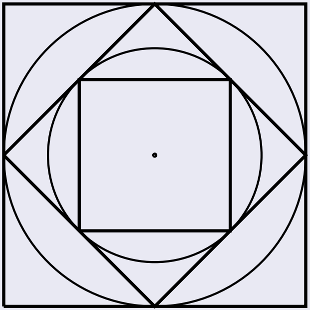
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

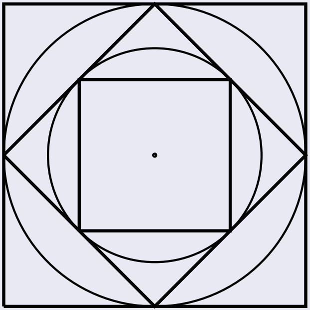
Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Приклад 2.2.11

Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т.д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис.),



то отримуємо, що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X, d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, $x, y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x, y) = 2 \cdot d(x, y)$, $x, y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, $x, y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) — це найбільша відкрита множина в (X, d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\operatorname{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B - \text{відкрита множина в } (X, d)\}.$$

Лекція 8: Топологія метричного простору

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X, d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, $x, y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x, y) = 2 \cdot d(x, y)$, $x, y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, $x, y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) — це найбільша відкрита множина в (X, d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\mathrm{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B \text{ – відкрита множина в } (X, d)\}.$$

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X,d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$, $x,y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x,y) = 2 \cdot d(x,y)$, $x,y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $x,y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) — це найбільша відкрита множина в (X,d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\operatorname{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B \text{ — відкрита множина в } (X,d)\}.$$

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X,d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$, $x,y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x,y) = 2 \cdot d(x,y)$, $x,y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $x,y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) — це найбільша відкрита множина в (X,d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\mathrm{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B - \text{відкрита множина в } (X,d)\}.$$

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X,d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$, $x,y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x,y) = 2 \cdot d(x,y)$, $x,y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $x,y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) — це найбільша відкрита множина в (X,d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\operatorname{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B \text{ — відкрита множина в } (X,d)\}.$$

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X,d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$, $x,y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x,y) = 2 \cdot d(x,y)$, $x,y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $x,y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) — це найбільша відкрита множина в (X,d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\operatorname{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B - \text{відкрита множина в } (X,d)\}.$$

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X, d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, $x, y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x, y) = 2 \cdot d(x, y)$, $x, y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, $x, y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) — це найбільша відкрита множина в (X, d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\operatorname{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B \text{ — відкрита множина в } (X, d)\}.$$

Вправа 2.2.4

Доведіть, якщо (X, d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, $x, y \in X$;

(ii) $\widetilde{d}_2(x, y) = 2 \cdot d(x, y)$, $x, y \in X$;

(iii) $\widetilde{d}_3(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, $x, y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12

Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) — це найбільша відкрита множина в (X, d), яка міститься в A.

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\operatorname{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B - \text{відкрита множина в } (X, d)\}.$$

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) — це найменша замкнена множина в (X,d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X,d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X,d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X,d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X,d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) — це найменша замкнена множина в (X,d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X,d)\}\,.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X,d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X,d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X,d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B \text{ — замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d). Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}\,.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\operatorname{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A),$$

і називатимемо $\operatorname{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) — це найменша замкнена множина в (X,d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X,d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X,d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X,d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X,d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) — це найменша замкнена множина в (X,d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X,d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X,d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X,d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X,d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X,d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X,d) є замкненою множиною.

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана випливає

Твердження 2.2.13

Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$, або $\mathrm{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

і називатимемо $\mathrm{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5

Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

Вправа 2.2.6

Доведіть, що кожна відкрита множини в метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ є відкритою $(\mathbb{R}^2, d_{\pi\varrho})$, але обернене твердження не виконується.

Вправа 2.2.7

Доведіть, що в скінченному метричному просторі кожна множина є одночасно відкритою та замкненою.

Вправа 2.2.8

Доведіть, що в довільному метричному просторі одноточкова множина є замкненою. Виведіть звідси, що в довільному метричному просторі кожна скінченна множина є замкненою.

Вправа 2.2.9

Доведіть, що в метричному просторі $(\mathbb{R}, d_u)$, де d_u — звичайна метрика (див. вправу 2.1.2), відкритими множинами є об'єднання не більше, ніж зліченної кількості попарно неперетинних інтервалів (під *інтервалами* в $\mathbb{R}$ вважаємо множини вигляду (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Вправа 2.2.10

Наведіть приклад нескінченного метричного простору, у якому кожна одноточкова множина є відкритою.

Вправа 2.2.6

Доведіть, що кожна відкрита множини в метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ є відкритою $(\mathbb{R}^2, d_{\pi\varrho})$, але обернене твердження не виконується.

Вправа 2.2.7

Доведіть, що в скінченному метричному просторі кожна множина є одночасно відкритою та замкненою.

Вправа 2.2.8

Доведіть, що в довільному метричному просторі одноточкова множина є замкненою. Виведіть звідси, що в довільному метричному просторі кожна скінченна множина є замкненою.

Вправа 2.2.9

Доведіть, що в метричному просторі $(\mathbb{R}, d_u)$, де d_u — звичайна метрика (див. вправу 2.1.2), відкритими множинами є об'єднання не більше, ніж зліченної кількості попарно неперетинних інтервалів (під *інтервалами* в $\mathbb{R}$ вважаємо множини вигляду (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Вправа 2.2.10

Наведіть приклад нескінченного метричного простору, у якому кожна одноточкова множина є відкритою.

Вправа 2.2.6

Доведіть, що кожна відкрита множини в метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ є відкритою $(\mathbb{R}^2, d_{\pi\varrho})$, але обернене твердження не виконується.

Вправа 2.2.7

Доведіть, що в скінченному метричному просторі кожна множина є одночасно відкритою та замкненою.

Вправа 2.2.8

Доведіть, що в довільному метричному просторі одноточкова множина є замкненою. Виведіть звідси, що в довільному метричному просторі кожна скінченна множина є замкненою.

Вправа 2.2.9

Доведіть, що в метричному просторі $(\mathbb{R}, d_u)$, де d_u — звичайна метрика (див. вправу 2.1.2), відкритими множинами є об'єднання не більше, ніж зліченної кількості попарно неперетинних інтервалів (під *інтервалами* в $\mathbb{R}$ вважаємо множини вигляду (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Вправа 2.2.10

Наведіть приклад нескінченного метричного простору, у якому кожна одноточкова множина є відкритою.

Вправа 2.2.6

Доведіть, що кожна відкрита множини в метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ є відкритою $(\mathbb{R}^2, d_{\pi\varrho})$, але обернене твердження не виконується.

Вправа 2.2.7

Доведіть, що в скінченному метричному просторі кожна множина є одночасно відкритою та замкненою.

Вправа 2.2.8

Доведіть, що в довільному метричному просторі одноточкова множина є замкненою. Виведіть звідси, що в довільному метричному просторі кожна скінченна множина є замкненою.

Вправа 2.2.9

Доведіть, що в метричному просторі $(\mathbb{R}, d_u)$, де d_u — звичайна метрика (див. вправу 2.1.2), відкритими множинами є об'єднання не більше, ніж зліченної кількості попарно неперетинних інтервалів (під *інтервалами* в $\mathbb{R}$ вважаємо множини вигляду (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Вправа 2.2.10

Наведіть приклад нескінченного метричного простору, у якому кожна одноточкова множина є відкритою.

Вправа 2.2.6

Доведіть, що кожна відкрита множини в метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ є відкритою $(\mathbb{R}^2, d_{\pi\varrho})$, але обернене твердження не виконується.

Вправа 2.2.7

Доведіть, що в скінченному метричному просторі кожна множина є одночасно відкритою та замкненою.

Вправа 2.2.8

Доведіть, що в довільному метричному просторі одноточкова множина є замкненою. Виведіть звідси, що в довільному метричному просторі кожна скінченна множина є замкненою.

Вправа 2.2.9

Доведіть, що в метричному просторі $(\mathbb{R}, d_u)$, де d_u — звичайна метрика (див. вправу 2.1.2), відкритими множинами є об'єднання не більше, ніж зліченної кількості попарно неперетинних інтервалів (під *інтервалами* в $\mathbb{R}$ вважаємо множини вигляду (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Вправа 2.2.10

Наведіть приклад нескінченного метричного простору, у якому кожна одноточкова множина є відкритою.

Вправа 2.2.6

Доведіть, що кожна відкрита множини в метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ є відкритою $(\mathbb{R}^2, d_{\pi\varrho})$, але обернене твердження не виконується.

Вправа 2.2.7

Доведіть, що в скінченному метричному просторі кожна множина є одночасно відкритою та замкненою.

Вправа 2.2.8

Доведіть, що в довільному метричному просторі одноточкова множина є замкненою. Виведіть звідси, що в довільному метричному просторі кожна скінченна множина є замкненою.

Вправа 2.2.9

Доведіть, що в метричному просторі $(\mathbb{R}, d_u)$, де d_u — звичайна метрика (див. вправу 2.1.2), відкритими множинами є об'єднання не більше, ніж зліченної кількості попарно неперетинних інтервалів (під *інтервалами* в $\mathbb{R}$ вважаємо множини вигляду (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Вправа 2.2.10

Наведіть приклад нескінченного метричного простору, у якому кожна одноточкова множина є відкритою.

Означення 2.2.14

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11

Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12

Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Означення 2.2.14

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11

Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12

Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Означення 2.2.14

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11

Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12

Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Означення 2.2.14

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11

Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12

Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Означення 2.2.14

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11

Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12

Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Означення 2.2.14

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11

Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12

Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Означення 2.2.14

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11

Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12

Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Вправа 2.2.13

Нехай ρ — одна з метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$. Знайдіть внутрішність, замикання, межу та похідну множину таких підмножин метричного простору $(\mathbb{R}^2, \rho)$:

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$;
(ii) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant -1\}$;
(iii) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
(iv) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$;
(v) $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 2\}$;
(vi) $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$;
(vii) $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 3 \text{ і } |y| \leqslant 3\}$.

Вправа 2.2.14

Доведіть, що для довільної точки x множини A метричного простору (X, d) виконується висловлення: $x \in \mathrm{Int}(A)$ або $x \in \mathrm{Cl}(X \setminus A)$.

Вправа 2.2.13

Нехай ρ — одна з метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$. Знайдіть внутрішність, замикання, межу та похідну множину таких підмножин метричного простору $(\mathbb{R}^2, \rho)$:

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$;
(ii) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant -1\}$;
(iii) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
(iv) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$;
(v) $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 2\}$;
(vi) $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$;
(vii) $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 3 \text{ і } |y| \leqslant 3\}$.

Вправа 2.2.14

Доведіть, що для довільної точки x множини A метричного простору (X, d) виконується висловлення: $x \in \mathrm{Int}(A)$ або $x \in \mathrm{Cl}(X \setminus A)$.

Вправа 2.2.13

Нехай ρ — одна з метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$. Знайдіть внутрішність, замикання, межу та похідну множину таких підмножин метричного простору $(\mathbb{R}^2, \rho)$:

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$;
(ii) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant -1\}$;
(iii) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
(iv) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$;
(v) $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 2\}$;
(vi) $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$;
(vii) $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 3 \text{ і } |y| \leqslant 3\}$.

Вправа 2.2.14

Доведіть, що для довільної точки x множини A метричного простору (X, d) виконується висловлення: $x \in \operatorname{Int}(A)$ або $x \in \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Вправа 2.2.15

Доведіть, що для довільних множин A і B метричного простору (X, d) виконуються такі твердження:

(i) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

(ii) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;

(iii) $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$;

(iv) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Наведіть приклади, що включення в твердженнях (iii) і (iv) не можна замінити на рівності.

Вправа 2.2.16

Наведіть приклад двох диз'юнктних множини A і B в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою, для яких справджується рівність $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(B)$.

Вправа 2.2.15

Доведіть, що для довільних множин A і B метричного простору (X, d) виконуються такі твердження:

(i) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

(ii) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;

(iii) $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$;

(iv) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Наведіть приклади, що включення в твердженнях (iii) і (iv) не можна замінити на рівності.

Вправа 2.2.16

Наведіть приклад двох диз'юнктних множини A і B в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою, для яких справджується рівність $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(B)$.

Вправа 2.2.15

Доведіть, що для довільних множин A і B метричного простору (X, d) виконуються такі твердження:

(i) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;

(ii) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;

(iii) $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$;

(iv) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Наведіть приклади, що включення в твердженнях (iii) і (iv) не можна замінити на рівності.

Вправа 2.2.16

Наведіть приклад двох диз'юнктних множини A і B в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою, для яких справджується рівність $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(B)$.

Дякую за увагу!!!