Частковий порядок. Потужність множини

Дискретна математика

Лекція 11

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що *"x менше, або рівне за y"*. Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що *“x менше, або рівне за y”*. Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

1) *рефлексивним*, якщо $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричним*, якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$;
4) *транзитивним*, якщо якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що *“x менше, або рівне за y”*. Множина X із заданим на ній передпорядком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.9.15

Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.9.16

Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$, то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на X до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на X до $\leqslant$.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.9.17

Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.9.18

Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічена* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f: A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f: A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f: A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0, 1]|$, де $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f: A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0, 1]|$, де $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічена* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f: A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f: A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f: A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f: A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \quad \text{і} \quad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0, 1]|$, де $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рінопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини A *зліченна* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна)

Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.9.20

Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

Теорема 1.9.38

Нехай X — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \dots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \dots & c_{k+n} = a_n, \quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \dots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \dots & c_{k+n} = a_n, \quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \dots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \dots & c_{k+n} = a_n, \quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.

Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.

Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$c_1 = b_1, \quad c_2 = b_2, \quad \ldots \quad c_k = b_k,$$
$$c_{k+1} = a_1, \quad c_{k+2} = a_2, \quad \ldots \quad c_{k+n} = a_n, \quad \ldots .$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots \,. \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.9.39

Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.
Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \dots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \dots & c_{k+n} = a_n, \quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \dots & c_{2n-1} = a_n, \quad \dots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \dots & c_{2n} = b_n, \quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots. \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots. \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, \quad \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, \quad \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.40

Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Множину

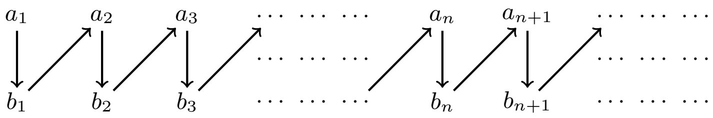
$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.



Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[d] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[d] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо читачеві самостійно записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.21

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо читачеві самостійно записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.21

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина зліченна.

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[d] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[d] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо читачеві самостійно записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.21

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо читачеві самостійно записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.21

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина зліченна.

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & & a_2 & \longrightarrow & a_3 & & \cdots\ \cdots\ \cdots & \longrightarrow & a_n & & a_{n+1} \longrightarrow \cdots\ \cdots\ \cdots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \cdots \qquad \cdots & & \downarrow & & \uparrow \qquad \cdots \qquad \cdots \\
b_1 & \longrightarrow & b_2 & & b_3 & \longrightarrow & \cdots\ \cdots\ \cdots & & b_n & \longrightarrow & b_{n+1} \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{array}
$$

Ми пропонуємо читачеві самостійно записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.21

Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин злічена множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{array}{l} A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\ A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\ A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array}$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,n}, \dots\},\\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots, a_{2,n}, \dots\},\\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots, a_{3,n}, \dots\},\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots, a_{n,n}, \dots\},\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{aligned}$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$
\begin{array}{lcl}
A_1 & = & \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 & = & \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 & = & \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n & = & \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{array}{l} A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\ A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\ A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array}$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{array}{llllll}
A_1 & = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 & = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 & = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n & = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.41

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$
\begin{array}{ll}
A_1 & = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 & = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 & = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
A_n & = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

Нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рис.

Вправа 1.9.22

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рис.

Вправа 1.9.22

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рис.

Вправа 1.9.22

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина зліченна.

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рис.

Вправа 1.9.22

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічена.

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис.

$$
\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ми пропонуємо слухачам записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на попередніх двох рис.

Вправа 1.9.22

Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічена.

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}\,, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}\,.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}\,.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

Приклад 1.9.42

Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.
Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B,\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості злічених множин злічена множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин злічення множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин злічення множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин злічення множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин злічена множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на попередньому рис.

Вправа 1.9.23

Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.9.43

Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C : C \to C \cup B$. Означимо відображення $f : A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f : A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C\colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f\colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f\colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C : C \to C \cup B$. Означимо відображення $f: A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f: A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(*i*) $|A \setminus B| = 0$;
(*ii*) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(*iii*) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;

(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;

(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.24

Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.9.44

Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.43 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Лекція 11: Частковий порядок. Потужність множини

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(*i*) $|A \setminus B| = 0$;
(*ii*) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(*iii*) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(*iv*) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує біективне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є біективним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(*i*) $|A \setminus B| = 0$;
(*ii*) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(*iii*) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(*iv*) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незлічення множина та B — злічення підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох злічених множин — злічення множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незлічення множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незлічена множина та B — злічена підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох злічених множин — злічена множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незлічена множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить злічену нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(*i*) $|A \setminus B| = 0$;
(*ii*) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(*iii*) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(*iv*) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.
Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.25

Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.45

Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.9.26

Які з нижче перелічених множин є попарно рівнопотужними?

(i) $\mathbb{R}$;

(ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

(iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(v) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$;

(vi) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(vii) $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$;

$(viii)$ $\mathbb{R} \setminus [0, 1)$;

(ix) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$;

(x) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup (3, 4))$;

(xi) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup \{3, 4\})$;

(xii) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;

$(xiii)$ $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;

(xiv) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$;

(xv) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;

(xvi) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;

$(xvii)$ $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$.

Відповідь обгрунтуйте.

Вправа 1.9.26

Які з нижче перелічених множин є попарно рівнопотужними?

(*i*) $\mathbb{R}$;
(*ii*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
(*iii*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
(*iv*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
(*v*) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$;
(*vi*) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(*vii*) $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$;
(*viii*) $\mathbb{R} \setminus [0, 1)$;
(*ix*) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$;
(*x*) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup (3, 4))$;
(*xi*) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup \{3, 4\})$;
(*xii*) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;
(*xiii*) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;
(*xiv*) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$;
(*xv*) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;
(*xvi*) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;
(*xvii*) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$.

Відповідь обґрунтуйте.

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є біекцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є біекцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f \colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f\colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

Приклад 1.9.46

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

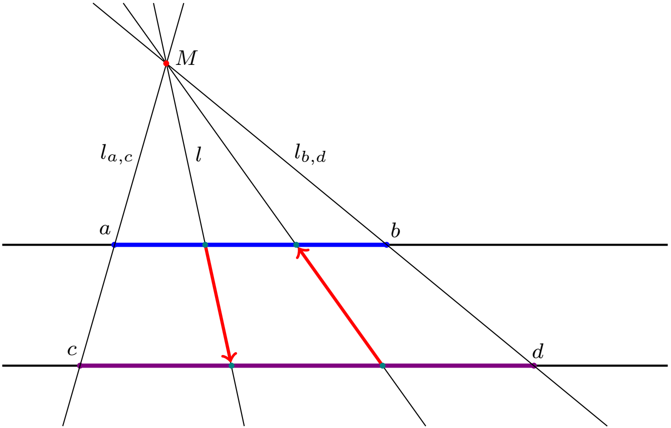
$$[a, b], \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні. Якщо $|a - b| = |c - d|$, то відображення $f : [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

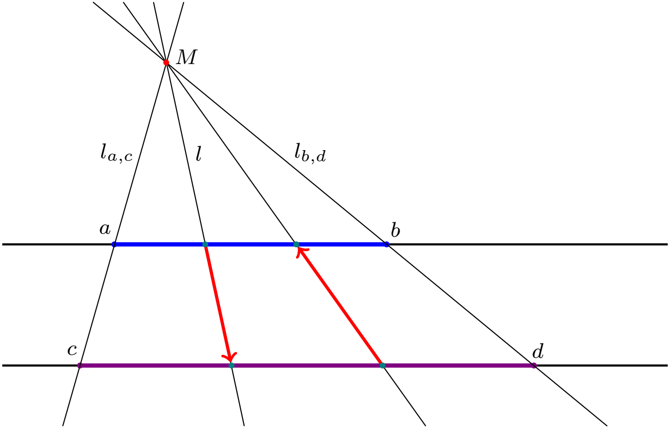
$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $|a - b| < |c - d|$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис.).

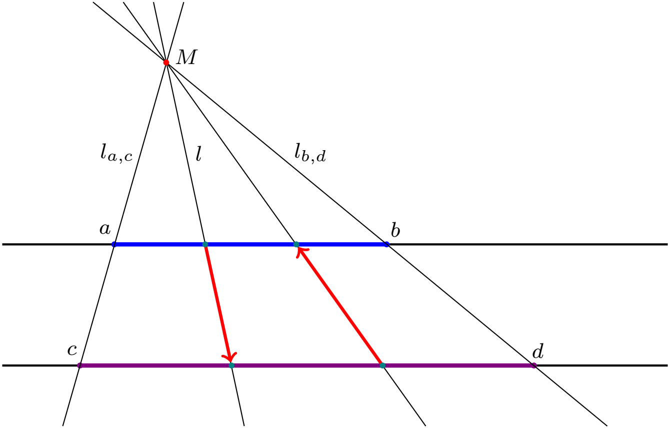
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $|a-b|<|c-d|$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис.).



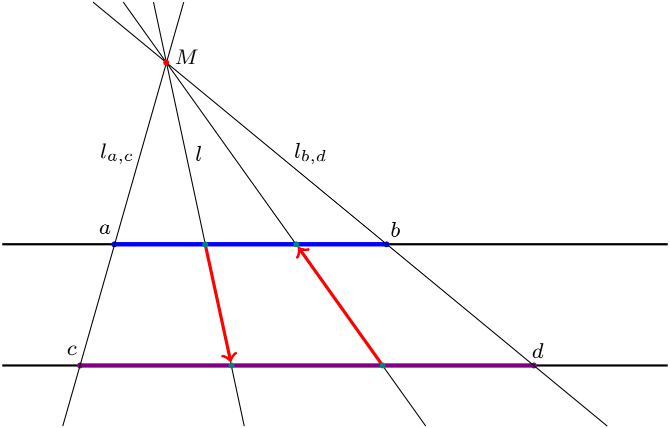
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $|a-b|<|c-d|$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис.).



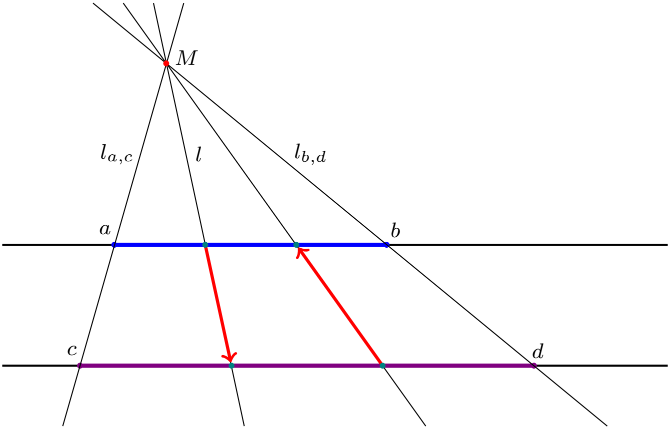
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $|a-b|<|c-d|$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис.).



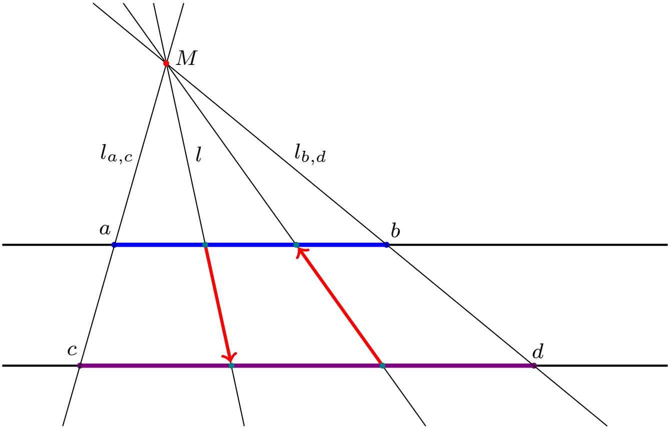
Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $|a - b| < |c - d|$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає $[c, d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис.).



Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $|a-b| < |c-d|$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис.).



Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $|a-b|<|c-d|$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис.).



Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $|a-b|<|c-d|$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис.).

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

біективне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0,1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0,1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.47

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon\ (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1] \times [0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \cdots a_n a_{n+1} \cdots ,$$

де $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9 \cdots a_{2n-1}a_{2n+1} \cdots ;$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10} \cdots a_{2n}a_{2n+2} \cdots .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F \colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1], \quad a \mapsto (b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1] \times [0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0, 1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \cdots a_na_{n+1} \cdots ,$$

де $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0, 1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9 \cdots a_{2n-1}a_{2n+1} \cdots ,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10} \cdots a_{2n}a_{2n+2} \cdots .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1], \quad a \mapsto (b, c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0, 1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} \cdots a_n a_{n+1} \cdots ,$$

де $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0, 1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 \cdots a_{2n-1} a_{2n+1} \cdots ,$$

$$c = 0{,}a_2 a_4 a_6 a_8 a_{10} \cdots a_{2n} a_{2n+2} \cdots .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F \colon [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1], \quad a \mapsto (b, c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots.$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1], \quad a\mapsto(b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0, 1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} \cdots a_n a_{n+1} \cdots ,$$

де $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0, 1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 \cdots a_{2n-1} a_{2n+1} \cdots ,$$

$$c = 0{,}a_2 a_4 a_6 a_8 a_{10} \cdots a_{2n} a_{2n+2} \cdots .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F \colon [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1], \quad a \mapsto (b, c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1] \times [0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \cdots a_na_{n+1} \cdots ,$$

де $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9 \cdots a_{2n-1}a_{2n+1} \cdots ,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10} \cdots a_{2n}a_{2n+2} \cdots .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1], \quad a \mapsto (b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1] \times [0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots.$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1], \quad a\mapsto (b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\ ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\ ,$$

$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\ .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1],\quad a\mapsto(b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots.$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1],\quad a\mapsto(b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\ ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\ ,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\ .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1],\quad a\mapsto(b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\ ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\ ,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\ .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1],\quad a\mapsto(b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\ ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\ ,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\ .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1],\quad a\mapsto(b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Приклад 1.9.48

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a\in[0,1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}\cdots a_na_{n+1}\cdots\ ,$$

де $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільного $i\in\mathbb{N}$. Означимо числа $b,c\in[0,1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\cdots a_{2n-1}a_{2n+1}\cdots\ ,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\cdots a_{2n}a_{2n+2}\cdots\ .$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon[0,1]\to[0,1]\times[0,1],\quad a\mapsto(b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1]\times[0,1]$ — рівнопотужні множини.

Вправа 1.9.27

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.9.28

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.9.27

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.9.28

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.9.27

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.9.28

Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Лекція 11: Частковий порядок. Потужність множини

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots\,,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots\,,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots\,,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots\,,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots\,,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\,,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots\,.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots\,,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots\,,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots\,,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots\,,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots\,,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\,,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots\,.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots, \\ a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots, \\ a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots, \\ a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots, \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots, \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots, \end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незлічення множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — злічення множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незлічення множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.
Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots\,, \\ a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots\,, \\ a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots\,, \\ a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots\,, \\ &\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots \\ a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots\,, \\ &\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\,, \end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.
Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots\,.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots\,,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots\,,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots\,,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots\,,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots\,,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\,,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots\,.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots, \\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots, \\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots, \\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots, \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots, \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.9.49

Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots\,,\\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots\,,\\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots\,,\\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots\,,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots\,,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\,,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел i та j. Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots\,.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

Дякую за увагу!!!