Декартовий добуток множин, відношення, відображення

Дискретна математика

Лекція 10

Лекція 10: Декартовий добуток множин, відношення, відображення

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент x, а на другому — y*. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент* x, *а на другому —* y. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент* x*, а на другому —* y. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

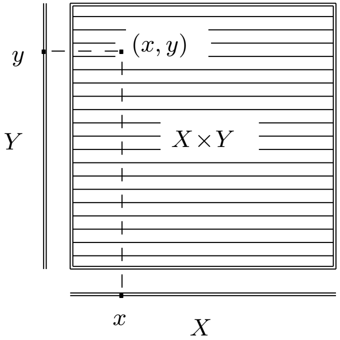
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент x, а на другому — y*. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

Лекція 10: Декартовий добуток множин, відношення, відображення

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

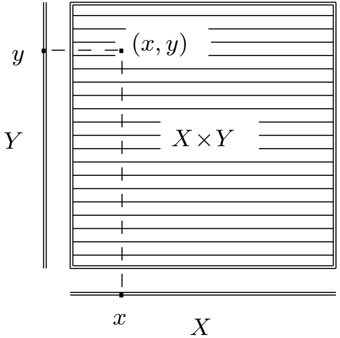
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$



Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент* x, *а на другому* — y. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

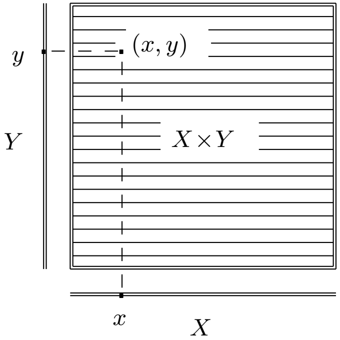
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$



Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент x, а на другому — y*. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

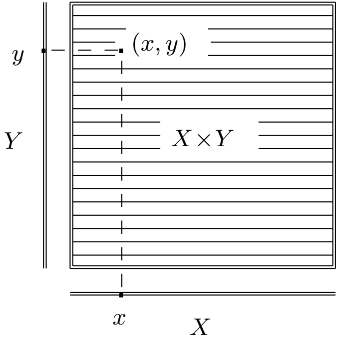
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$



Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент x, а на другому — y*. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y, позначається $X \times Y$, — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$



Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну множину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент* x, *а на другому* — y. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.
Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.
Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.
Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \dots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.
Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.
Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та *впорядкований набір з n елементів*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. ($\Rightarrow$) Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
($\Leftarrow$) Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. ($\Rightarrow$) Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
($\Leftarrow$) Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Приклад 1.9.29

Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.
Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.9.30

Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.
$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Вправа 1.9.9

Доведіть такі рівності:

(i) $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$;

(ii) $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$;

(iii) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Вправа 1.9.10

Доведіть такі рівності:

(i) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$;

(ii) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$;

(iii) $A \times C = (A \times Y) \cap (X \times C)$;

(iv) $(A \times D)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times D^c)$,

де $A, B \subseteq Y$ і $C, D \subseteq Y$.

Вправа 1.9.9

Доведіть такі рівності:

(i) $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$;
(ii) $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$;
(iii) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Вправа 1.9.10

Доведіть такі рівності:

(i) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$;
(ii) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$;
(iii) $A \times C = (A \times Y) \cap (X \times C)$;
(iv) $(A \times D)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times D^c)$,

де $A, B \subseteq Y$ і $C, D \subseteq Y$.

Вправа 1.9.9

Доведіть такі рівності:

(i) $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$;
(ii) $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$;
(iii) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Вправа 1.9.10

Доведіть такі рівності:

(i) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$;
(ii) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$;
(iii) $A \times C = (A \times Y) \cap (X \times C)$;
(iv) $(A \times D)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times D^c)$,

де $A, B \subseteq Y$ і $C, D \subseteq Y$.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f\colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин.
Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f : X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y".
Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f : X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f\colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f : X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що “f частково відображає X в Y”. Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f : X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f \colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f \colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f \colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f \colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f\colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f\colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f \colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f \colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f \colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f \colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f\colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f: X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f: X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f \colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f \colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f \colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f \colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові $x \in X$ часткове відображення* (*відображення*) *f ставить у відповідність елемент $y \in Y$*, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

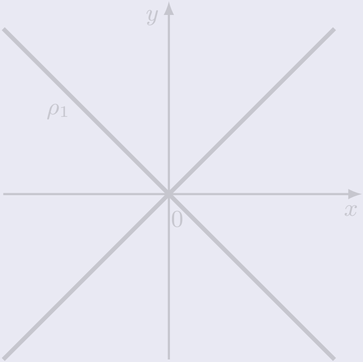
Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

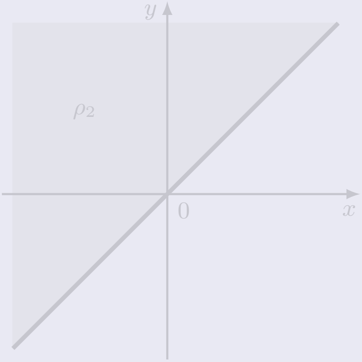
Приклад 1.9.31

Відношення $\rho_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$ і $\rho_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

Приклад 1.9.31

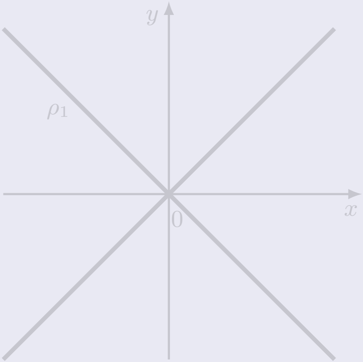
Відношення $\rho_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$ і $\rho_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

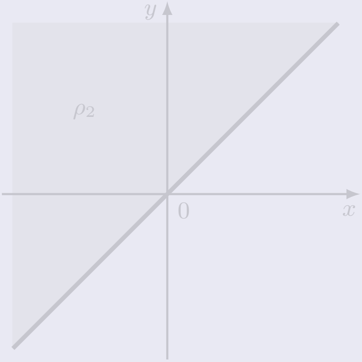




Приклад 1.9.31

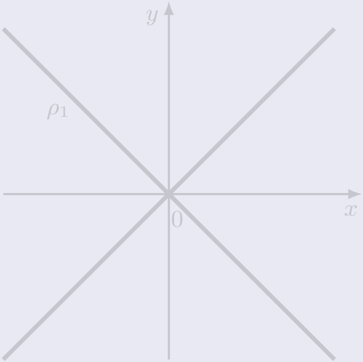
Відношення $\rho_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$ і $\rho_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

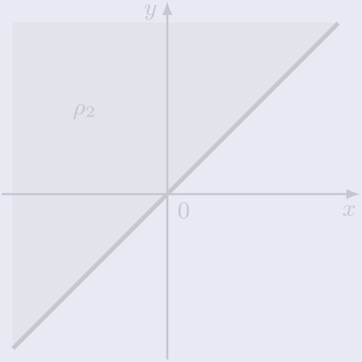




Приклад 1.9.31

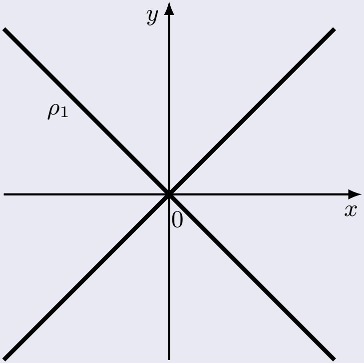
Відношення $\rho_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$ і $\rho_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

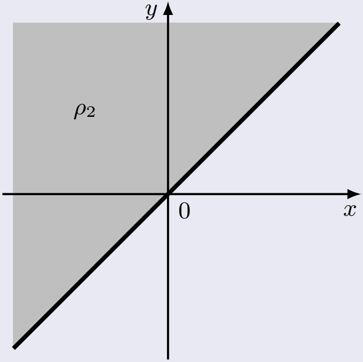




Приклад 1.9.31

Відношення $\rho_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$ і $\rho_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).



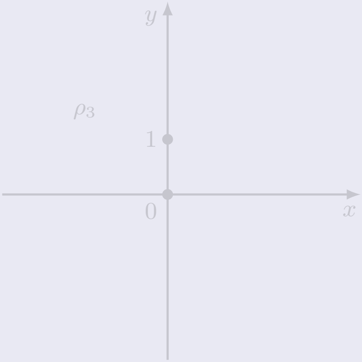


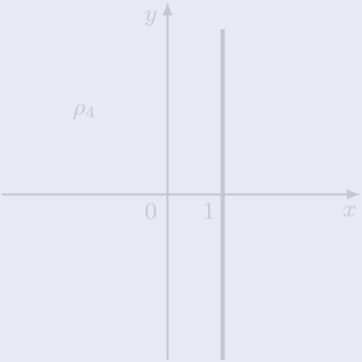
Приклад 1.9.31

Відношення $\rho_3 = \{(0,0),(0,1)\}$ та $\rho_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 1\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

Приклад 1.9.31

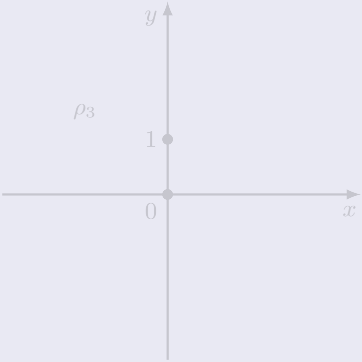
Відношення $\rho_3 = \{(0,0),(0,1)\}$ та $\rho_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 1\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

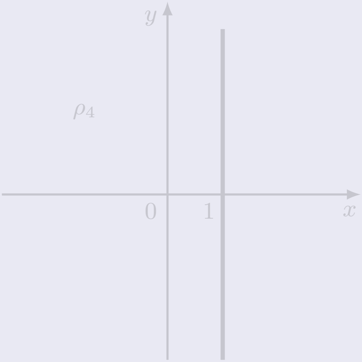




Приклад 1.9.31

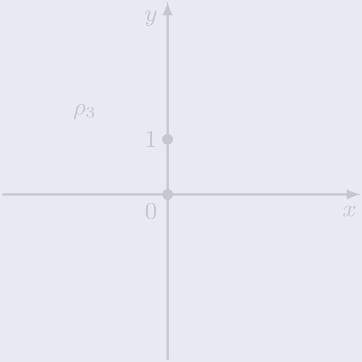
Відношення $\rho_3 = \{(0,0),(0,1)\}$ та $\rho_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 1\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

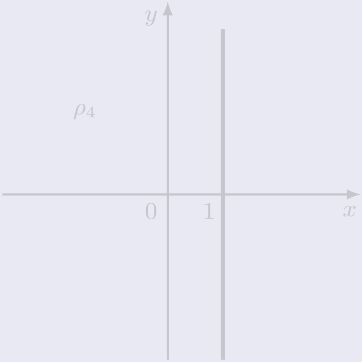




Приклад 1.9.31

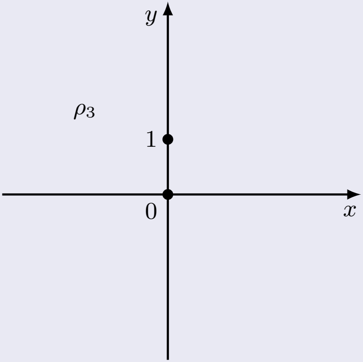
Відношення $\rho_3 = \{(0,0),(0,1)\}$ та $\rho_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 1\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).

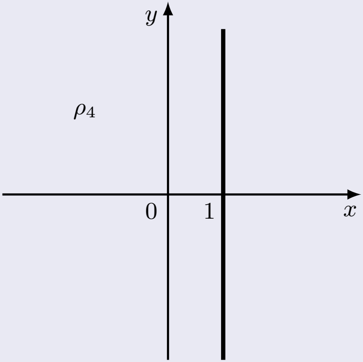




Приклад 1.9.31

Відношення $\rho_3 = \{(0,0),(0,1)\}$ та $\rho_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 1\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ не є частковими відображеннями (див. рис.).



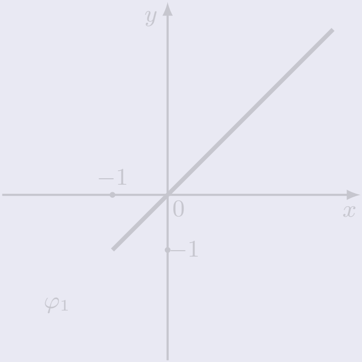


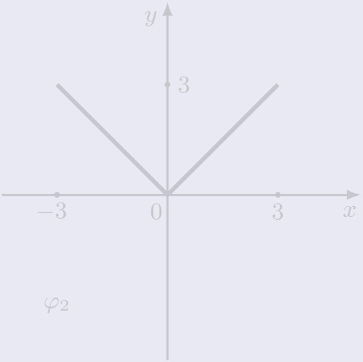
Приклад 1.9.31

Відношення $\varphi_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ та $\varphi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y, |x| \leqslant 3\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є частковими відображеннями, але не є відображеннями (див. рис.).

Приклад 1.9.31

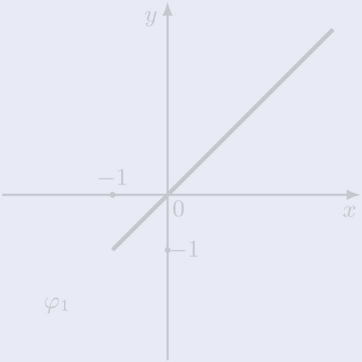
Відношення $\varphi_1 = \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ та $\varphi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y, |x| \leqslant 3\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є частковими відображеннями, але не є відображеннями (див. рис.).

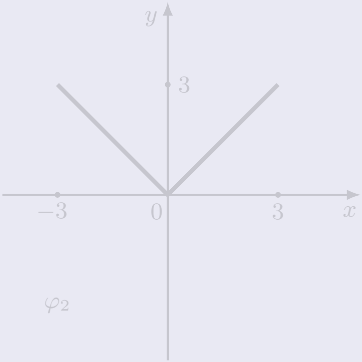




Приклад 1.9.31

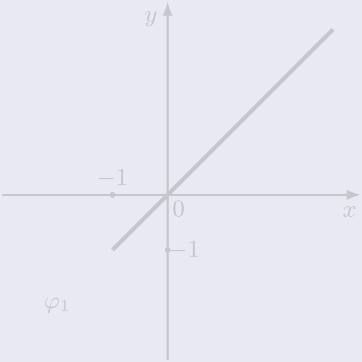
Відношення $\varphi_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ та $\varphi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y, |x| \leqslant 3\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є частковими відображеннями, але не є відображеннями (див. рис.).

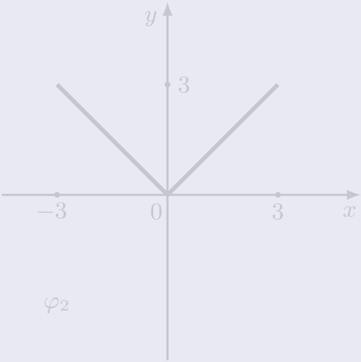




Приклад 1.9.31

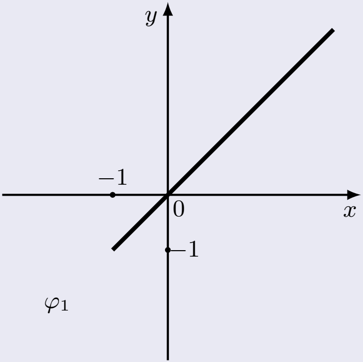
Відношення $\varphi_1 = \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ та $\varphi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y, |x| \leqslant 3\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є частковими відображеннями, але не є відображеннями (див. рис.).



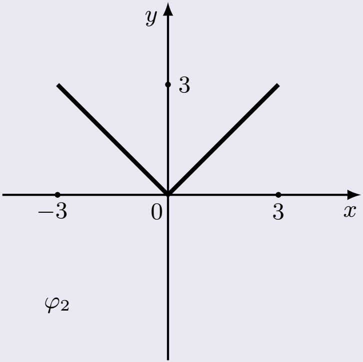


Приклад 1.9.31

Відношення $\varphi_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ та $\varphi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y, |x| \leqslant 3\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є частковими відображеннями, але не є відображеннями (див. рис.).



φ_1



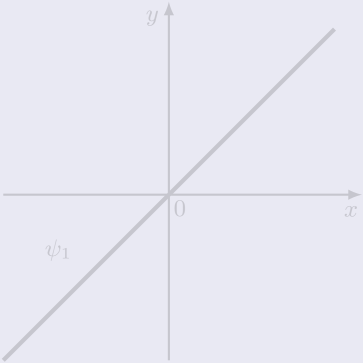
φ_2

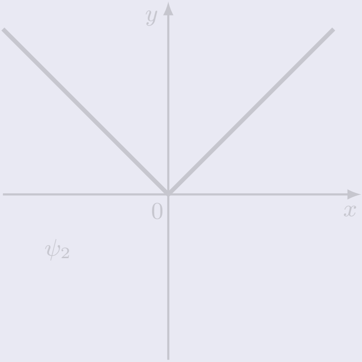
Приклад 1.9.31

Відношення $\psi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ та $\psi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є відображеннями (див. рис.).

Приклад 1.9.31

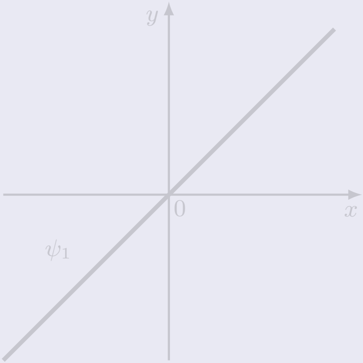
Відношення $\psi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ та $\psi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є відображеннями (див. рис.).

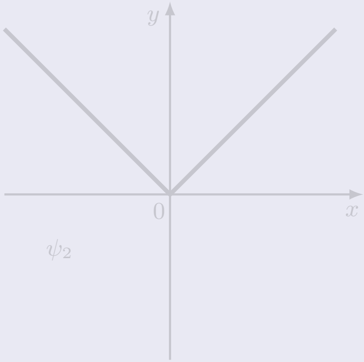




Приклад 1.9.31

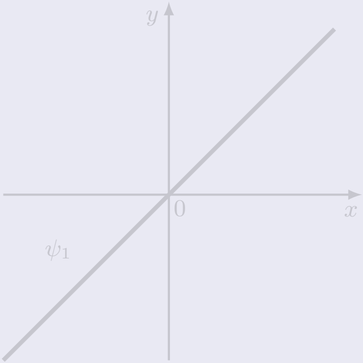
Відношення $\psi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ та $\psi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є відображеннями (див. рис.).

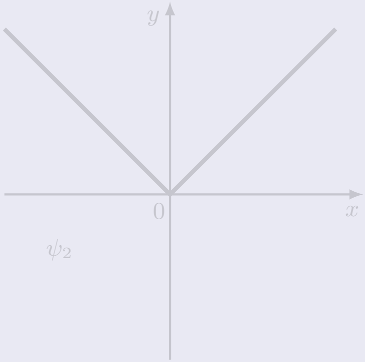




Приклад 1.9.31

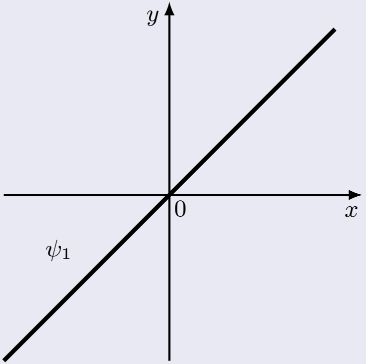
Відношення $\psi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ та $\psi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є відображеннями (див. рис.).

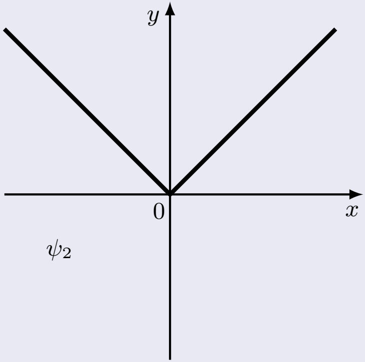




Приклад 1.9.31

Відношення $\psi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ та $\psi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y\}$ на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є відображеннями (див. рис.).





Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x\in A}\{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B}\{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (часткововового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x\in A}\{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B}\{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (часткововового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (часткового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x\in A}\{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B}\{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом* множини A та *повним прообразом* множини B стосовно (часткового) відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$; *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.32

Через $\sin$ позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

1. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
2. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
3. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
4. $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;

(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;

(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;

(vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в X;

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в X;

(ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

- (i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- (ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
- (iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
- (iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
- (v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
- (vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
- (vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
- $(viii)$ $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
- (ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
- (x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
- (xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
- (xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;

(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;

(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;

(viii) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;

(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;

(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;

(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;

(vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в X;

(viii) $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в X;

(ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X\to Y$ — відображення, $A,B\subseteq X$ і $C,D\subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(ii) $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$;

(iii) включення $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$ не можна замінити рівністю;

(iv) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$;

(v) включення $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ не можна замінити рівністю;

(vi) з $A\subseteq B$ випливає $f(A)\subseteq f(B)$;

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}}A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{I}}f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;

(viii) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}}A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in\mathscr{I}}f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;

(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}}A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in\mathscr{I}}f(A_i)$ не можна замінити рівністю;

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}}A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{I}}f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}}A_i\right)=\bigcap_{i\in\mathscr{I}}f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xii) $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;

(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;

(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;

(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;

(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;

(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;

(vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;

(ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i\in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i\in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in \mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in \mathscr{J}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in \mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in \mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in \mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i\in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in \mathscr{J}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Приклад 1.9.33

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
(iii) включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю;
(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;
(viii) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в X;
(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y;
(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(*i*) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$. Нехай $y\in f(A\cup B)$, тобто існує такий елемент $x\in A\cup B$, що $f(x)=y$. Маємо $(x\in A)\vee(x\in B)$. Тоді

$$(x\in A\ \Rightarrow\ f(x)=y\in f(A))\vee(x\in B\ \Rightarrow\ f(x)=y\in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y=f(x)\ \wedge y\in f(A)\cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$. Якщо $y\in f(A)\cup f(B)$, то

$$y\in f(A)\vee y\in f(B).$$

Тоді

$$y\in f(A)\Rightarrow \exists x\in A\,\text{такий, що}\ f(x)=y,$$
$$y\in f(B)\Rightarrow \exists x\in B\,\text{такий, що}\ f(x)=y.$$

Отож,

$$y=f(x)\wedge x\in A\cup B,$$

тобто $y\in f(A\cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \ \Rightarrow \ f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \ \Rightarrow \ f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \ \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \,\text{такий, що}\; f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \,\text{такий, що}\; f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(i) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$. Нехай $y\in f(A\cup B)$, тобто існує такий елемент $x\in A\cup B$, що $f(x)=y$. Маємо $(x\in A)\vee(x\in B)$. Тоді

$$(x\in A\ \Rightarrow\ f(x)=y\in f(A))\vee(x\in B\ \Rightarrow\ f(x)=y\in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y=f(x)\ \wedge y\in f(A)\cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$. Якщо $y\in f(A)\cup f(B)$, то

$$y\in f(A)\vee y\in f(B).$$

Тоді

$$y\in f(A)\Rightarrow \exists x\in A\,\text{такий, що}\ f(x)=y,$$
$$y\in f(B)\Rightarrow \exists x\in B\,\text{такий, що}\ f(x)=y.$$

Отож,

$$y=f(x)\wedge x\in A\cup B,$$

тобто $y\in f(A\cup B)$.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \ \Rightarrow \ f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \ \Rightarrow \ f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \ \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \, \text{такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \, \text{такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(*ii*) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(*iii*) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(*iv*) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$. Нехай $y\in f(A)\setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x\in A$ такий, що $f(x)=y$, але $y\notin\{f(x)\mid x\in B\}$. Отже $x\notin B$ і $x\in A\setminus B$. Звідси випливає, що $y\in f(A\setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x)=\sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R}\setminus[0,+\infty))=f((-\infty,0))=[-1,1],$$

але

$$f(\mathbb{R})\setminus f([0,+\infty))=[-1,1]\setminus[-1,1]=\varnothing.$$

(iv) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$. Нехай $y\in f(A\cap B)$. Тоді існує елемент $x\in A\cap B$ такий, що $f(x)=y$. Але $x\in A$ та $x\in B$, а отже

$$y=f(x)\in f(A) \qquad \text{і} \qquad y=f(x)\in f(B).$$

Отож,

$$y\in f(A)\cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \quad \text{і} \quad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(ii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x)=\sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty,0]\cap[0,+\infty))=f(\{0\})=\{0\},$$

однак

$$f((-\infty,0])\cap f([0,+\infty))=[-1,1]\cap[-1,1]=[-1,1].$$

(vi) $A\subseteq B\Longrightarrow f(A)\subseteq f(B)$. Припустимо, що $A\subseteq B$. Тоді існує елемент $x\in X$ такий, що $f(x)=y$ і $x\in A$. Отже, $x\in B$ і $f(x)=y\in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A\subseteq B\quad\Longrightarrow\quad f(A)\subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, означене за формулою
$$f(x)=\sin x.$$
Тоді
$$f((-\infty,0]\cap[0,+\infty))=f(\{0\})=\{0\},$$
однак
$$f((-\infty,0])\cap f([0,+\infty))=[-1,1]\cap[-1,1]=[-1,1].$$

(vi) $A\subseteq B \Longrightarrow f(A)\subseteq f(B)$. Припустимо, що $A\subseteq B$. Тоді існує елемент $x\in X$ такий, що $f(x)=y$ і $x\in A$. Отже, $x\in B$ і $f(x)=y\in f(B)$. Звідси випливає імплікація
$$A\subseteq B \quad\Longrightarrow\quad f(A)\subseteq f(B).$$

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i),$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i).$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y\in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x\in\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x\in A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i\in\mathscr{J} : y\in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y\in\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i), \end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y\in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x\in\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x : \forall i\in\mathscr{J} : x\in A_i : f(x)=y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists x : \forall i\in\mathscr{J} : y\in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y\in\bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i),$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i).$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y\in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x\in\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x\in A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i\in\mathscr{I} : y\in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y\in\bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i), \end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y\in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x\in\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x : \forall i\in\mathscr{I} : x\in A_i : f(x)=y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists x : \forall i\in\mathscr{I} : y\in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y\in\bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) \iff \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i : f(x) = y \iff$$
$$\iff \exists x \in A_i : f(x) = y \iff$$
$$\iff \exists i \in \mathscr{I} : y \in f(A_i) \iff$$
$$\iff y \in \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i),$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) \iff \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i : f(x) = y \iff$$
$$\iff \exists x : \forall i \in \mathscr{I} : x \in A_i : f(x) = y \implies$$
$$\implies \exists x : \forall i \in \mathscr{I} : y \in f(A_i) \iff$$
$$\iff y \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i).$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) &\iff \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i : f(x) = y \iff \\ &\iff \exists x \in A_i : f(x) = y \iff \\ &\iff \exists i \in \mathscr{I} : y \in f(A_i) \iff \\ &\iff y \in \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i), \end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) &\iff \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i : f(x) = y \iff \\ &\iff \exists x : \forall i \in \mathscr{I} : x \in A_i : f(x) = y \implies \\ &\implies \exists x : \forall i \in \mathscr{I} : y \in f(A_i) \iff \\ &\iff y \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i), \end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i),$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i).$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\iff \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \iff \\
&\iff \exists x \in A_i : f(x) = y \iff \\
&\iff \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \iff \\
&\iff y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i),
\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\iff \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \iff \\
&\iff \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \implies \\
&\implies \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \iff \\
&\iff y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i).
\end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i), \end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i), \end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y\in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x\in\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x\in A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i\in\mathscr{J} : y\in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y\in\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i), \end{aligned}$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$. Справді,

$$\begin{aligned} y\in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x\in\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x)=y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x : \forall i\in\mathscr{J} : x\in A_i : f(x)=y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists x : \forall i\in\mathscr{J} : y\in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y\in\bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\iff f(x) \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \iff \\ &\iff \exists i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \iff \\ &\iff \exists i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \iff \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\iff f(x)\in\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \iff \\ &\iff \exists i\in\mathscr{J} : f(x)\in A_i \iff \\ &\iff \exists i\in\mathscr{J} : x\in f^{-1}(A_i) \iff \\ &\iff x\in\bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right)=\bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i),
\end{aligned}
$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\iff f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \iff \\ &\iff \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \iff \\ &\iff \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \iff \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\iff f(x) \in C \setminus D \iff \\ &\iff f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \iff \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \iff \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{I} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{I} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, шо $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C\setminus D) = f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C\setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C\setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C\setminus D) = f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{I} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{I} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \land f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \land x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i),$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$x \in f^{-1}(C \setminus D) \Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D),$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{I} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{I} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\iff f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \iff \\ &\iff \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \iff \\ &\iff \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \iff \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\iff f(x) \in C \setminus D \iff \\ &\iff f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \iff \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \iff \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в Y.

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Вправа 1.9.11

Наведіть приклад відображення, для якого не виконується обернена імплікація до твердження (vi)

$$A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

з прикладу 1.9.33.

Вправа 1.9.12

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що виконуються такі умови:

(i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;

(ii) $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$ для довільних підмножин $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$, зокрема $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

Вправа 1.9.11

Наведіть приклад відображення, для якого не виконується обернена імплікація до твердження (vi)

$$A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

з прикладу 1.9.33.

Вправа 1.9.12

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що виконуються такі умови:

(i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;

(ii) $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$ для довільних підмножин $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$, зокрема $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

Вправа 1.9.11

Наведіть приклад відображення, для якого не виконується обернена імплікація до твердження (vi)

$$A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

з прикладу 1.9.33.

Вправа 1.9.12

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що виконуються такі умови:

(i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;

(ii) $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$ для довільних підмножин $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$, зокрема $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$
Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що
$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$
Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо
$$f(A)\cap f(B) = f(\{x_1\})\cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A\cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$
З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$
Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що
$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$
Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо
$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$
З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\iff \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \iff \\ &\iff x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \iff \\ &\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \iff \\ &\iff y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то
$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$
($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$
Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що
$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$
Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо
$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$
З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то
$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$
$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$
Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що
$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$
Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо
$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$
З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f: X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f: X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f: X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Приклад 1.9.34

Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли
$$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$$
для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A\cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A\cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то
$$\begin{aligned} y \in f(A\cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A\cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A)\cap f(B). \end{aligned}$$
($\Longleftarrow$) Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність
$$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B).$$
Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що
$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$
Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо
$$f(A)\cap f(B) = f(\{x_1\})\cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A\cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$
З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ *на множині* X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. рефлексивність: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. симетричність: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ *на множині* X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ДНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ *на множині* X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЗНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ *на множині* X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.
Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення “мати можливість привітатися правою рукою” на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення “ділить” є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення “знайомий”, “друг” на множині, що складається з людей і відношення “прямі на площині мають спільну точку” є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ *на множині* X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення “мати можливість привітатися правою рукою” на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення “ділить” є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення “знайомий”, “друг” на множині, що складається з людей і відношення “прямі на площині мають спільну точку” є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.
Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$. *Відношенням еквівалентності* (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1. *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2. *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3. *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.9.35

Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;

б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;

в) подібність фігур на площині (в просторі);

г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi \colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi \colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi \colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi \colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi \colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\tilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\tilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \tilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\tilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність

$$X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}.$$

Теорема 1.9.36 є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.9.36

Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, який містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi \colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним*.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

- (i) часткових відображень є частковим відображенням;
- (ii) відображень є відображенням;
- (iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
- (iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
- (v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a,c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a,b) \in \alpha \text{ і } (b,c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;

(ii) відображень є відображенням;

(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;

(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;

(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(*i*) часткових відображень є частковим відображенням;
(*ii*) відображень є відображенням;
(*iii*) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(*iv*) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(*v*) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta\circ\alpha$ двох відношень $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ визначається так:

$$\beta\circ\alpha=\{(a,c)\in X\times Z \mid \text{існує елемент } b\in Y \text{ т., що } (a,b)\in\alpha \text{ і } (b,c)\in\beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ є відношенням на $X\times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x=y$, для $x,y\in X$.

Композиція $\beta\circ\alpha$ *двох відношень* $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ визначається так:

$$\beta\circ\alpha=\{(a,c)\in X\times Z \mid \text{існує елемент } b\in Y \text{ т., що } (a,b)\in\alpha \text{ і } (b,c)\in\beta\}\,.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ є відношенням на $X\times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x=y$, для $x,y\in X$.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a,c) \in X \times Z \mid \text{існує елемент } b \in Y \text{ т., що } (a,b) \in \alpha \text{ і } (b,c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

- (i) часткових відображень є частковим відображенням;
- (ii) відображень є відображенням;
- (iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
- (iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
- (v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Композиція $\beta\circ\alpha$ двох відношень $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ визначається так:

$$\beta\circ\alpha=\{(a,c)\in X\times Z \mid \text{існує елемент } b\in Y \text{ т., що } (a,b)\in\alpha \text{ і } (b,c)\in\beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ є відношенням на $X\times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x=y$, для $x,y\in X$.

Композиція $\beta\circ\alpha$ двох відношень $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ визначається так:

$$\beta\circ\alpha=\{(a,c)\in X\times Z \mid \text{існує елемент } b\in Y \text{ т., що } (a,b)\in\alpha \text{ і } (b,c)\in\beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha\subseteq X\times Y$ і $\beta\subseteq Y\times Z$ є відношенням на $X\times Z$.

Вправа 1.9.13

Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x=y$, для $x,y\in X$.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f : X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f : X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f : X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f : X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f : X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f : X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f : X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f : X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f \colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f \colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f \colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f \colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *обернeним* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \alpha\}$ називається *обереним* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.9.37

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Зауважимо, що відношення діагоналі $\Delta_X \subseteq X \times X$ можна розглядати як відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$, визначене за формулою $\mathrm{id}_X(x) = x$. Надалі, так визначене відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ будемо називати *тотожним відображенням* множини X.

Вправа 1.9.14

Нехай $f \colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y в X тоді і лише тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \text{і} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X\,.$$

Зауважимо, що відношення діагоналі $\Delta_X \subseteq X \times X$ можна розглядати як відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$, визначене за формулою $\mathrm{id}_X(x) = x$. Надалі, так визначене відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ будемо називати *тотожним відображенням* множини X.

Вправа 1.9.14

Нехай $f \colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y в X тоді і лише тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \text{і} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X .$$

Зауважимо, що відношення діагоналі $\Delta_X \subseteq X \times X$ можна розглядати як відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$, визначене за формулою $\mathrm{id}_X(x) = x$. Надалі, так визначене відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ будемо називати *тотожним відображенням* множини X.

Вправа 1.9.14

Нехай $f \colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y в X тоді і лише тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \text{і} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X .$$

Зауважимо, що відношення діагоналі $\Delta_X \subseteq X \times X$ можна розглядати як відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$, визначене за формулою $\mathrm{id}_X(x) = x$. Надалі, так визначене відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ будемо називати *тотожним відображенням* множини X.

Вправа 1.9.14

Нехай $f \colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y в X тоді і лише тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \text{і} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X .$$

Дякую за увагу!!!