Обробка зображень і мультимедіа

Олег Гутік

Лекція 17: Стиснення зображень, XI. Перетворення Гаара

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0,1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0, 1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0,1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0,1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд.

Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0, 1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд.

Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0, 1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0, 1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0,1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0,1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0,1]$ і для $k = 0, 1, \dots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0,1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Перетворення Гаара використовується на практиці для відображення частоти піддіапазону. Воно буде обговорюватися в подальших лекціях. Однак, через простоту цього відображення, його можна пояснити в термінах базисних зображень. Тому ми включили його розгляд. Перетворення Гаара ґрунтується на функціях Гаара $h_k(x)$, які визначаються при $x \in [0, 1]$ і для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, де $N = 2^n$.

Перш, ніж визначити це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна подати у вигляді суми $k = 2^p + q - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q = 0$ або 1 при $p = 0$, і $1 \leqslant q \leqslant 2^p$ при $p \neq 0$. Для $N = 4 = 2^2$, наприклад, маємо такі зображення:

$$0 = 2^0 + 0 - 1, \quad 1 = 2^0 + 1 - 1, \quad 2 = 2^1 + 1 - 1 \quad \text{і} \quad 3 = 2^1 + 2 - 1.$$

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \frac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \frac{q-1/2}{2^p}, \\ -\frac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \frac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \frac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \overset{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \overset{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\mathtt{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\mathtt{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \frac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \frac{q-1/2}{2^p}, \\ -\frac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \frac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \frac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

Базисні функції Гаара визначаються за формулами

$$h_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

і

$$h_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q-1/2}{2^p}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2}, & \text{якщо } \dfrac{q-1/2}{2^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{q}{2^p}, \\ 0, & \text{для інших } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Тепер можна побудувати $N \times N$-матрицю $\boldsymbol{A}_N$ перетворення Гаара. Елемент з індексами i, j цієї матриці дорівнює $h_i(j)$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $j = 0/N, 1/N, \ldots, (N-1)/N$. Наприклад,

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} h_0(0/2) & h_0(1/2) \\ h_1(0/2) & h_1(1/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(нагадаємо, що $p = 0$ та $q = 1$ при $i = 1$).

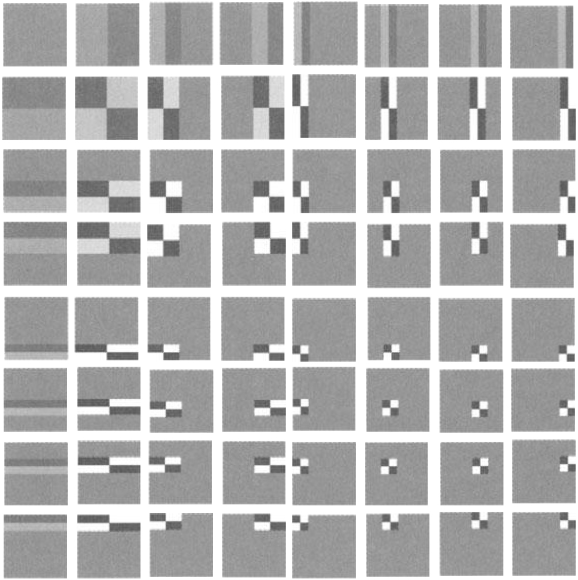
```
Needs["GraphicsImage`"] (* Draws 2D Haar Coefficients *)
n=8;
h[k_,x_]:=Module[{p,q}, If[k==0, 1/Sqrt[n],            (* h_0(x) *)
 p=0; While[2^p<=k ,p++]; p--; q=k-2^p+1; (* if k>0, calc. p, q *)
 If[(q-1)/(2^p)<=x && x<(q-.5)/(2^p),2^(p/2),
  If[(q-.5)/(2^p)<=x && x<q/(2^p),-2^(p/2),0]]]];
HaarMatrix=Table[h[k,x], {k,0,7}, {x,0,7/n,1/n}] //N;
HaarTensor=Array[Outer[Times, HaarMatrix[[#1]],HaarMatrix[[#2]]]&,
 {n,n}];
Show[GraphicsArray[Map[GraphicsImage[#, {-2,2}]&, HaarTensor,{2}]]]
```

На рис. викладено програму для обчислення цієї матриці для будь-якого числа N,

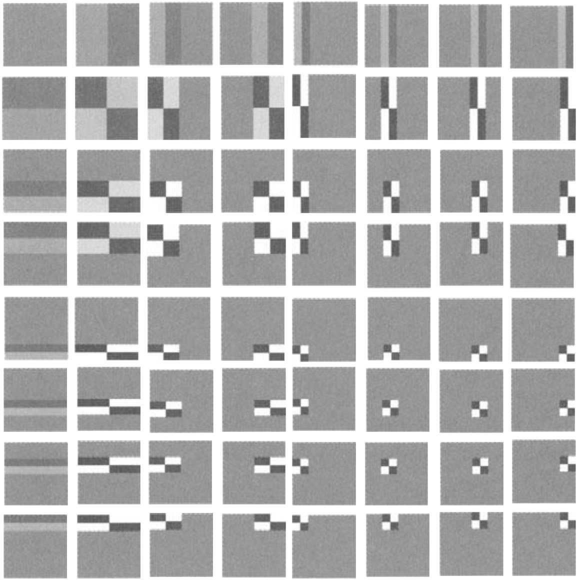
```
Needs["GraphicsImage`"] (* Draws 2D Haar Coefficients *)
n=8;
h[k_,x_]:=Module[{p,q}, If[k==0, 1/Sqrt[n],            (* h_0(x) *)
 p=0; While[2^p<=k ,p++]; p--; q=k-2^p+1; (* if k>0, calc. p, q *)
 If[(q-1)/(2^p)<=x && x<(q-.5)/(2^p),2^(p/2),
  If[(q-.5)/(2^p)<=x && x<q/(2^p),-2^(p/2),0]]]];
HaarMatrix=Table[h[k,x], {k,0,7}, {x,0,7/n,1/n}] //N;
HaarTensor=Array[Outer[Times, HaarMatrix[[#1]],HaarMatrix[[#2]]]&,
 {n,n}];
Show[GraphicsArray[Map[GraphicsImage[#, {-2,2}]&, HaarTensor,{2}]]]
```

На рис. викладено програму для обчислення цієї матриці для будь-якого числа N,

Стиснення зображень. Перетворення Гаара



а також побудовані базисні зображення при $N = 8$.



а також побудовані базисні зображення при $N = 8$.

Стиснення зображень. Перетворення Гаара

Випишемо матриці $\boldsymbol{A}_4$ та $\boldsymbol{A}_8$.

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} h_0(0/4) & h_0(1/4) & h_0(2/4) & h_0(3/4) \\ h_1(0/4) & h_1(1/4) & h_1(2/4) & h_1(3/4) \\ h_2(0/4) & h_2(1/4) & h_2(2/4) & h_2(3/4) \\ h_3(0/4) & h_3(1/4) & h_3(2/4) & h_3(3/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для блоку пікселів розміру $N \times N$, де $N = 2^n$, його перетворення Гаара обчислюється за формулою $\boldsymbol{A}_N \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_N$

Випишемо матриці $\boldsymbol{A}_4$ та $\boldsymbol{A}_8$.

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} h_0(0/4) & h_0(1/4) & h_0(2/4) & h_0(3/4) \\ h_1(0/4) & h_1(1/4) & h_1(2/4) & h_1(3/4) \\ h_2(0/4) & h_2(1/4) & h_2(2/4) & h_2(3/4) \\ h_3(0/4) & h_3(1/4) & h_3(2/4) & h_3(3/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для блоку пікселів розміру $N \times N$, де $N = 2^n$, його перетворення Гаара обчислюється за формулою $\boldsymbol{A}_N \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_N$

Випишемо матриці $\boldsymbol{A}_4$ та $\boldsymbol{A}_8$.

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} h_0(0/4) & h_0(1/4) & h_0(2/4) & h_0(3/4) \\ h_1(0/4) & h_1(1/4) & h_1(2/4) & h_1(3/4) \\ h_2(0/4) & h_2(1/4) & h_2(2/4) & h_2(3/4) \\ h_3(0/4) & h_3(1/4) & h_3(2/4) & h_3(3/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для блоку пікселів розміру $N \times N$, де $N = 2^n$, його перетворення Гаара обчислюється за формулою $\boldsymbol{A}_N \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_N$

Випишемо матриці $\boldsymbol{A}_4$ та $\boldsymbol{A}_8$.

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} h_0(0/4) & h_0(1/4) & h_0(2/4) & h_0(3/4) \\ h_1(0/4) & h_1(1/4) & h_1(2/4) & h_1(3/4) \\ h_2(0/4) & h_2(1/4) & h_2(2/4) & h_2(3/4) \\ h_3(0/4) & h_3(1/4) & h_3(2/4) & h_3(3/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для блоку пікселів розміру $N \times N$, де $N = 2^n$, його перетворення Гаара обчислюється за формулою $\boldsymbol{A}_N \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_N$

Випишемо матриці $\boldsymbol{A}_4$ та $\boldsymbol{A}_8$.

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} h_0(0/4) & h_0(1/4) & h_0(2/4) & h_0(3/4) \\ h_1(0/4) & h_1(1/4) & h_1(2/4) & h_1(3/4) \\ h_2(0/4) & h_2(1/4) & h_2(2/4) & h_2(3/4) \\ h_3(0/4) & h_3(1/4) & h_3(2/4) & h_3(3/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для блоку пікселів розміру $N \times N$, де $N = 2^n$, його перетворення Гаара обчислюється за формулою $\boldsymbol{A}_N \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_N$

Випишемо матриці $\boldsymbol{A}_4$ та $\boldsymbol{A}_8$.

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} h_0(0/4) & h_0(1/4) & h_0(2/4) & h_0(3/4) \\ h_1(0/4) & h_1(1/4) & h_1(2/4) & h_1(3/4) \\ h_2(0/4) & h_2(1/4) & h_2(2/4) & h_2(3/4) \\ h_3(0/4) & h_3(1/4) & h_3(2/4) & h_3(3/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для блоку пікселів розміру $N \times N$, де $N = 2^n$, його перетворення Гаара обчислюється за формулою $\boldsymbol{A}_N \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_N$

Випишемо матриці $\boldsymbol{A}_4$ та $\boldsymbol{A}_8$.

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} h_0(0/4) & h_0(1/4) & h_0(2/4) & h_0(3/4) \\ h_1(0/4) & h_1(1/4) & h_1(2/4) & h_1(3/4) \\ h_2(0/4) & h_2(1/4) & h_2(2/4) & h_2(3/4) \\ h_3(0/4) & h_3(1/4) & h_3(2/4) & h_3(3/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для блоку пікселів розміру $N \times N$, де $N = 2^n$, його перетворення Гаара обчислюється за формулою $\boldsymbol{A}_N \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_N$

Дякую за увагу!