Методи доведення теорем

Дискретна математика

Лекція 8

Лекція 8: Методи доведення теорем

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли p істинне, а q хибне.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести ($\overline{q}$), тобто ($p \wedge \overline{q}$). Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано ($\overline{p}$), або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення ($p \wedge \overline{q}$) достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові (p), і протилежне до того, що потрібно довести $(\overline{q})$, тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано $(\overline{p})$, або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення r і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

Вправа 1.8.1

Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків
Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків
Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення p і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

Вправа 1.8.2

Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

Означення 1.8.1

Інтерпретацією формули логіки предикатів α над фіксованою множиною M називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на M, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини M.

Означення 1.8.2

Дві формули логіки предикатів α та β називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* M, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною. Формули логіки предикатів α та β, які рівносильні на будь-якій множині M, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.3

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

Розв'язок. Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

Приклад 1.8.4

Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай множина M має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат P набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині M.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x, y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ ((x \text{ кратне } 5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ ((x \text{ кратне } 5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x, y) \wedge \forall x\, Q(x, y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x, y) \Rightarrow Q(x, z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x, y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x, y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x, y) \wedge \forall x\, Q(x, y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x, y) \Rightarrow Q(x, z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x, y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow\ (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow\ (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x \text{ кратне } 5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x \text{ кратне } 5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x \text{ кратне } 5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x \text{ кратне } 5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення
$\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення
$\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \land \forall x\, Q(x,y) \land \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\ \exists y\ Q(x,y) \wedge \forall x\ Q(x,y) \wedge \forall x\ \forall y\ \forall z\ (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення
$\forall x\ \ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення
$\forall x\ \ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\ \exists y\ Q(x,y) \wedge \forall x\ Q(x,y) \wedge \forall x\ \forall y\ \forall z\ (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.5

Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y))$ побудуйте дві інтерпретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

Розв'язок. Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "x кратне 5", а $Q(x,y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення
$\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення
$\forall x\ ((x$ кратне $5) \Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

Вправа 1.8.3

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\ \exists y\ Q(x,y) \wedge \forall x\ Q(x,y) \wedge \forall x\ \forall y\ \forall z\ (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x, y) \wedge \forall x\, \neg Q(x, y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x, y) \Rightarrow Q(x, z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x, y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \neg Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \neg Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \neg Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \neg Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \neg Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x, y) \wedge \forall x\, \neg Q(x, y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x, y) \Rightarrow Q(x, z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x, y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \neg Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \neg Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \land \forall x\, \neg Q(x,y) \land \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\, (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\, (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Вправа 1.8.4

Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\,\exists y\; Q(x,y) \wedge \forall x\,\neg Q(x,y) \wedge \forall x\,\forall y\,\forall z\;(Q(x,y) \Rightarrow Q(x,z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x,y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1,2,\ldots,20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

Приклад 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\;(P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\; P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

Розв'язок. Нехай $M = \{a,b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\;(P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке x існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\; P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\,(P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\,(P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\, P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\, P(x))$ та $\beta = \forall x\, \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\, P(x))$ та $\beta = \exists x\, \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x (P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x \; (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x \; P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x \; (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x \; P(x)| = 0$ і $|\forall x (P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x \; P(x))$ та $\beta = \forall x \; \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x \; P(x))$ та $\beta = \exists x \; \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Лекція 8: Методи доведення теорем

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x (P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Приклад 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Розв'язок. Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

Вправа 1.8.5

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.6

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, Q(x, y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.8

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, \forall z\, Q(x, y, z)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, \forall z\, Q(x, y, z)$ не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, Q(x,y)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, Q(x,y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.8

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, \forall z\, Q(x,y,z)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, \forall z\, Q(x,y,z)$ не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, Q(x, y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною.
Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.8

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, \forall z\, Q(x, y, z)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, \forall z\, Q(x, y, z)$ не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x \, \exists y \, Q(x, y)$ та $\beta = \exists y \, \forall x \, Q(x, y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.8

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x \, \exists y \, \forall z \, Q(x, y, z)$ та $\beta = \exists y \, \forall x \, \forall z \, Q(x, y, z)$ не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, Q(x,y)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, Q(x,y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.8

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, \forall z\, Q(x,y,z)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, \forall z\, Q(x,y,z)$ не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.7

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, Q(x, y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Вправа 1.8.8

Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\, \exists y\, \forall z\, Q(x, y, z)$ та $\beta = \exists y\, \forall x\, \forall z\, Q(x, y, z)$ не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

Дякую за увагу!!!