Потужність множини. Кардинали

Топологія

Лекція 4

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A злічена* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f \colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f \colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f: A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f: A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f: A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f: A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що “*потужність множини A дорівнює потужності множини B*”. Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін’єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0, 1]|$, де $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. A запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A злічена* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, а тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (точна) верхня грань довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (точна) верхня грань довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{m}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (точна) верхня грань довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (точна) верхня грань довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (точна) верхня грань довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного перетворення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для добутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (*точна*) *верхня грань* довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots. \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \dots & c_k = b_k, & \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \dots & c_{k+n} = a_n, & \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}\,,$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}\,, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{aligned} &c_1 = b_1, && c_2 = b_2, && \ldots && c_k = b_k, \\ &c_{k+1} = a_1, && c_{k+2} = a_2, && \ldots && c_{k+n} = a_n, && \ldots\,. \end{aligned}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \dots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \dots & c_{k+n} = a_n, \quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.38

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \dots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \dots & c_{k+n} = a_n, \quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots. \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \dots & c_{2n-1} = a_n, & \dots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \dots & c_{2n} = b_n, & \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \dots & c_{2n-1} = a_n, & \dots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \dots & c_{2n} = b_n, & \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llcll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \dots & c_{2n-1} = a_n, & \dots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \dots & c_{2n} = b_n, & \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \dots & c_{2n-1} = a_n, & \dots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \dots & c_{2n} = b_n, & \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[dd] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_1 \arrow[uur] & b_2 \arrow[uur] & b_3 \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[uur] & b_n \arrow[uur] & b_{n+1} \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на останньому рисунку.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на останньому рисунку.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[dd] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_1 \arrow[uur] & b_2 \arrow[uur] & b_3 \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[uur] & b_n \arrow[uur] & b_{n+1} \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на останньому рисунку.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[dd] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_1 \arrow[uur] & b_2 \arrow[uur] & b_3 \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[uur] & b_n \arrow[uur] & b_{n+1} \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на останньому рисунку.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[dd] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_1 \arrow[uur] & b_2 \arrow[uur] & b_3 \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[uur] & b_n \arrow[uur] & b_{n+1} \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на останньому рисунку.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[dd] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_1 \arrow[uur] & b_2 \arrow[uur] & b_3 \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[uur] & b_n \arrow[uur] & b_{n+1} \arrow[uur] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на останньому рисунку.

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{array}{l} A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\ A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\ A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array}$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{array}{l}
A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\},\\
A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\},\\
A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\},\\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\},\\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічена.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$
\begin{array}{llllll}
A_1 & = \{a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, a_{1,n}, & \ldots\}, \\
A_2 & = \{a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, a_{2,n}, & \ldots\}, \\
A_3 & = \{a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, a_{3,n}, & \ldots\}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_n & = \{a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, a_{n,n}, & \ldots\}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$
\begin{array}{l}
A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\ A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\ A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned}$$

Вправа 1.2.15

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.40

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{array}{l}
A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Запропоновану нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Запропоновану нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Запропоновану нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}\,,$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}\,.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}\,.$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рисунках.

Вправа 1.2.16

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.41

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на цьому рисунку.

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на цьому рисунку.

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на цьому рисунку.

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на цьому рисунку.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин злічення множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.17

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C\colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f\colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f\colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C : C \to C \cup B$. Означимо відображення $f : A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f : A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C : C \to C \cup B$. Означимо відображення $f : A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f : A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C : C \to C \cup B$. Означимо відображення $f : A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f : A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.18

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незлічення множина та B — злічення підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох злічення множин — злічення множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незлічення множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — злічена підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох злічених множин — злічена множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C : C \to C \cup B$. Означимо відображення $f : A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f : A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C : C \to C \cup B$. Означимо відображення $f : A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f : A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незлічена множина та B — злічена підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох злічених множин — злічена множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незлічена множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить злічену нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — злічена підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох злічених множин — злічена множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.19

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;

(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.20

Які з нижче перелічених множин є попарно рівнопотужними?

(i) $\mathbb{R}$;
(ii) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$;
(iii) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$;
(iv) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
(v) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$;
(vi) $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,4,5\}$;
(vii) $\mathbb{R}\setminus(0,1)$;
(viii) $\mathbb{R}\setminus[0,1)$;
(ix) $\mathbb{R}\setminus[0,1]$;
(x) $\mathbb{R}\setminus([0,1]\cup(3,4))$;
(xi) $\mathbb{R}\setminus([0,1]\cup\{3,4\})$;
(xii) $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}[2i,2i+1]$;
(xiii) $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(2i,2i+1]$;
(xiv) $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(2i,2i+1)$;
(xv) $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}[2i,2i+1]$;
(xvi) $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(2i,2i+1]$;
(xvii) $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(2i,2i+1)$.

Відповідь обґрунтуйте.

Вправа 1.2.20

Які з нижче перелічених множин є попарно рівнопотужними?

(i) $\mathbb{R}$;
(ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
(iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
(v) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$;
(vi) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(vii) $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$;
(viii) $\mathbb{R} \setminus [0, 1)$;
(ix) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$;
(x) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup (3, 4))$;
(xi) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup \{3, 4\})$;
(xii) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;
(xiii) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;
(xiv) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$;
(xv) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;
(xvi) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;
(xvii) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$.

Відповідь обґрунтуйте.

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f: [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є біекцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a,b], \qquad [c,d), \qquad (e,f], \qquad (g,h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a,b], \qquad [a,b), \qquad (a,b], \qquad (a,b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a,b], \qquad \text{і} \qquad [c,d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f\colon [a,b] \to [c,d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a,b]$ на $[c,d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a,b]$ і $[c,d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f: [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f \colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

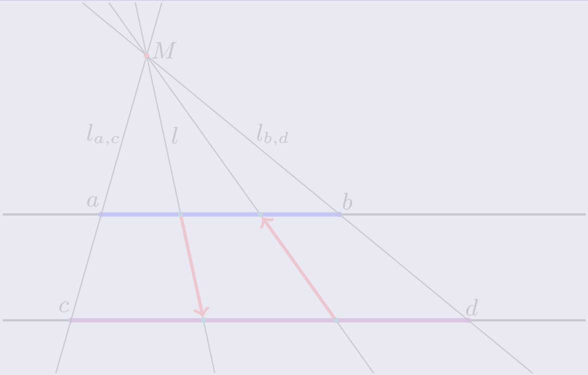
$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.)

Приклад 1.2.45 (продовження)

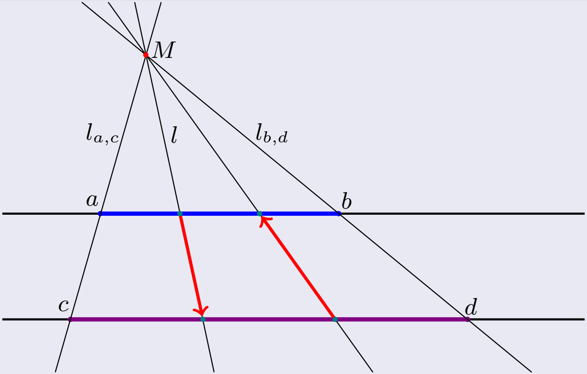
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a-b<c-d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає відрізок $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає відрізок $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



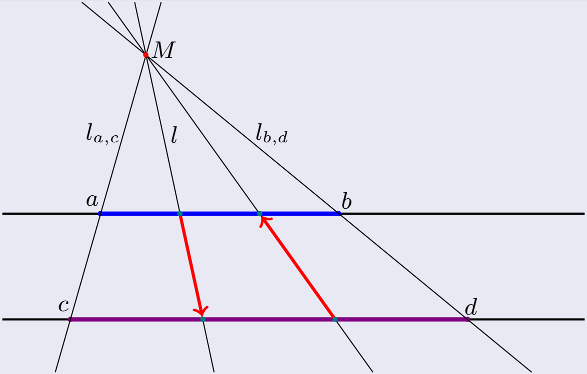
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



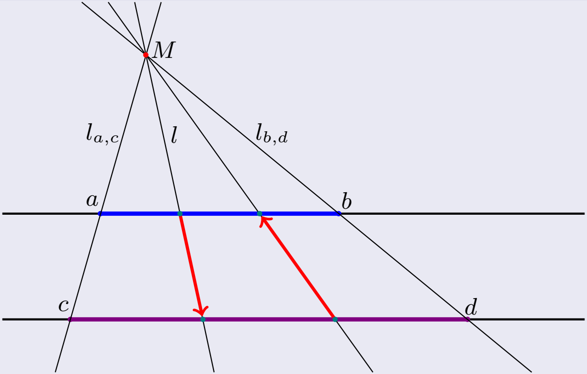
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



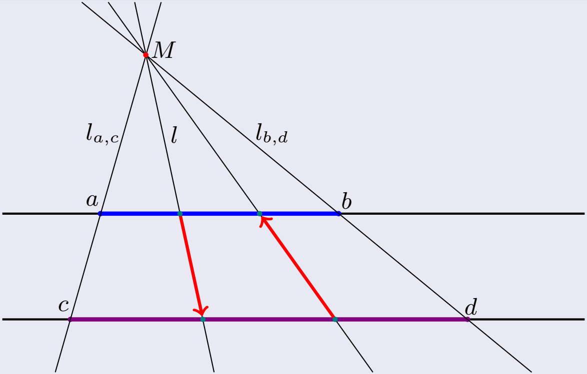
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



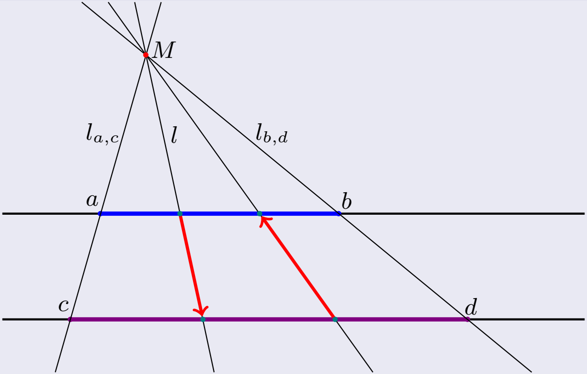
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



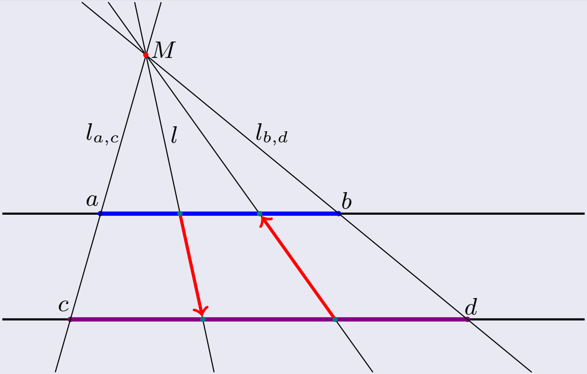
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



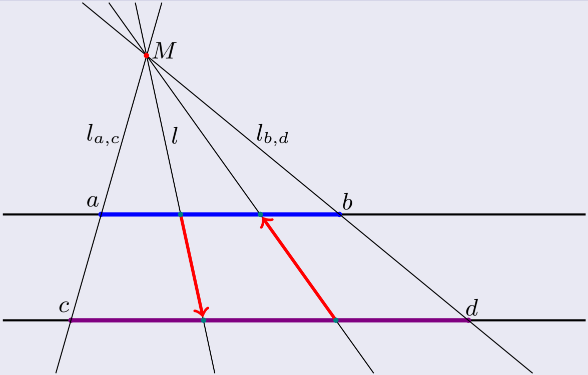
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.45 (продовження)



Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає відрізок $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає відрізок $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.46

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots.$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\ ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\ ,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\ .$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\,,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\,,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\,.$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots ,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots .$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots ,$$

де $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots ,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots .$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots,$$

де $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots.$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots ,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots .$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\,,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\,,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\,.$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots.$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $a\mapsto(b,c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.2.47

Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0, 1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \cdots a_na_{n+1} \cdots ,$$

де $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0, 1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9 \cdots a_{2n-1}a_{2n+1} \cdots ,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10} \cdots a_{2n}a_{2n+2} \cdots .$$

Отже, ми визначили відображення $F: [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$, $a \mapsto (b, c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Вправа 1.2.21

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.2.22

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу даігоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Вправа 1.2.21

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.2.22

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу даігоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Вправа 1.2.21

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.2.22

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу даігоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Лекція 4: Потужність множини. Кардинали

Вправа 1.2.21

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.2.22

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу даігоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0, 1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0, 1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots\,,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots\,,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots\,,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots\,,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots\,,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\,,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots, \\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots, \\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots, \\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots, \\
&\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots, \\
&\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0, 1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0, 1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots, \\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots, \\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots, \\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots, \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots, \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незлічення множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — злічення множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots, \\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots, \\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots, \\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots, \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots, \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots, \\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots, \\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots, \\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots, \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots, \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Приклад 1.2.48 (продовження)

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

Дякую за увагу!!!