

Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Дискретна математика



Лекція 23

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (1)).

Теорема 2.3.24

Для довільних натуральних чисел n і k , $k \leq n$, виконується рівність

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

Доведення. За формулою (2)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. ■

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається *формулою Паскаля*.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається *трикутником Паскаля*.

На рис.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

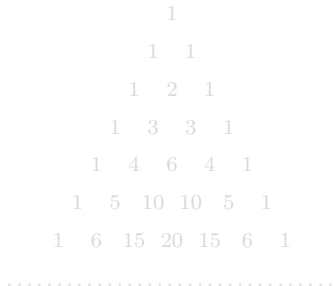
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається *формулою Паскаля*.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається *трикутником Паскаля*.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

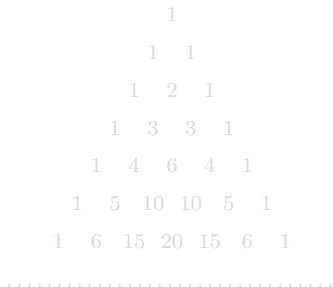
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

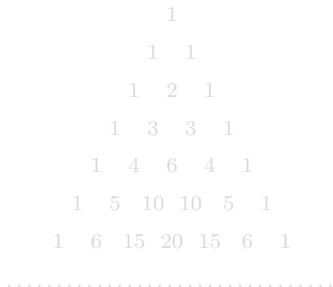
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

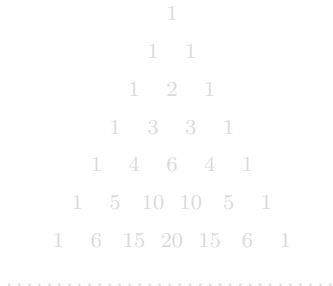
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

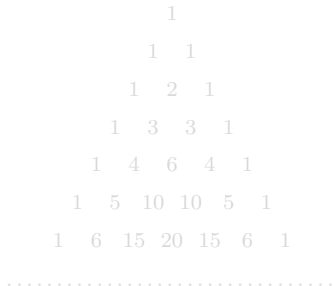
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

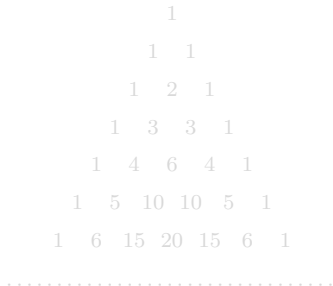
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

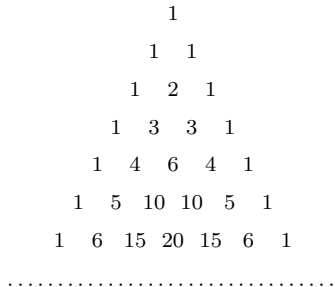
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають **біноміальними коефіцієнтами**. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

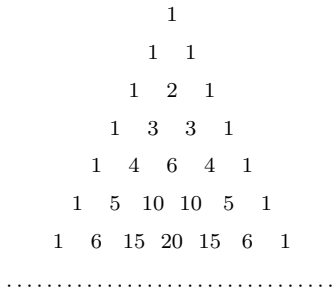
Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.



кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Лекція 23: Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Рівність (1)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (1)$$

називається **формулою Паскаля**.

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення комбінацій C_n^k , які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля**.

На рис.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & & 1 & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & & 1 & \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа n , то з формули Паскаля випливає, що n -рядок трикутника Паскаля складений з чисел C_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Дякую за увагу!!!

Дякую за увагу!!!

Дякую за увагу!!!