Закони логіки першого порядку

Дискретна математика

Лекція 4

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P і Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P і Q записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул P і Q. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$.
4. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.
5. $\forall x (P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x (P(x) \vee Q) = \forall x P(x) \vee Q$.
7. $\exists x (P(x) \wedge Q) = \exists x P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x (P(x) \vee Q) = \exists x P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*.

Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$
2. $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$
3. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
4. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
5. $\forall x (P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q$
6. $\forall x (P(x) \vee Q) = \forall x P(x) \vee Q$
7. $\exists x (P(x) \wedge Q) = \exists x P(x) \wedge Q$
8. $\exists x (P(x) \vee Q) = \exists x P(x) \vee Q$
9. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$
10. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$

Доведення. *1.* Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*.
Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$
2. $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$
3. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
4. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
5. $\forall x (P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q$
6. $\forall x (P(x) \vee Q) = \forall x P(x) \vee Q$
7. $\exists x (P(x) \wedge Q) = \exists x P(x) \wedge Q$
8. $\exists x (P(x) \vee Q) = \exists x P(x) \vee Q$
9. $\forall x \forall y P(x,y) = \forall y \forall x P(x,y)$
10. $\exists x \exists y P(x,y) = \exists y \exists x P(x,y)$

Доведення. *1.* Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*.
Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\,(P(x) \land Q(x)) = \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\,(P(x) \lor Q(x)) = \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\,(P(x) \land Q) = \forall x\, P(x) \land Q$.
6. $\forall x\,(P(x) \lor Q) = \forall x\, P(x) \lor Q$.
7. $\exists x\,(P(x) \land Q) = \exists x\, P(x) \land Q$.
8. $\exists x\,(P(x) \lor Q) = \exists x\, P(x) \lor Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x,y) = \forall y \forall x\, P(x,y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x,y) = \exists y \exists x\, P(x,y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\,(P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\,(P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\,(P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\,(P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$.
3. $\forall\, x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$.
4. $\exists\, x\,(P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$.
5. $\forall\, x\,(P(x) \wedge Q) = \forall\, x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall\, x\,(P(x) \vee Q) = \forall\, x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists\, x\,(P(x) \wedge Q) = \exists\, x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists\, x\,(P(x) \vee Q) = \exists\, x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y) = \forall\, y\, \forall\, x\, P(x, y)$.
10. $\exists\, x\, \exists\, y\, P(x, y) = \exists\, y\, \exists\, x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\,(P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\,(P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\,(P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\,(P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*.
Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x,y) = \forall y \forall x\, P(x,y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x,y) = \exists y \exists x\, P(x,y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*.
Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\,(P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\,(P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\,(P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\,(P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*.
Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. *1.* Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\,(P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\,(P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\,(P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\,(P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку*. Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку)

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\,(P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\,(P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\,(P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\,(P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x \forall y\, P(x, y) = \forall y \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x \exists y\, P(x, y) = \exists y \exists x\, P(x, y)$.

Доведення. 1. Нехай для деякого предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного a висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Твердження *2*: $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall x\, P(x)$ або $\forall x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ∎

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ∎

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ∎

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ∎

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно.

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно.

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ∎

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ∎

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.
Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно.

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.
Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.
Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.
Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення "Кожний учень школи вивчає англійську мову". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову".

Твердження *2*: $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall x\, P(x)$ або $\forall x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.

Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ■

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Твердження *2*: $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких P і Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall\, x\, P(x) \wedge \forall\, x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall\, x\, P(x)$ або $\forall\, x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження *4*: $\exists\, x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, P(x) \vee \exists\, x\, Q(x)$ доводиться аналогічно.
Твердження *5–10* пропонуємо слухачам довести самостійно. ∎

Вправа 1.3.1

Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

Приклад 1.3.2

Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x, y) = \exists y \forall x\, P(x, y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення “У школі існує учень, який вивчає англійську мову”. Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Кожний учень у школі не вивчає англійську мову”. Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y \forall x\, P(x, y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення “У школі існує учень, який вивчає англійську мову”. Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Кожний учень у школі не вивчає англійську мову”. Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення “У школі існує учень, який вивчає англійську мову”. Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Кожний учень у школі не вивчає англійську мову”. Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення “У школі існує учень, який вивчає англійську мову”. Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Кожний учень у школі не вивчає англійську мову”. Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x, y) = \exists y \forall x\, P(x, y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "x вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x, y) = \exists y \forall x\, P(x, y)$$

хибне.

Приклад 1.3.3

Розглянемо речення “У школі існує учень, який вивчає англійську мову”. Його можна записати так: $\exists x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “x вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Кожний учень у школі не вивчає англійську мову”. Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Вправа 1.3.2

Наведіть приклад, що речення

$$\forall x \exists y\, P(x,y) = \exists y \forall x\, P(x,y)$$

хибне.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованой формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованой формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Лекція 4. Закони логіки першого порядку

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованой формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \dots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \dots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists x\, \overline{P(x)}$ і $\forall x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

Дякую за увагу!!!