Нормальна форма формули логіки першого порядку

Дискретна математика

Лекція 5

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n\,M,$$

де кожне $Q_i\,x_i$ — це або квантор загальності $\forall\,x_i$, або квантор існування $\exists\,x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\,x\,\forall\,y\,P(x,y)$;
2. $\forall\,x\,\exists\,y\,(P(x,y)\lor Q(x))$;
3. $\forall\,x\,\exists\,y\,\forall\,z\,\exists\,w\,\Big(\overline{P(x,y)}\lor Q(x)\lor\overline{Z(x,y,z)})\land A(w,z)\Big)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n\,M,$$

де кожне $Q_i\,x_i$ — це або квантор загальності $\forall\,x_i$, або квантор існування $\exists\,x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$
2. $\forall x\,\exists y\,(P(x,y) \lor Q(x))$
3. $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\exists u\,\left(\overline{P(x,y)} \lor Q(x) \lor \overline{Z(x,y,z)} \land A(u,z)\right)$

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y)$;
2. $\forall\, x\, \exists\, y\, (P(x, y) \vee Q(x))$;
3. $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, \exists\, w\, \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, y, z)} \wedge A(w, z)\right)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n\,M,$$

де кожне $Q_i\,x_i$ — це або квантор загальності $\forall\,x_i$, або квантор існування $\exists\,x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$.
2. $\forall x\,\exists y\,(P(x,y) \vee Q(x))$.
3. $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\exists w\,\left(\overline{P(x,y)} \vee Q(x) \vee \overline{R(x,y,z)} \wedge A(w,z)\right)$

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$
2. $\forall x\, \exists y\, (P(x, y) \vee Q(x))$
3. $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \exists u\, \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, u, z)}) \wedge A(u, z)\right)$

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\;\ldots,Q_n\,x_n\,M,$$

де кожне $Q_i\,x_i$ — це або квантор загальності $\forall\,x_i$, або квантор існування $\exists\,x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\;\ldots,Q_n\,x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$
2. $\forall x\,\exists y\,(P(x,y) \vee Q(x))$
3. $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\exists w\,\left(\overline{P(x,y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x,y,z)} \wedge A(w,z)\right)$

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n\,M,$$

де кожне $Q_i\,x_i$ — це або квантор загальності $\forall\,x_i$, або квантор існування $\exists\,x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\,\ldots,Q_n\,x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$;
2. $\forall x\,\exists y\,(P(x,y)\vee Q(x))$;
3. $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\exists u\,\left(\overline{P(x,y)}\vee Q(x)\vee\overline{R(x,y,z)}\wedge A(u,z)\right)$

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\;\ldots,Q_n\,x_n\,M,$$

де кожне $Q_i\,x_i$ — це або квантор загальності $\forall\,x_i$, або квантор існування $\exists\,x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\;\ldots,Q_n\,x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$.
2. $\forall x\,\exists y\,(P(x,y)\lor Q(x))$.
3. $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\exists u\,\left(\overline{P(x,y)}\lor Q(x)\lor \overline{R(x,u,z)}\land A(u,x)\right)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y)$.
2. $\forall\, x\, \exists\, y\, (P(x, y) \vee Q(x))$.
3. $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, \exists\, w\, \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, y, z)}\right) \wedge A(w, z)\Big)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y)$.
2. $\forall\, x\, \exists\, y\, (P(x, y) \vee Q(x))$.
3. $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, \exists\, w\, \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, y, z)}\right) \wedge A(w, z)\Big)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y)$.
2. $\forall\, x\, \exists\, y\, (P(x, y) \vee Q(x))$.
3. $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, \exists\, w\, \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, y, z)}) \wedge A(w, z)\right)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\ \ldots,Q_n\,x_n\,M,$$

де кожне $Q_i\,x_i$ — це або квантор загальності $\forall\,x_i$, або квантор існування $\exists\,x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\,x_1\,Q_2\,x_2\ \ldots,Q_n\,x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\,x\,\forall\,y\,P(x,y)$.
2. $\forall\,x\,\exists\,y\,(P(x,y)\vee Q(x))$.
3. $\forall\,x\,\exists\,y\,\forall\,z\,\exists\,w\,\left(\overline{P(x,y)}\vee Q(x)\vee\overline{Z(x,y,z)})\wedge A(w,z)\right)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y)$.
2. $\forall\, x\, \exists\, y\, (P(x, y) \vee Q(x))$.
3. $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, \exists\, w\, \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, y, z)}\right) \wedge A(w, z)\right)$.

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

Приклад 1.4.1

Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y)$.
2. $\forall\, x\, \exists\, y\, (P(x, y) \vee Q(x))$.
3. $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, \exists\, w\, \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, y, z)}) \wedge A(w, z)\right)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \quad \text{і} \quad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x,y) = \forall y \forall x\, P(x,y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x,y) = \exists y \exists x\, P(x,y)$.

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \quad \text{і} \quad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{і} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$, $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$;
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P(x)}$, $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \quad \text{і} \quad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$;
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x,y) = \forall y \forall x\, P(x,y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x,y) = \exists y \exists x\, P(x,y)$.

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції “$\sim$” і “$\Rightarrow$” застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{і} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{і} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{і} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \quad \text{і} \quad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x,y) = \forall y \forall x\, P(x,y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x,y) = \exists y \exists x\, P(x,y)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{і} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \quad \text{і} \quad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{і} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists\, x\, (P(x) \wedge Q) = \exists\, x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists\, x\, (P(x) \vee Q) = \exists\, x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists\, x\, \exists\, y\, P(x, y) = \exists\, y\, \exists\, x\, P(x, y)$.

Лекція 5. Нормальна форма формули логіки першого порядку

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

Крок 1: Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул

$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{і} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

Крок 2: Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Крок 3: Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x \exists y \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x \forall y\, (\exists z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x,y,u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x,y,u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x,y,u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x, z) \wedge P(y, z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x, y, u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y \left(\overline{P(x)} \vee Q(y) \right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x, z) \wedge P(y, z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x, y, u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y\, \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x,y,u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x,y,u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y\, \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x,y,u).$$

Приклад 1.4.2

Зведемо формулу $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) =$$

$$= \overline{\forall x\, P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{виключено логічну операцію “}\Rightarrow\text{”}}$$

$$= \exists x\, \overline{P(x)} \vee \exists y\, Q(y) \qquad \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}}$$

$$= \exists x\, \exists y \left(\overline{P(x)} \vee Q(y)\right). \qquad \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}$$

Вправа 1.4.1

Запишіть нормальну форму для формули

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists u\, Q(x,y,u).$$

Дякую за увагу!!!