Метрики та метричні простори

Топологія

Лекція 7

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y\colon Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y)=0$ тоді і лише тоді, коли $x=y$, для $x,y\in X$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$ для всіх $x,y\in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ для всіх $x,y,z\in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y\colon Y\times Y\to\mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$ на $Y\times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y,d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y\subseteq X$ і $d|_{Y\times Y}=\rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y\subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y\colon Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(*i*) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(*ii*) $d(x,y) = d(y,x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(*iii*) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Іноді для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y\colon Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y)=0$ тоді і лише тоді, коли $x=y$, для $x,y\in X$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$ для всіх $x,y\in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ для всіх $x,y,z\in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y\colon Y\times Y\to\mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$ на $Y\times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y,d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y\subseteq X$ і $d|_{Y\times Y}=\rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y\subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X, d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X, d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X, d). Очевидно, що метричний простір (Y, ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X, d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y \times Y} = \rho$. Також, якщо (Y, ρ) є підпростором метричного простору (X, d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X, d) на множині $Y \subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y)=0$ тоді і лише тоді, коли $x=y$, для $x,y\in X$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$ для всіх $x,y\in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ для всіх $x,y,z\in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y\colon Y\times Y\to\mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$ на $Y\times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y,d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y\subseteq X$ і $d|_{Y\times Y}=\rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y\subseteq X$.

Означення 2.1.1

Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(i) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);

(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y \subseteq X$.

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+\ldots+|x_n-y_n|^p},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p=1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Лекція 7: Метрики та метричні простори

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+\ldots+|x_n-y_n|^p},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p=1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|.$$

Лекція 7: Метрики та метричні простори

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+\ldots+|x_n-y_n|^p},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p=1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Приклад 2.1.2

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3

Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+\ldots+|x_n-y_n|^p},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p=1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|.$$

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *max-метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \qquad (1)$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається $\max$-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ $((\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d))$ є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ $(\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n)$.

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ $(\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ $(\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається $\max$-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x, y) = |x - y| \qquad (1)$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається max-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається max-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається max-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

де $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається max-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається $\max$-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається max-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ $((\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d))$ є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ $(\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n)$.

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ $(\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно$)$ індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ $(\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно$)$.

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається $\max$-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається $\max$-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається $\max$-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \qquad (1)$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.4

Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\},$$

де $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається $\max$-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n, d)$ ($(\mathbb{Z}^n, d)$, $(\mathbb{Q}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$) є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n, d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1

Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.5

На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x, y \in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3

Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4

Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою прерій*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X,d_X) \times (Y,d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X,d_X)\times(Y,d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X,d_X) \times (Y,d_Y)$.

Приклад 2.1.6

Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1; \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою преріїв*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5

Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6

Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Вправа 2.1.8

Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X,d_X) \times (Y,d_Y)$.

Дякую за увагу!!!