Логічне виведення в логіці висловлень

Дискретна математика

Лекція 6

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в **Лекції 1**.

Формулу f будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула f має n атомів, то вона має 2^n інтерпретацій.

Формулу f логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \quad \text{і} \quad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{і} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є p і q. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтерпретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

Вправа 1.5.1

Побудувавши таблиці істинності, з'ясуйте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;
3) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
5) $(((\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \Rightarrow r) \wedge ((\overline{p \Rightarrow q}) \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

Вправа 1.5.2

За допомогою еквівалентних перетворень перевірте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
3) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow q)$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \vee \overline{q}$;
5) $(p \wedge q \wedge (p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

Вправа 1.5.1

Побудувавши таблиці істинності, з'ясуйте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;
3) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
5) $(((\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \Rightarrow r) \wedge ((\overline{p \Rightarrow q}) \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

Вправа 1.5.2

За допомогою еквівалентних перетворень перевірте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
3) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow q)$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \vee \overline{q}$;
5) $(p \wedge q \wedge (p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

Вправа 1.5.1

Побудувавши таблиці істинності, з'ясуйте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;
3) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
5) $(((\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \Rightarrow r) \wedge ((\overline{p \Rightarrow q}) \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

Вправа 1.5.2

За допомогою еквівалентних перетворень перевірте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
3) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow q)$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \vee \overline{q}$;
5) $(p \wedge q \wedge (p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Будемо говорити, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, або формула g *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n$ формула g також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*), чи *постулатами* формули g.

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ■

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. $\square$

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$. ∎

Теорема 1.5.2

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.

Доведення. **Необхідність.** Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \ldots, f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ■

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст “***отже***”.

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст “***отже***”.

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула g — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а g — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \dots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$
\begin{aligned}
\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\
&= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\
&= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.
\end{aligned}
$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

Лекція 6: Логічне виведення в логіці висловлень

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}
\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\
&= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\
&= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.
\end{aligned}$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} = \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} =$$
$$= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} =$$
$$= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned} \overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \dots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{g}. \end{aligned}$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned} \overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \dots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{g}. \end{aligned}$$

Теорема 1.5.3 (принцип прямої дедукції)

Формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.5.2 формула g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, g є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

■

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означенням формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p} :$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.5.3. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Приклад 1.5.1 (продовження)

Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

Вправа 1.5.3

Доведіть логічні теореми трьома способами:

1) $\overline{p} \vee q,\ \overline{p} \vee r,\ \overline{q} \vee \overline{r} \vdash \overline{p}$;
2) $\overline{h},\ \overline{h} \Rightarrow (p \vee q),\ p \Rightarrow c,\ q \Rightarrow c \vdash c$.

Вправа 1.5.3

Доведіть логічні теореми трьома способами:

1) $\overline{p} \vee q,\ \overline{p} \vee r,\ \overline{q} \vee \overline{r} \vdash \overline{p}$;
2) $\overline{h},\ \overline{h} \Rightarrow (p \vee q),\ p \Rightarrow c,\ q \Rightarrow c \vdash c$.

Дякую за увагу!!!