Курс лекцій з обчислювальної геометрії та алгебри

Петро Венгерський, Олег Гутік

23 травня 2022 р.

Петро Венгерський, Олег Гутік, *Курс лекцій з обчислювальної геометрії та алгебри*, Львів, 2022.

Зміст

Передмова

Розділ 1

Трішки лінійної алгебри

1.1 Вступ

Цей розділ передбачає базові знання та знайомство з лінійною алгеброю, що приблизно еквівалентно тому, що ви отримали б із вступного курсу з цієї теми. Дивіться додатки B і C для необхідного довідкового матеріалу. Зокрема, ми вважаємо, що читачу знайома структура векторного простору n-мірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, його скалярного добутку та пов'язаної з ним функції відстані. Мета цього розділу — обговорити деякі важливі теми, які, можливо, не були підкреслені або навіть висвітлені у вступному курсі лінійної алгебри. Ті читачі, які мають слабкий досвід з абстрактної лінійної алгебри, і які мали справу з векторами, переважно в контексті аналітичної геометрії або тематики обчислення в $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{R}^3$, також отримають аромат краси безкоординатного підходу до векторів. Доведення не вартує пропускати, оскільки вони надають більше практики та розуміння геометрії векторів. Справа в тому, що хороше розуміння (абстрактної) лінійної алгебри та вміння застосовувати її є важливим для вирішення багатьох завдань комп'ютерної графіки (та математики).

Як і в інших місцях цієї книги, ми намагалися уникати загальності заради загальності. За великим рахунком, читач може інтерпретувати все в контексті підпросторів $\mathbb{R}^n$. Однак у цьому розділі є частини, де варто було б більш загально висловити обговорення. Ми іноді говоримо про внутрішні добутки просторів, а не просто дотримуючись $\mathbb{R}^n$ та його скалярного добутку, а також говоримо про векторні простори над іншими полями, зокрема про комплексні числа $\mathbb{C}$. Це було зроблено для того, щоб підкреслити загальну сутність аспекту, що стосується, щоб невідповідні деталі не приховували важливого. Векторні простори над комплексними числами будуть важливими в наступних розділах.

Геометрія стосується безлічі просторів різних типів. У цій главі йдеться про найпростіші з них, а саме про лінійні та деякі пов'язані з ними простори. Сподіваємось, значна частина висвітленого матеріалу є оглядом, за винятком того, що ми будемо підходити до цієї теми, як і в багатьох інших місцях, векторним підходом. У підрозділах 1.4—1.7 розглядається означення та основні властивості k-вимірних площин у $\mathbb{R}^n$. Ми також розглядаємо абстрактне визначення кута та деякі важливі поняття, пов'язані з ортогональністю такі, як ортогональна проекція вектора. Далі, у підрозділах 1.8 і 1.9 ми обговорюємо надзвичайно важливі поняття орієнтації та опуклості. Деякі основні результати діагоналізації відображень і матриць у підрозділі 1.13 призводять до обговорення білінійних відображень і квадратичних форм у підрозділі

1.14. Підрозділ 1.15 описує загальну версію тривимірного векторного добутку. Нарешті, у підрозділ 1.16 визначено узагальнене обернене перетворення та матрицю разом з багатьма застосуваннями.

1.2 Елементи алгебри

1.2.1 Елементи теорії чисел

Із самого початку навчання арифметики в школі, чи на підготовці до школи, ми починали рахувати, використовуючи числа

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\ .$$

Такі числа, а саме числа, які ми використовуємо до лічби (рахунку) певних об'єктів, називаються *натуральними*. У математичній літературі множина натуральних чисел позначається через $\mathbb{N}$, і ми надалі будемо користуватися цим позначенням. Наприклад те, що число a є натуральним записуватимемо так $a \in \mathbb{N}$, а в протилежному випадку писатимемо $a \notin \mathbb{N}$. Отже, маємо

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}.$$

Об'єднавши нуль 0 з множиною натуральних чисел ми отримуємо множину невід'ємних цілих чисел, яку ми позначатимемо через $\mathbb{N}_0$. Формально це можна записати так $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

З курсу шкільної математики нам відомо, що множини $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N}_0$ замкнені стосовно операції додавання та множення, тобто:

(i) якщо $a, b \in \mathbb{N}$, то $a + b \in \mathbb{N}$ і $a \cdot b \in \mathbb{N}$;
(ii) якщо $a, b \in \mathbb{N}_0$, то $a + b \in \mathbb{N}_0$ і $a \cdot b \in \mathbb{N}_0$.

Однак, з $a, b \in \mathbb{N}_0$ не випливає, що $a - b \in \mathbb{N}_0$, наприклад $1 - 2 \notin \mathbb{N}_0$. Тобто множини $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N}_0$ не є замкненими стосовно операції віднімання. Розширивши множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ до множини $\mathbb{N}_0$ за допомогою дії

$$n - n = 0 \qquad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{N},$$

ми можемо розширити множину $\mathbb{N}_0$ до множини цілих чисел, ввівши *від'ємні цілі числа* так:

$$-n = 0 - n \qquad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ми ввели множину

$$\{\dots, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\},$$

яку будемо називати множиною *цілих чисел* і позначатимемо її так $\mathbb{Z}$. Очевидно, що множина цілих чисел замкнена стосовно операції віднімання чисел.

Однак множина цілих чисел не є замкненою стосовно операції ділення. Зауважимо, шо в математиці можна ділити лише на число, відмінне від нуля. Тому розширимо множину цілих чисел $\mathbb{Z}$ до множини раціональних чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Введення поняття дійсного числа є достатньо складним і громіздким, тому ми просто пригадаємо зі шкільного курсу математики, як там вводиться дійсне число. Наочно поняття дійсного числа можна уявити за допомогою числової прямої. Якщо

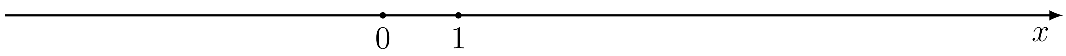


Рис. 1.1: Геометрична інтерпретація дійсного числа: числова пряма

на прямій обрати напрям, початкову точку та одиницю довжини для вимірювання відрізків, то кожному дійсному числу можна поставити у відповідність єдину точку на цій прямій, і навпаки, кожна точка представлятиме єдине дійсне число. Через цю відповідність, термін числова пряма зазвичай використовується як синонім множини дійсних чисел (див. рис. 1.1).

Множину дійсних чисел стандартно позначають $\mathbb{R}$.

З погляду сучасної математики, множина дійсних чисел утворює неперервне впорядковане поле. Це означає, що дійсні числа можна додавати, віднімати, множити та ділити (окрім ділення на нуль), і для них справджуються всі звичні властивості арифметичних дій (комутативність і асоціативність додавання та множення, дистрибутивність додавання та віднімання відносно множення тощо), їх можна порівнювати між собою (відомо котре з двох дійсних чисел більше, а котре менше чи вони рівні між собою), а також, що на числовій прямій немає “дірок” — між будь-якими дійсними числами знайдеться дійсне число.

Очевидно, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ замкнена стосовно розв'язування лінійних рівнянь, тобто розв'язок рівняння

$$a \cdot x = b,$$

де $a, b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$, є дійсним число. Однак вже розв'язки квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

можуть і не бути дійсними числами. Наприклад, рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має дійсних коренів. Більшу множину чисел, над якою всі квадратні рівняння мають розв'язки, а саме множину комплексних чисел, ми введемо в підрозділі 1.2.5.

Означення 1.2.1. Якщо a і b — цілі числа, $b \neq 0$, і якщо $a = kb$ для деякого цілого числа k, то ми будемо говорити, що b *ділить* a і, що b є *дільником* числа a. У цьому випадку ми писатимемо $b|a$.

Означення 1.2.2. Натуральне число p більше за 1, цілими дільниками якого є ± 1 або $\pm p$ називається *первинним* числом[1]. Два цілих числа a і b називаються *взаємно первинними*, якщо ± 1 — єдині їхні спільні дільники. Для фіксованих ненульових цілих чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, *найбільшим спільним дільником* цих чисел, позначається через $\gcd(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ або просто (n_1, n_2) у випадку $k = 2$, називається найбільше ціле число, яке ділить всі числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, і *найменше спільне кратне* цих чисел, позначається через $\operatorname{lcm}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, визначається як найменше невід'ємне ціле число m таке, що кожне з $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ділить m.

[1]Первинні числа в теорії чисел також називаються *простими*.

Теорема 1.2.3. *Якщо a і b — цілі числа та d — їх найбільший спільний дільник, то існують цілі числа s і t такі, що*

$$sa + tb = d.$$

Доведення. Доведення теореми 1.2.3 випливає з алгоритму Евкліда для цілих чисел.

Справді, алгоритм Евкліда діє знаходженням послідовності лишків r_1, r_2, r_3, і т.д., аж поки одне з цих чисел стане найбільшим спільним дільником чисел a і b. Ми доведемо математичною індукцією, що кожен лишок r_i є лінійною комбінацією чисел a і b. Припустимо, що $a > b$ і нехай $r_0 = a$ і $r_1 = b$. Тоді r_0 і r_1 є лінійною комбінацією чисел a і b, що є базою нашої індукції. Повторний крок у алгоритмі Евкліда визначає r_{n+2} так, що $r_n = qr_{n+1} + r_{n+2}$ або $r_{n+2} = r_n - qr_{n+1}$. З припущення індукції r_n і r_{n+1} є лінійною комбінацією чисел a і b, а отже число r_{n+2} є лінійною комбінацією чисел a і b. □

Означення 1.2.4. Нехай m — ціле число. Будемо говорити, що два цілі числа a і b *є конгруентними за модулем* m, або за $\mod m$, якщо число m ділить різницю $a - b$, що еквівалентно рівності $a = b + km$ для деякого цілого числа k. У цьому випадку ми писатимемо

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\, m).$$

Означення 1.2.5. Нехай a і m — цілі числа. Якщо $(a, m) = 1$, то число a називається *квадратично залишковим* за модулем m, якщо рівняння

$$x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\, m)$$

має розв'язок, а в протилежному випадку *квадратично незалишковим* за модулем m.

1.2.2 Елементи теорії множин

Означення 1.2.6. *Відношенням* між множинами $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ називається підмножина $\boldsymbol{S}$ декартового (Картезіанського) добутку $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y}\}$. Якщо $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$, то будемо називати $\boldsymbol{S}$ *бінарним відношенням* на $\boldsymbol{X}$. Запис $x\boldsymbol{S}y$ часто використовуватимемо для позначення того, що $(x, y) \in \boldsymbol{S}$.

Означення 1.2.7. Нехай $\boldsymbol{S}$ — відношення між множинами $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$. Визначимо підмножини $\mathrm{dom}(\boldsymbol{S})$ і $\mathrm{range}(\boldsymbol{S})$, які називаються *областю визначення* та *областю значень* відношення $\boldsymbol{S}$, відповідно, так

$$\mathrm{dom}(\boldsymbol{S}) = \{x \in \boldsymbol{X} \mid x\boldsymbol{S}y \text{ для деякого } y \in \boldsymbol{Y}\}$$

і

$$\mathrm{range}(\boldsymbol{S}) = \{y \in \boldsymbol{Y} \mid x\boldsymbol{S}y \text{ для деякого } x \in \boldsymbol{X}\}\,.$$

Будемо говорити, що відношення $\boldsymbol{S}$ є:

- *взаємно однозначним*, якщо з $x_1\boldsymbol{S}y$ і $x_2\boldsymbol{S}y$ випливає, що $x_1 = x_2$;
- *відношенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in \boldsymbol{Y}$ існує елемент $x \in \boldsymbol{X}$ такий, що $x\boldsymbol{S}y$;
- *коректно визначеним*, якщо $x\boldsymbol{S}y_1$ і $x\boldsymbol{S}y_2$ випливає, що $y_1 = y_2$.

Означення 1.2.8. Бінарне відношення $\boldsymbol{S}$ на множині $\boldsymbol{X}$ називається:

- *рефлексивним*, якщо $(x, x) \in \boldsymbol{S}$ для всіх $x \in \boldsymbol{X}$;
- *симетричним*, якщо з $(x, y) \in \boldsymbol{S}$ випливає $(y, x) \in \boldsymbol{S}$, $x, y \in \boldsymbol{X}$;
- *антисиметричним*, якщо з $(x, y), (y, x) \in \boldsymbol{S}$ випливає $x = y$, $x \in \boldsymbol{X}$;
- *транзитивним*, якщо з $(x, y), (y, z) \in \boldsymbol{S}$ випливає $(x, z) \in \boldsymbol{S}$, $x, y, z \in \boldsymbol{X}$;
- *відношенням еквівалентності* (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*), якщо $\boldsymbol{S}$ — одночасно рефлексивне, симетричне та транзитивне відношення на $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.2.9. Безпосередньо перевіркою доводиться, що відношення рівності множин на деякій множині множин, елементів фіксованої множини, чисел на множині чисел, і відношення конгруентності $\equiv$ на множині цілих чисел, є відношеннями еквівалентності.

Причина того, що відношення еквівалентності відіграють таку важливу роль у математиці, полягає в тому, що вони охоплюють фундаментальне поняття.

Доведення теореми 1.2.10 очевидне, і тому ми пропонуємо довести її читачеві.

Теорема 1.2.10. *Нехай $\boldsymbol{X}$ — непорожня множина.*

(1) *Для відношення $\boldsymbol{S}$ на $\boldsymbol{X}$ та $x \in \boldsymbol{X}$ визначимо*

$$\boldsymbol{S}_x = \{y \in \boldsymbol{X} \mid x\boldsymbol{S}y\}\,.$$

Якщо $\boldsymbol{S}$ відношення еквівалентності, то кожна множина $\boldsymbol{S}_x$ непорожня, а також множина $\boldsymbol{X}$ є об'єднанням таких множин.

(2) *Навпаки, припустимо, що множина $\boldsymbol{X}$ є диз'юнктним об'єднанням сім'ї $\{\boldsymbol{A}_\alpha\}$ непорожніх множин. Визначимо відношення $\boldsymbol{S}$ на $\boldsymbol{X}$ умовою, що $(x, y) \in \boldsymbol{S}$ тоді і тільки тоді, коли обидва елемента x та y належать до $\boldsymbol{A}_\alpha$ для деякого індекса α. Тоді $\boldsymbol{S}$ є відношенням еквівалентності.*

Означення 1.2.11. Нехай $\boldsymbol{S}$ — відношення еквівалентності на множині $\boldsymbol{X}$. Якщо $x \in \boldsymbol{X}$, то *клас еквівалентності* елемента x, позначається $[x]$, визначається так

$$[x] = \{y \in \boldsymbol{X} \mid x\boldsymbol{S}y\}\,.$$

Фактор-множина множини $\boldsymbol{X}$ за відношенням $\boldsymbol{S}$, позначається $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S} = \{[x] \mid x \in \boldsymbol{X}\}\,.$$

Означення 1.2.12. Нехай $\boldsymbol{S}$ — відношення на множині $\boldsymbol{X}$. Відношення еквівалентності на $\boldsymbol{X}$ *індуковане* відношенням $\boldsymbol{S}$, або *індуковане відношення еквівалентності*, визначається як перетин всіх відношень еквівалентності на $\boldsymbol{X}$, що містять відношення $\boldsymbol{S}$.

Можна легко показати, що відношення еквівалентності, індуковане відношенням, є відношенням еквівалентності, і його можна вважати "найменшим" відношенням еквівалентності, яке містить відношення $\boldsymbol{S}$.

Означення 1.2.13. Коректно визначене відношення $\boldsymbol{S}$ між двома множинами $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ називається *відображенням* або *функцією* з області визначення відношення $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{Y}$. Взаємно однозначне відображення називається *ін'єктивним* або просто *ін'єкцією*. Відображення "на" називається *сюр'єктивним* або просто *сюр'єкцією*.

Ми використовуватимемо позначення

$$f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$$

яке означатиме, що f є відображенням між множинами $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, чиїм областю визначення є множина $\boldsymbol{X}$ і називатимемо f є *відображенням* з $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$.Для такого відображення, стандартним позначенням для елемента y, який визначається xfy, є $f(x)$, і зазвичай використовують позначення $y = f(x)$, коли мова йде про відображення f. Інколи називають область значень відображення f точками, які ставляться у відповідність відображенням f.

Означення 1.2.14. Для фіксованої множини $\boldsymbol{X}$, визначимо *діагональне відображення*

$$d\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \times \cdots \times \boldsymbol{X}$$

за формулою

$$d(x) = (x, x, \ldots, x).$$

Означення 1.2.15. Для сім'ї відображень $\{f_i\colon \boldsymbol{X}_i \to \boldsymbol{Y}_i\}$ означимо *добуток відображень*

$$f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n\colon \boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{Y}_1 \times \boldsymbol{Y}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_n$$

за формулою

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))\,.$$

Означення 1.2.16. *Графік* відображення $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, позначається $\operatorname{graph}(f)$, це множина, яка визначається так

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \boldsymbol{X}\} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}.$$

Означення 1.2.17. Для відображень $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ і $g\colon \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$, *складене відображення*

$$g \circ f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$$

визначається за формулою

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in \boldsymbol{X}.$$

Означення 1.2.18. Відображення $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, яке однозначно є ін'єктивним і сюр'єктивним, називається *бієктивним* або *бієкцією*. У цьому випадку, *обернене відображення* до f, позначається f^{-1}, це відображення

$$f^{-1}\colon \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X},$$

яке визначається умовою, що $f^{-1}(y) = x$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) = y$.

Якщо для відображення $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ існує обернене, то очевидно, що $f^{-1} \circ f$ і $f \circ f^{-1}$ — тотожні відображення множин $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, відповідно. Виконується й обернене твердження, доведення якого очевидне.

Теорема 1.2.19. *Якщо $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ і $g\colon \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ — два відображення, які задовольняють таку властивість, що $g \circ f$ і $f \circ g$ — тотожні відображення множин $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, відповідно, то $g = f^{-1}$.*

Характеризація оберненого відображення в теоремі 1.2.19 часто використовується для визначення того, чи є відображення оберненим до іншого.

Означення 1.2.20. Нехай $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ і $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$. *Повний прообраз* множини $\boldsymbol{A}$ стосовно відображення f, позначається $f^{-1}(\boldsymbol{A})$, визначається так

$$f^{-1}(\boldsymbol{A}) = \{x \in \boldsymbol{X} \mid f(x) \in \boldsymbol{A}\}.$$

Наприклад для відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яке визначається за формулою $f(x) = x^2$, маємо, що $f^{-1}([9, 25]) = [-5, -3] \cup [3, 5]$.

Означення 1.2.21. Нехай $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$. Довільна точка $x \in \boldsymbol{X}$ з властивістю $f(x) = x$ називається *нерухомою точкою* відображення f. Якщо $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$ і якщо $f(a) \in \boldsymbol{A}$ для всіх $a \in \boldsymbol{A}$, то будемо говорити, що множина $\boldsymbol{A}$ *інваріантна* стосовно відображення f, або, що множина $\boldsymbol{A}$ є *інваріантом* або *нерухома* множина для відображення f.

Зауважимо, що нерухома множина не є обов'язково множиною нерухомих точок. Наприклад, відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, означене $f(x, y) = (x+1, y+1)$, має множину $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ як нерухому множину, однак жодна точка цієї множини не є нерухомою точкою.

Означення 1.2.22. Множина $\boldsymbol{X}$ називається *зліченною*, якщо вона скінченна, або існує бієкція між $\boldsymbol{X}$ і множиною додатних цілих (натуральних) чисел.

Ми завершимо деякими означеннями впорядкування елементів множини.

Означення 1.2.23. Нехай $\boldsymbol{X}$ — множина. *Частковий порядок* на $\boldsymbol{X}$ — це рефлексивне, антисиметричне та транзитивне вілношення на $\boldsymbol{X}$. *Лінійний порядок* на множині $\boldsymbol{X}$ — це частковий порядок $\leq$ на $\boldsymbol{X}$ з додатковою умовою: для довільних $x, y \in \boldsymbol{X}$ виконується хоча б одна з умов $x \leq y$ або $y \leq x$. *Повний порядок* (*повне впорядкування*) на множині $\boldsymbol{X}$ — це такий лінійний порядок $\leq$ на $\boldsymbol{X}$, що задовольняє умову: кожна непорожня підмножина $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{X}$ містить *найменший елемент* у $\boldsymbol{A}$, тобто існує елемент $a \in \boldsymbol{A}$ такий, що $a \leq b$ для всіх $b \in \boldsymbol{A}$.

Для лінійного порядку $\leq$ на множині $\boldsymbol{X}$ через $<$ позначимо відношення на $\boldsymbol{X}$, означене $x < y$ тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$ і $x \neq y$. Зауважимо, що відношення $<$, отримане таким чином не є лінійним порядком, оскільки воно не є рефлексивним, але ми можемо повернутися до лінійного порядку $\leq$ просто додавши відношення $x \leq x$. Впродовж всього тексту цієї книжки, через відношення яке позначається через "$<$" і називатимемо це порядком, ми завжди будемо вважати, що воно походить від якогось пов'язаного лінійного порядку $\leq$. Висловлення "лінійний порядок $<$" або "повний порядок $<$" мають на увазі "лінійний порядок $\leq$" або "повний порядок $\leq$", відповідно.

Стандартним прикладом загального порядку є звичайне відношення $\leq$ для чисел, що пояснює наш вибір запису для такого відношення. Звичайне відношення $\leq$ є повним упорядкуванням множини цілих невід'ємних чисел. З іншого боку, звичайне відношення $<$ не є лінійним порядком на множині чисел чисел саме по собі, оскільки воно не є рефлексивним. Якщо ви бажаєте мати окремі визначення для природних упорядкувань, таких як $<$, можна ввести поняття строгих часткових порядків (що в основному усуває властивість рефлексивності), строгих лінійних порядків і відповідну версію повної впорядкованості та найменшого елемента. У цій книзі це не буде потрібно. Слід також зазначити, що є деякі незначні відмінності у визначеннях упорядкування в літературі, і читачам, можливо, доведеться бути обережними, коли вони бачать ці терміни. Однак будь-які відмінності носять лише технічний характер і не змінюють суттєві концепції, які вони намагаються охопити.

1.2.3 Підстановки

Означення 1.2.24. *Підстановкою* (*перестановкою*) множини $\boldsymbol{X}$ називається бієкція $\boldsymbol{\sigma}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$. Множина всіх підстановок на множині $\boldsymbol{X}$ позначається через $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$. Для двох підстановок $\boldsymbol{\sigma}$ і $\boldsymbol{\tau}$ множини $\boldsymbol{X}$ визначимо їх добуток $\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}$ як композицію двох відображень, а саме

$$(\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau})(x) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}(x)) \qquad \text{для} \quad x \in \boldsymbol{X}.$$

Операція $\circ$ насправді перетворює множину $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$ у (некомутативну) групу (див. підрозділ 1.2.4 для означення групи), але це не відіграє важливу роль у поточному обговоренні.

Означення 1.2.25. Множина підстановок множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ разом з операцією $\circ$ називається *симетричною групою порядку* n і позначається $\boldsymbol{S}_n$.

У цьому підрозділі зібрано декілька основних фактів про $\boldsymbol{S}_n$.

Означення 1.2.26. Підстановка $\boldsymbol{\tau}$ в $\boldsymbol{S}_n$ називається *транспозицією*, якщо вона міняє місцями два числа і залишає всі інші числа нерухомими (фіксованими), тобто числа $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ з $i \neq j$ такі, що $\boldsymbol{\tau}(i) = j$, $\boldsymbol{\tau}(j) = i$, і $\boldsymbol{\tau}(k) = k$, для $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$.

Лема 1.2.27. *Кожну підстановку $\boldsymbol{\sigma}$ в $\boldsymbol{S}_n$, $n \geq 2$, можна записати як добуток транспозицій, тобто*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}_1 \circ \boldsymbol{\tau}_1 \circ \cdots \circ \boldsymbol{\tau}_n,$$

де $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_n$ — транспозиції.

Доведення. Ми використаємо індукцію по n. Твердження леми очевидне у випадку $n = 2$. Зауважимо, що тотожне відображення є композицією $\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\tau}$ для довільної транспозиції $\boldsymbol{\tau}$. Припустимо, що твердження леми виконується для $n-1$, $n \leq 3$, і нехай $\boldsymbol{\sigma}$ — підстановка в $\boldsymbol{S}_n$.

Випадок 1. $\boldsymbol{\sigma}(n) = n$. У цьому випадку, $\boldsymbol{\sigma}$ можна вважати, що належить $\boldsymbol{S}_{n-1}$. З припущення індукції випливає, що $\boldsymbol{\sigma}$ є добутком транпозицій в $\boldsymbol{S}_{n-1}$. Оскільки транспозиції множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ можна вважати як транспозиції множини $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, що завершує доведення цього випадку.

Випадок 2. $\boldsymbol{\sigma}(n) = i$, $i \neq n$. Нехай $\boldsymbol{\tau}_1$ — транспозиція в $\boldsymbol{S}_n$, яка визначається так $\boldsymbol{\tau}_1(n) = i$ і $\boldsymbol{\tau}_1(i) = n$. Тоді

$$(\boldsymbol{\tau}_1 \circ \boldsymbol{\sigma})(n) = \boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\sigma}(n)) = \boldsymbol{\tau}_1(i) = n.$$

З випадку 1 випливає, що $\boldsymbol{\tau}_1 \circ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}_2 \circ \boldsymbol{\tau}_3 \circ \cdots \circ \boldsymbol{\tau}_k$ для деяких транспозицій $\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3, \ldots, \boldsymbol{\tau}_k \in \boldsymbol{S}_n$. Звідси випливає, що

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}_1 \circ \boldsymbol{\tau}_1 \circ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}_1 \circ \boldsymbol{\tau}_2 \circ \boldsymbol{\tau}_3 \circ \cdots \circ \boldsymbol{\tau}_k,$$

що завершує доведення випадку 2, а отже, і леми. □

Спосіб, яким перестановку можна записати як добуток транспозицій, не є єдиним, однак виконується така теорема.

Теорема 1.2.28. *Нехай $\boldsymbol{\sigma}$ — підстановка в $\boldsymbol{S}_n$ і припустимо, що*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\tau}_1 \circ \boldsymbol{\tau}_2 \circ \boldsymbol{\tau}_3 \circ \cdots \circ \boldsymbol{\tau}_s = \\ &= \boldsymbol{\eta}_1 \circ \boldsymbol{\eta}_2 \circ \boldsymbol{\eta}_3 \circ \cdots \circ \boldsymbol{\eta}_t,\end{aligned}$$

де $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3, \ldots, \boldsymbol{\tau}_s, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ — транспозиції в $\boldsymbol{S}_n$. Тоді числа s і t є одночасно або парні, або непарні.

Схема доведення. Якщо $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — відображення та $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{S}_n$, то означимо відображення $f_{\boldsymbol{\sigma}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$f_{\boldsymbol{\sigma}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(x_1), \boldsymbol{\sigma}(x_2), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(x_n)). \tag{1.1}$$

Тепер розглянемо відображення $\Delta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Можна довести, що функції Δ і $\Delta_{\boldsymbol{\sigma}}$ (як визначено рівністю (1.1)) задовольняють такі дві властивості:

(1) якщо $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{S}_n$, то $\Delta_{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\tau}} = (\Delta_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\sigma}}$;
(2) $\Delta_{\boldsymbol{\tau}} = -\Delta$ для довільної транспозиції $\Delta_{\boldsymbol{\tau}} \in \boldsymbol{S}_n$.

Використавши властивості (1) і (2) бачимо, що для підстановки $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{S}_n$ в теоремі маємо

$$\begin{aligned}\Delta_{\boldsymbol{\sigma}} &= \Delta_{\boldsymbol{\tau}_1\circ\boldsymbol{\tau}_2\circ\boldsymbol{\tau}_3\circ\cdots\circ\boldsymbol{\tau}_s} = (-1)^s\Delta;\\ \Delta_{\boldsymbol{\sigma}} &= \Delta_{\boldsymbol{\eta}_1\circ\boldsymbol{\eta}_2\circ\boldsymbol{\eta}_3\circ\cdots\circ\boldsymbol{\eta}_t} = (-1)^t\Delta.\end{aligned}$$

Іншими словами, отримуємо, що $(-1)^s = (-1)^t$, що і завершує доведення теореми. ☐

З теореми 1.2.28 випливає, що наступне означення коректно визначене.

Означення 1.2.29. Підстановка $\boldsymbol{\sigma}$ в $\boldsymbol{S}_n$ називається *парною*, якщо її можна записати як добуток парної кількості транспозицій. У протилежному випадку підстановка $\boldsymbol{\sigma}$ називається *непарною*.

Очевидно, що добуток двох парних підстановок є парною підстановкою. Також, підстановка $\boldsymbol{\sigma}$ в $\boldsymbol{S}_n$ парна тоді і лише тоді, коли підстановка $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ парна. Отже, якщо ми визначимо $\boldsymbol{\sigma} \sim \boldsymbol{\tau}$ якщо композиція $\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\tau}^{-1}$ парна підстановка, то відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності на $\boldsymbol{S}_n$ і $\boldsymbol{S}_n$ розбивається на два класи еквівалентності відношенням $\sim$, а саме, парні та непарні підстановки.

Означення 1.2.30. *Знак* підстановки $\boldsymbol{\sigma}$ в $\boldsymbol{S}_n$, позначається $\operatorname{sign}(\boldsymbol{\sigma})$, визначається за формулою

$$\operatorname{sign}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } \boldsymbol{\sigma} \text{ парна};\\ -1, & \text{якщо } \boldsymbol{\sigma} \text{ парна}.\end{cases}$$

Означення 1.2.31. Відображення $f\colon \boldsymbol{X}^n \to \boldsymbol{Y}$ називається *симетричним*, якщо

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\boldsymbol{\sigma}(x_1), \boldsymbol{\sigma}(x_2), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(x_n)),$$

для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{X}$ і підстановки $\boldsymbol{\sigma}$ множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1.2.4 Групи

Слово "група" зустрічається в кількох місцях у цій книзі. Концепція справді важлива лише в розділах 7 і 8, які включають алгебраїчну топологію, але вона корисна в інших місцях, оскільки вона фіксує деякі важливі властивості в одному слові. У цьому розділі розглядаються лише ті означення та результати, які необхідні в цій книзі. Більше непотрібно. Фактично, за винятком фундаментальної групи топологічного простору, яка включає вільні групи і посилається на поняття комутаторної підгрупи, усі групи будуть абелевими. З цієї причини, крім надання необхідних означень, більшість обговорень і прикладів буде зосереджено на абелевих групах. Зацікавленого читача ми скеровуємо до книг з сучасної алгебри для більш ґрунтовного обговорення груп, зокрема, до посилань у бібліографії.

Нехай $\boldsymbol{G}$ — множина та "$\cdot$" — бінарна операція на $\boldsymbol{G}$, тобто, "$\cdot$" — це відображення

$$\cdot : \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}.$$

Зазвичай у цьому випадку, якщо g_1 і g_2 — елементи множини $\boldsymbol{G}$, то ми будемо писати $g_1 \cdot g_2$ замість функціонального вигляду $\cdot(g_1, g_2)$.

Означення 1.2.32. Пара $(\boldsymbol{G}, \cdot)$ називається *групою*, якщо бінарна операція "$\cdot$" задовольняє такі умови:

(1) **(асоціативність):** $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ для довільних елементів g_1, g_2 і g_3 множини $\boldsymbol{G}$;

(2) **(існування одиниці):** існує такий елемент $e \in \boldsymbol{G}$, що називається *одиницею*, або *одиничним елементом* в $\boldsymbol{G}$, що

$$e \cdot g = g \cdot e = g,$$

для всіх $g \in \boldsymbol{G}$;

(3) **(існування оберненого елемента):** для довільного елемента g в $\boldsymbol{G}$ існує елемент g^{-1} в $\boldsymbol{G}$, який називається *оберненим* до g, такий, що

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e.$$

Приклад 1.2.33. *Симетрична група порядку n* $\boldsymbol{S}_n$ стосовно операції добутку підстановок $\circ$, яку ми обговорювали в підрозділі 1.2.3, є скінченною групою з $n!$ елементами.

Не складно довести, що в групі існує лише одна одиниця, а також для довільного елемента групи існує єдиний обернений елемент. Звідси випливає, для довільного елемента g групи $\boldsymbol{G}$ виконується рівність

$$\left(g^{-1}\right)^{-1} = g.$$

Найпростішою групою є така, яка складається з одного одиничного елемента.

Означення 1.2.34. Група, яка складається лише з одного одиничного елемента називається *тривіальною групою*.

Означення 1.2.35. Група $(\boldsymbol{G}, \cdot)$ називається *абелевою* або *комутативною*, якщо вона задовольняє умову:

(4) **(комутативність):** $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ для довільних елементів g_1 і g_2 з $\boldsymbol{G}$.

Приклад 1.2.36. Стандартними прикладами абелевих груп є множини $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ стосовно операції додавання (чисел). Множини $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ є групами стосовно операції множення (чисел). Множини $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ стають абелевими групами стосовно операції *додавання векторів*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Приклад 1.2.37. Для довільного додатного цілого числа n покладемо

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

і визначимо бінарну операцію $+_n$ на $\mathbb{Z}_n$ так: якщо $a, b \in \mathbb{Z}_n$, то

$$a +_n b = d,$$

де

$$a + b = kn + d,$$

та k і d — цілі числа такі, що $0 \leqslant d < n$. Легко перевіряється, що $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ (або $\mathbb{Z}_n$ коротко) є абелевою групою, яка називається *групою лишків за модулем n*.

Приклад 1.2.38. Нехай p — первинне число і $\boldsymbol{X} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Означимо бінарну операцію "$\cdot$" на $\boldsymbol{X} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ наступним чином. Нехай $a, b \in \boldsymbol{X}$. Виберемо цілі числа k і r так, щоб

$$ab = kp +_n r, \qquad \text{де} \quad 0 < r < p,$$

і приймемо

$$a \cdot b = r.$$

Легко перевірити, що $(\boldsymbol{X}, \cdot)$ — коректно визначена абелева мультиплікативна група. Звернемо увагу на те, що оскільки будь-яке ціле число в $\boldsymbol{X}$ є відносно первинним до p, то з теореми 1.2.3 випливає, що воно має обернене стосовно бінарної операції "$\cdot$".

Зауваження 1.2.39. Надалі, маючи справу з групою $(\boldsymbol{G}, \cdot)$, для якої операція "$\cdot$" очевидна з контексту, ми будемо просто посилатися на "групу "$\boldsymbol{G}$".

У загальному випадку групи зазвичай групову операцію розглядають як операцію множення (мультиплікативну операцію) і використовують символ "1" в якості одиниці групи. Тривіальні групи, що складаються лише з одного елемента, позначатимуться "$\mathbf{1}$". Також просто записуватимемо "gh" для добутку групових елементів g і h, а не "$g \cdot h$". Якщо g є груповим елементом, то через g^k буде позначати елемент

$$\underbrace{g \cdot g \cdot \ldots \cdot g}_{k-\text{разів}}.$$

У випадку абелевої групи стандартною умовою є використання адитивного позначення, тому ми будемо використовувати символ "$+$" для групової операції, "0" буде (адитивною) одиницею, а через "$-g$" будемо позначати обернений елемент до елемента g. Тривіальні абелеві групи, що складаються лише з одного елемента, будемо позначати через $\mathbf{0}$. Якщо $k \in \mathbb{N}$, то через kg буде позначати елемент

$$\underbrace{g + g + \cdots + g}_{k-\text{разів}}.$$

Означення 1.2.40. Нехай $(\boldsymbol{G}, \cdot)$ — група. Підмножина $\boldsymbol{H}$ у $\boldsymbol{G}$ називається *підгрупою* в $(\boldsymbol{G}, \cdot)$, якщо множина замкнена стосовно групової операції "$\cdot$" та операції взяття оберненого елемента в $(\boldsymbol{G}, \cdot)$, тобто $g \cdot h \in \boldsymbol{H}$ і $g^{-1} \in \boldsymbol{H}$ для довільних $g, h \in \boldsymbol{H}$.

Приклад 1.2.41. Кожна нетривіальна група $\boldsymbol{G}$ містить хоча б дві підгрупи, це сама група $\boldsymbol{G}$ та її одиниця $\mathbf{1}$, як підмножина в $\boldsymbol{G}$.

Приклад 1.2.42. Для довільного цілого числа k множина

$$k\mathbb{Z} = \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

є підгрупою *адитивної групи цілих чисел* $(\mathbb{Z}, +)$, і більше того кожна підгрупа в $(\mathbb{Z}, +)$ має такий вигляд.

Приклад 1.2.43. Для довільного натурального числа n множина $\mathbb{Z}^n$ є підгрупою в $\mathbb{R}^n$ (стосовно операції додавання векторів).

Приклад 1.2.44. Множина $\{0, 3, 6\}$ є підгрупою в $\mathbb{Z}_9$.

Приклад 1.2.45. Множина $3\mathbb{Z} \cup \{5\}$ не є підгрупою в адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}$ (тобто в $(\mathbb{Z}, +)$).

Наступна лема дає простий критерій, коли підмножина групи є підгрупою. Доведення леми 1.2.46 очевидне.

Лема 1.2.46. (1) *Непорожня підмножина* $\boldsymbol{H}$ *у групі* $\boldsymbol{G}$ *є підгрупою тоді і тільки тоді, коли елемент* $h_1 h_2^{-1} \in \boldsymbol{H}$ *для довільних* $h_1, h_2 \in \boldsymbol{H}$

(2) *Перетин довільної кількості підгруп у групі є підгрупою.*

Означення 1.2.47. Підгрупа $\boldsymbol{H}$ у групі $\boldsymbol{G}$ називається *нормальною підгрупою* групи $\boldsymbol{G}$ якщо $ghg^{-1} \in \boldsymbol{H}$ для всіх $g \in \boldsymbol{G}$ і всіх $h \in \boldsymbol{H}$.

Зауважимо, що кожна підгрупа комутативної групи є нормальною.

Означення 1.2.48. Нехай $\boldsymbol{G}$ і $\boldsymbol{H}$ — групи. Відображення $f\colon \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ називається *гомоморфізмом*, якщо

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

для всіх $g_1 g_2 \in \boldsymbol{G}$. Гомоморфізм груп називається *ізоморфізмом*, якщо він є бієктивним відображенням. У цьому випадку ми будемо говорити, що група $\boldsymbol{G}$ *ізоморфна* групі $\boldsymbol{H}$, і це ми записуватимемо так $\boldsymbol{G} \approx \boldsymbol{H}$.

1.2.5 Комплексні числа

В цьому підрозділі ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики.

Ототожнимо точку $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ з формальним записом $a+ib$, причому для спрощення викладок формальний запис $0+ib$ будемо ототожнювати з ib, а запис $i1$ — з i. Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання "$+$" і множення "$\cdot$" на $\mathbb{R}^2$ наступним чином:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d),$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc).$$

Доведення теореми 1.2.49 є очевидним.

Теорема 1.2.49. $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *є полем, яке позначається через* $\mathbb{C}$*, яке містить множину* $\mathbb{R}$ *як підполе стосовно відображення ототожнення елемента* a *з точкою з координатами* $(a,0)$*.*

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля $\mathbb{C}$ називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці -1 дорівнює i. Тому надалі символ i будемо називати *уявною одиницею*.

Означення 1.2.50. Нехай $z = a+ib \in \mathbb{C}$. Тоді число a називається *дійсною частиною* комплексного числа z і дійсне число b називається *уявною частиною* комплексного числа z. Означимо функції $\operatorname{Re}(z)$ і $\operatorname{Im}(z)$ за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Im}(z) = b.$$

Комплексно спряжене (або просто *спряжене*) *число* до комплесного числа z, позначається $\overline{z}$, і *модуль* числа z, позначається $|z|$, визначаються за формулами

$$\overline{z} = a - ib \qquad \text{і} \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

З означення поля комплексних чисел $\mathbb{C}$ випливає, що його можна ототожнимо з точками декартової площини наступним чином:

> *комплексному числу* $z = a+ib \in \mathbb{C}$ *ставимо у відповідність точку з координатами* (a,b) *на декартовій площині.*

Таке ототожнення надалі будемо називати *геометричною інтерпретацією* комплексних чисел, і вона зображена на рис. 1.2. Також, в такій інтерпретації ми комплексне число $z = a+ib \in \mathbb{C}$ ототожнюємо з вектором з координатами (a,b), і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь Ox будемо називати *дійсною* віссю, а вісь Oy — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа $z = a+ib$ дорівнює довжині вектора з координатами (a,b) декартової площини (див. рис. 1.2).

Ось три прості факти, які легко перевірити:

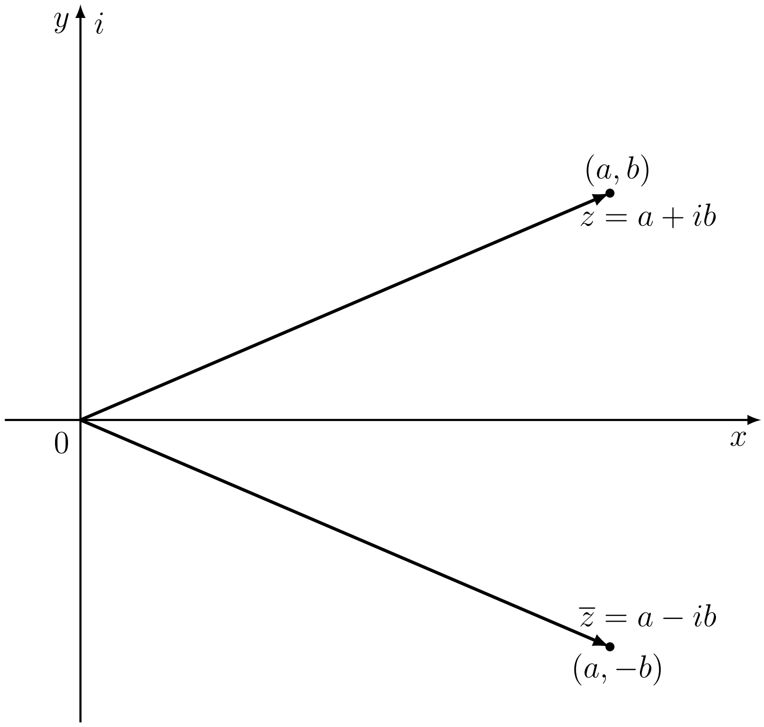


Рис. 1.2: Геометрична інтерпретація комплексного числа

(1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,;$$

(2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2;$$

(3) обернене до комплексного числа $z = a + ib$ обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел випливають такі їх властивості:

(4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\overline{z}|\,;$$

(5) різниця комплексних чисел $z_1 = a + ib$ і $z_2 = c + id$ обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

(6) частка комплексних чисел $z_1 = a + ib$ і $z_2 = c + id$ обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження $(1) - (6)$ самостійно.

Тригонометрична форма комплексного числа. Кожному комплексному числу $z = a + ib$ відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$ точки $A(a, b)$ (див. рис. 1.3). Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі)

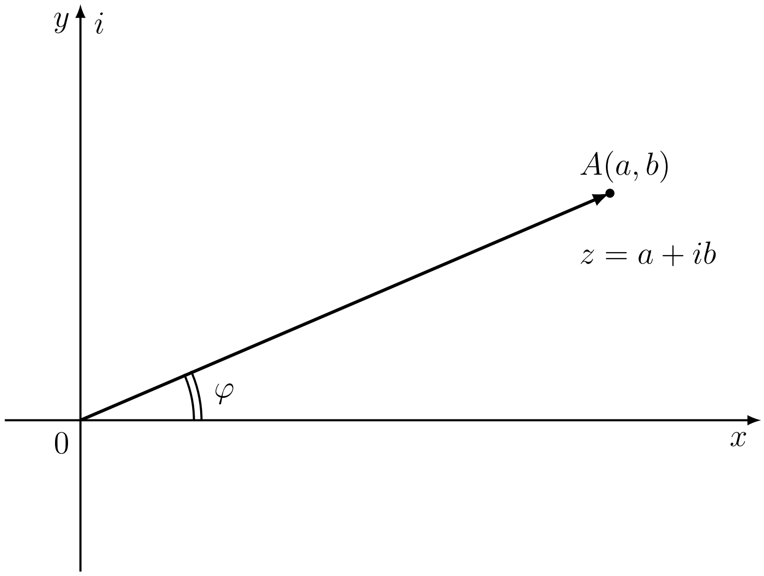


Рис. 1.3: Геометрична інтерпретація комплексного числа

визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначається однозначно його довжиною та кутом який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі Ox. Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі Ox проти годинникової стрілки.

Якщо вектор $\overrightarrow{OA}$ відповідає комплексному числу $z = a + ib$, то через r позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ (тобто модуль комплексного числа $z = a + ib$), а через φ кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямком осі Ox. Тоді

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\
a &= r\cos\varphi, \\
b &= r\sin\varphi,
\end{aligned}
$$

а отже

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

У цьому випадку кут φ будемо називати *аргументом* комплексного числа $z = a+ib$. Надалі аргумент комплексного числа $z = a + ib$ будемо позначати через $\arg z$. Якщо $|z| = 0$, то аргумент $\arg z$ числа z невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до 2π. Очевидно, що аргумент комплексного числа $z = a + ib$ визначається з системи рівнянь

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\
\sin\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Запис комплексного числа $z = a + ib$ вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.3}$$

називається *тригонометричною формою комплексного числа.*

Зауважимо, що число φ є аргументом комплексного числа $z = a+ib$ тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності (1.2). Отже, для знаходження аргументу комплексного числа $z = a + ib$ необхідно розв'язати систему рівнянь (1.2). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

де φ_0 — один з розв'язків системи (1.2). Таким чином аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Тому ми надалі вважаємо, що $0 \le \varphi < 2\pi$.

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}
&|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;\\
&\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};\\
&\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2;\\
&\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.
\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}
z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);\\
z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).
\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

Приклад 1.2.51. Комплексні числа $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ записати в тригонометричній формі і знайти $z_1 \cdot z_2$ і $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Розв'язання. Знаходимо $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$. З системи

$$\begin{cases}
\cos\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\[2ex]
\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}
\end{cases}$$

маємо $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Отже,

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2;$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

□

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Приклад 1.2.52. Обчислити $(-1+i)^{20}$.

Розв'язання. Оскільки $(-1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, то за формулою Муавра

$$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\frac{60\pi}{4} + i\sin\frac{60\pi}{4}\right) =$$

$$= 1024(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = 1024(-1+0i) = -1024.$$

□

Розглянемо операцію добування кореня n-го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Припустимо, що $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тоді за формулою Муавра маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Звідси $\rho^n = r$ і $n\psi = \varphi + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \qquad \text{i} \qquad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким чином, корінь n-го степеня з комплексного числа z ($z \neq 0$) має n різних значень.

Приклад 1.2.53. Знайдіть $\sqrt[3]{-1+i}$.

Розв'язання. Оскільки $(-1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

□

1.2.6 Системи лінійних рівнянь і методи їх розв'язування

Системи лінійних рівнянь лежать в основі лінійної алгебри. У цьому підрозділі ми розглянемо основний метод їх розв'язування — метод Гаусса.

Поняття про системи лінійних рівнянь

Означення 1.2.54. *Лінійним рівнянням з n невідомими* $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем k називається рівняння, яке може бути записане у вигляді

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \tag{1.5}$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ — елементи поля k.

Приклад 1.2.55. Рівняння $4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1$ і $x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$ є лінійними, хоча і не записані у вигляді (1.5), а рівняння $x_1x_2 = 6 + x_1 + x_2$ не є лінійним.

Означення 1.2.56. *Системою лінійних рівнянь* називається набір з одного чи більше лінійних рівнянь відносно однієї і тієї ж множини змінних (наприклад, $x_1, x_2, \dots,$ x_n).

У загальному вигляді система лінійних рівнянь, що містить m рівнянь з n невідомими, має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.6}$$

Означення 1.2.57. *Розв'язком системи лінійних рівнянь* (1.6) називається впорядкована множина чисел $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, яка при підстановці в дану систему відповідно замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює кожне рівняння системи на правильну числову рівність.

Наприклад, пара чисел $(3, -1)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$$

Якщо існує хоча б один розв'язок системи лінійних рівнянь (1.6), то система (1.6) називається *сумісною*, в іншому випадку — *несумісною*. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок; а система лінійних рівнянь, яка має більше одного розв'язка називається *невизначеною*.

Розв'язати систему лінійних рівнянь — означає знайти множину її розв'язків.

Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

називається *однорідною*. Однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна, оскільки впорядкований набір $(0, 0, \ldots, 0)$ є її розв'язком. Разом з цим вона може бути як визначеною, так і невизначеною. Якщо впорядкований набір $(0, 0, \ldots, 0)$ не є розв'язком системи лінійних рівнянь, то вона називається *неоднорідною*.

Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома невідомими вивчаються в шкільному курс алгебри (методи підстановки і додавання). Для дослідження питання сумісності системи лінійних рівнянь можна використати графічний метод.

Приклад 1.2.58. Дослідити на сумісність систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ -x + 3y = 3. \end{cases}$$

Розглянемо графіки обох рівнянь системи в прямокутний декартовій системі координат. Добре відомо, що це прямі, які перетинаються (див. рис. 1.4). Отже, система

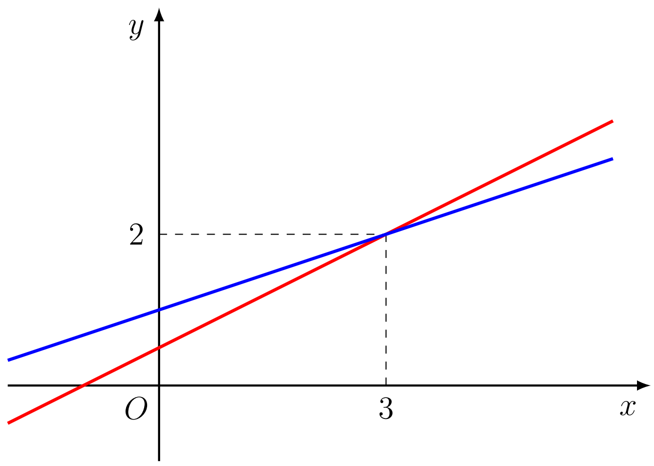


Рис. 1.4: Прямі задані рівняннями $x - 2y = -1$ і $-x + 3y = 3$

сумісна, причому $(3, 2)$ — розв'язок цієї системи.

Означення 1.2.59. Дві системи рівнянь називаються *еквівалентними* (*рівносильними*), якщо множини їхніх розв'язків збігаються, тобто кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої і, навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої.

Основна ідея при розв'язування систем лінійних рівнянь — заміна даної системи на еквівалентну до даної, яку можна розв'язати з якихось міркувань простіше.

Наступні перетворення системи лінійних рівнянь називаються *елементарними*:

1) перестановка двох рівнянь у системі;
2) множення будь-якого рівняння системи на відмінний від нуля елемент поля k;
3) додавання до будь-якого рівняння системи будь-якого іншого рівняння, помноженого на довільний елемент поля k;
4) вилучення із системи рівняння виду $0 = 0$ або приписування до системи такого рівняння.

Теорема 1.2.60. *Елементарне перетворення кожної системи лінійних рівнянь переводить її у еквівалентну систему.*

Доведення. Нехай система лінійних рівнянь $\mathcal{S}_2$ отримується з системи лінійних рівнянь $\mathcal{S}_1$ шляхом певного елементарного перетворення. Покажемо, що кожний розв'язок системи $\mathcal{S}_1$ є розв'язком системи $\mathcal{S}_2$ і навпаки. Для перетворень 1, 2, 4 це очевидно. Доведемо це для третього елементарного перетворення.

Але спочатку зауважимо, що елементарні перетворення систем лінійних рівнянь оборотні. Це означає, якщо ми з деякої системи $\mathcal{S}_1$ шляхом елементарного перетворення отримали систему $\mathcal{S}_2$, то існує елементарне перетворення, що переводить систему $\mathcal{S}_2$ назад в систему $\mathcal{S}_1$.

Нехай тепер система $\mathcal{S}_1$ має вигляд (1.6), а система $\mathcal{S}_2$ відрізняється від системи $\mathcal{S}_1$ лише i-м рівнянням, яке має вигляд

$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + (a_{i2} + ca_{j2})x_2 + \ldots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + cb_j.$$

Тоді якщо $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ — розв'язок системи $\mathcal{S}_1$, тобто

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ \ldots \ + a_{1n}s_n = b_1, \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ \ldots \ + a_{2n}s_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n = b_m, \end{cases}$$

то впорядкований набір $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ задовольняє і рівність

$$(a_{i1} + ca_{j1})s_1 + (a_{i2} + ca_{j2})s_2 + \ldots + (a_{in} + ca_{jn})s_n = b_i + cb_j,$$

а отже є розв'язком системи $\mathcal{S}_2$. Оскільки елементарні перетворення оборотні, то і, навпаки, кожний розв'язок системи $\mathcal{S}_2$ є розв'язком системи $\mathcal{S}_1$, тобто системи $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_2$ еквівалентні. □

Нехай маємо систему лінійних рівнянь (1.6). Випишемо коефіцієнти цієї системи в таку таблицю, яку називатимемо *матрицею коефіцієнтів* (*головною матрицею*) цієї системи:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Розширена матриця системи відрізняється вад головної тим, що додатково виписаний також і стовпець вільних членів. Стовпець вільних членів прийнято відокремлювати вад головної матриць вертикальною рискою:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Приклад 1.2.61. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ \quad y + 3z = 5, \\ \qquad 5z = 10. \end{cases}$$

Розв'язок. З останнього рівняння однозначно знаходимо, що $z = 2$. Тоді з другого рівняння знаходимо, що $y = 5 - 3z = -1$, а з першого — $x = 2 + y + z = 3$.

Відповідь. $\{(3, -1, 2)\}$.

Приклад 1.2.62. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

Розв'язок. Спробуємо за допомогою елементарних перетворень звести дану систему до так званого "трикутного вигляду", тобто такого вигляду, як у прикладі 1.2.61. Від другого рядка віднімемо потроєний перший рядок, а від третього рядка — подвоєний перший рядок

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9, \end{cases}$$

і отримуємо

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ \qquad 5z = 10, \\ \quad y + 3z = 5. \end{cases}$$

Далі поміняємо другий та третій рядки місцями:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ \quad y + 3z = 5, \\ \qquad 5z = 10. \end{cases}$$

Відповідь. $\{(3, -1, 2)\}$.

Східчата форма матриць. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Означення 1.2.63. Будемо говорити, що матриця має *східчату форму* (або *рядково східчату форму*), якщо вона задовольняє такі умови:

1) усі ненульові рядки знаходяться вище всіх нульових рядків;
2) у кожному ненульовому рядку перший ненульовий елемент (він називається *ведучим елементом рядка*) розташований у стовпці справа від ведучого елемента у рядку над ним.

Приклад 1.2.64. Наступні матриці мають східчату форму:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\star} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} \end{bmatrix}.$$

Тут ведучі елементи кожного рядка обведені в рамку; $\star$ — довільний елемент, $\boxed{\star}$ — довільний ненульовий елемент.

Елементарними перетвореннями рядків матриці називатимемо такі:

1) перестановка двох рядків місцями;
2) множення рядка матриці на ненульовий елемент поля k;
3) додавання до одного рядка іншого, помноженого на деяке число з поля k;
4) вилучення з матриці нульового рядка (якщо він існує) або приписування до матриці нульового рядка.

Дві матриці називаються *рядково еквівалентними*, якщо існує послідовність елементарних рядкових операцій, які переводять одну матрицю в іншу.

Кожну матрицю шляхом елементарних перетворень можна звести до східчатої форми (можливо, але не єдиним способом).

Приклад 1.2.65. Звести до східчатої форми матрицю:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм наступний. Працюємо зверху вниз, зліва направо. Спочатку помічаємо, що елемент першого рядка та першого стовпця матриці дорівнює 1, що є зручним для того, щоб у першому стовпці за допомогою елементарного перетворення “заміщення” (третє елементарне перетворення) утворити нулі в інших позиціях. Отже, першим кроком обираємо “опорний елемент” — той, який стане ведучим у східчатій формі матриці та утворюємо нулі під цим опорним елементом.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Віднімемо від другого та третього рядків подвоєний перший рядок, а також додамо до четвертого рядка перший рядок. У результаті цих дій отримуємо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Тепер помічаємо, що, по-перше, усі елементи другого рядка діляться на 8, і, по-друге, в цьому рядку на другій позиції розташований 0, тоді як у третьому та четвертому рядках — відмінні від нуля елементи. Тому далі виконаємо ділення елементів другого рядка на 8 і поміняємо його місцем з третім рядком, ведучим елементом якого є -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Тепер обираємо опорний елемент (-1 у другому рядку) і утворюємо нулі на всіх позиціях під ним. Додамо до четвертого рядка потроєний другий рядок:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}.$$

Переходимо до третього рядка. Опорний елемент дорівнює 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}.$$

Віднімемо від четвертого рядка третій рядок, помножений на 29, і остаточно отримуємо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

Бачимо, що одержана матриця має східчату форму та вона рядково еквівалентна початковій матриці.

Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь (метод послідовного виключення невідомих) полягає в наступному:

1) виписати розширену матрицю системи лінійних рівнянь;
2) за допомогою елементарних перетворень рядків матриці звести її до східчатої форми;
3) повернутись від одержаної матриць до системи та розв'язати її.

Зауважимо, що звести матрицю до східчатої форми можна різними способами. Відзначимо деякі поради того, як цього можна досягнути.

- Обрати крайній зліва стовпець, не всі елементи якого дорівнюють нулю. Створити ведучий елемент першого рядка (він повинен бути ненульовим, але бажано, якщо ведучий елемент дорівнює 1), використовуючи елементарне перетворення "перестановка рядків".

- Використовуючи цей ведучий елемент, створити в стовпці під ним нуль. Цього завжди можна досягти, додаючи до кожного рядка перший рядок, помножений на відповідний коефіцієнт.
- Повторити описані вище дії для підматриці, яка отримується з даної матриці після "викреслення" першого рядка та першого (ненульового) стовпця.

Приклад 1.2.66. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \quad\;\; 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ \;x_1 - x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язок. Розширена матриця цієї системи має вигляд

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right].$$

Зведемо її до східчатої форми. Перший ненульовий стовпець — крайній зліва. Переставивши місцями перший і третій рядки матриць, ми досягнемо того, що ведучий елемент першого рядка буде дорівнювати 1, що є зручним для подальших обчислень:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right].$$

Далі утворюємо нулі під ведучим елементом. Для цього до другого рядка додаємо перший, помножений на -2. У результаті цього отримуємо:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right].$$

Тепер "забуваємо" про перший рядок і повторюємо описані дії для одержаної підматриці. Елементи другого рядка помножимо на $\frac{1}{5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right].$$

Утворимо нуль на другій позиції третього рядка (додаємо до третього рядка другий, помножений на -2):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Отримали матрицю у східчатій формі. Тепер повертаємось до системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -5, \\ \qquad\; x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad\qquad\;\; x_3 = 2, \end{cases}$$

і розв'язуємо її "знизу вгору":

$$\begin{aligned}&x_3 = 2,\\&x_2 = 3 - x_3 = 3 - 2 = 1,\\&x_1 = -5 + x_2 + 2x_3 = -5 + 1 + 2 \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Відповідь. $\{(0, 1, 2)\}$.

Приклад 1.2.67. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язок. Розширена матриця цієї системи має вигляд

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Зведемо її до східчатої форми. Для цього додамо до другого рядка перший рядок, помножений на -2, а також додамо до третього рядка перший рядок. У результаті цього отримуємо таку матрицю:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

Тепер додамо до третього рядка другий рядок, помножений на 2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Система, що відповідає останній матриці, має вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Ця система лінійних рівнянь має безліч розв'язків. Існує декілька способів введення параметрів для опису загального розв'язку цієї системи. Ми будемо використовувати такий: вираження змінних, які відповідають ведучим елементам рядків східчатої форми матриць (ці змінні називаються *основними*) через інші змінні (вони називаються *вільними*). У нашому прикладі основними є змінні x_1 і x_3, а вільними — x_2 і x_4.

Маємо:

$$\begin{aligned}&x_3 = x_4 + 1,\\&x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 + 1 = x_2 - x_4 + 2.\end{aligned}$$

Для запису відповіді введемо параметри $a = x_2$, $b = x_4$.

Відповідь. $\{(a - b + 2, a, b + 1, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$.

Зауважимо також, якщо останній ненульовий рядок східчатої форми матриці містить лише один відмінний від нуля елемент (останній), то система лінійних рівнянь є несумісною, а в іншому випадку — сумісною. Якщо кількість рядків у східчатій формі матриць збігається з кількістю невідомих сумісної системи, то вона має єдиний розв'язок; якщо ж їх менше — то безліч.

Зведена східчата форма матриць та розв'язування систем лінійних рівнянь методом Йордана–Гаусса.

Означення 1.2.68. Будемо говорити, що матриця має *зведену східчату форму*, якщо виконується такі умови:

1) вона має східчату форму;
2) ведучі елементи кожного ненульового рядка дорівнюють 1;
3) кожний стовпець, який містить ведучу одиницю якогось рядка, містить в усіх інших позиціях нулі.

Приклад 1.2.69. Наступні матриці мають східчату форму:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & \star & 0 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Тут $\star$ — довільні числа, $\boxed{1}$ — ведучий елемент відповідного рядка.

Виявляється, що кожна матриця рядково еквівалентна лише одній матриці у зведений східчатій формі.

Метод Йордана–Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь полягає в наступному.

1) Записуємо розширену матрицю системи лінійних рівнянь.
2) Зводимо матрицю до східчатої форми та встановлюємо, чи сумісна система. Якщо сумісна, то переходимо до наступного пункту.
3) Утворюючи нуль у стовпцях з ведучими елементами рядків матриць, приводимо її до зведеної східчатої форми.
4) Повертаємось від матриць до системи лінійних рівнянь. Ті змінні, які відповідають ведучим одиницям, назвемо *основними*, а всі інші (якщо вони є) — *вільними*. Виражаємо основні змінні через вільні та записуємо відповідь.

Приклад 1.2.70. Розв'яжемо систему з прикладу 1.2.67 методом Йордана–Гаусса. Як було показано вище, східчатою формою матриць цієї системи є така матриця

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{1.7}$$

Відзначимо, що ця система сумісна, оскільки ми не отримали рядка вигляду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Приведемо матрицю (1.7) до зведеної східчатої форми. Для цього необхідно утворити нулі в першій та третій позиціях третього стовпця. Цього можна досягти, додавши до першого рядка другий:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отримали матрицю у зведеній східчатій формі. Система лінійних рівнянь, яка їй відповідає має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 \;\; - x_4 = 1. \end{cases}$$

Змінні x_1 і x_3 є основними, а x_2 і x_4 — вільними. Виражаємо основні змінні через вільні:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - x_4 + 2, \\ x_3 &= x_4 + 1, \end{aligned}$$

і записуємо остаточну відповідь: $\{(a - b + 2, a, b + 1, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$.

1.2.7 Векторні простори

Векторні простори більш детально розглядаються в подальших підрозділах цього розділу. У цьому підрозділі ми лише їх означаємо та перераховуємо ті основні властивості, які будуть нам потрібні в подальших викладеннях.

Означення 1.2.71. *Векторним простором над полем* k (або *лінійним простором над полем* k) називається трійка $(\boldsymbol{V}, +, \cdot)$, яка складається з множини $\boldsymbol{V}$ об'єктів, які називаються *векторами*, разом з двома операціями $+$ і $\cdot$, які називаються *додаванням векторів* і *множенням на скаляр*, відповідно, такими, що $(\boldsymbol{V}, +)$ є абелевою (комутативною) групою, тобто $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ для всіх $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, і виконуються умови:

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ для будь-яких $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ (асоціативність операції додавання векторів);
(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ для будь-яких $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ (комутативність операції додавання векторів);
(3) існує нуль-вектор $\mathbf{0}$: $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ для довільного вектора $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ (існування нейтрального елемента стосовно операції додавання векторів);
(4) для довільного вектора $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ існує обернений до нього вектор $-\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ (існування оберненого елемента стосовно операції додавання векторів);

і $a \cdot \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ для всіх $a \in \mathsf{k}$ і $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, і крім того, виконуються такі тотожності для всіх $a, b \in \mathsf{k}$ і $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$:

(5) $a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$ (дистрибутивність операції додавання векторів);
(6) $(a + b) \cdot \boldsymbol{u} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{u}$ (дистрибутивність операції множення на скаляр);
(7) $(ab) \cdot \boldsymbol{u} = a \cdot (b \cdot \boldsymbol{u})$ (асоціативність операції множення на скаляр);
(8) $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (існування одиниці).

Зазвичай для спрощення запису символ $\cdot$ опускається, і пишуть $a\boldsymbol{u}$ замість $a \cdot \boldsymbol{u}$. Крім того, якщо поле та операції зрозумілі з контексту, то векторний простір $(\boldsymbol{V}, +, \cdot)$ буде позначатися просто як векторний простір $\boldsymbol{V}$. Легко довести, що

$$-\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u}.$$

Справді,

$$\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = 1 \cdot \boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = (1 - 1)\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} = \mathbf{0},$$

і оскільки $(\boldsymbol{V}, +)$ — абелева група, то з останньої рівності випливає, що $(-1)\boldsymbol{u}$ — обернений елемент до $\boldsymbol{u}$. З єдиності оберненого елемента в групі випливає, що $-\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u}$. З доведеної рівності випливає, що корисно визначити оператор віднімання для векторів наступним чином:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$

n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ є найбільш відомим прикладом векторного простору, оскільки він є більше чим множина точок, яка допускає добре відому структуру векторного простору над $\mathbb{R}$. А саме, нехай $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, і означимо

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n),$$

$$c\boldsymbol{u} = (cu_1, \ldots, cu_n).$$

Можна вважати елементи множини $\mathbb{R}^n$ або "точками", або "векторами", залежно від контексту. Більш загально, легко бачити, якщо k — поле, то k^n — векторний простір над k.

Простір функцій — ще один важливий клас векторних просторів. Нехай k — поле й $\boldsymbol{A}$ — підмножина в k^n. Тоді множина функцій з $\boldsymbol{A}$ в k — векторний простір над k з операціями поточкового додавання та множення на скаляр. Точніше, якщо $f, g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{k}$ і $c \in \boldsymbol{k}$, то визначимо функції

$$f + g, cf\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{k}$$

за формулами

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{і} \qquad (cf)(x) = c(f(x)).$$

Означення 1.2.72. *Підпростором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ над полем k називається підмножина в $\boldsymbol{V}$, яка стосовно операцій індукованих з $\boldsymbol{V}$ є векторним простором над полем k.

Для прикладу, стосовно природних включень, векторі простори $\mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$, є всі підпросторами в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.2.73. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Для фіксованої непорожньої множини векторів $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ в $\boldsymbol{V}$, визначимо *лінійну оболонку множини*, яку позначатимемо $\operatorname{span}(\boldsymbol{S})$, або лінійну оболонку векторів в $\boldsymbol{S}$, $\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, як множину всіх векторів, що є лінійними комбінаціями цих векторів, тобто

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{S}) = \operatorname{span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = \{c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathsf{k}\}.$$

Будемо говорити, що *множина $\boldsymbol{S}$ породжує підпростір $\boldsymbol{X}$* і *вектори $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ породжують підпростір $\boldsymbol{X}$*, якщо

$$\boldsymbol{X} = \operatorname{span}(\boldsymbol{S}) = \operatorname{span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

Зручно визначити $\operatorname{span}(\varnothing) = \{\boldsymbol{0}\}$.

Легко перевіряється, що $\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ є векторним підпростором в $\boldsymbol{V}$ для довільної підмножини векторів $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ в $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.2.74. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. **Непорожня** множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ в $\boldsymbol{V}$ називається *лінійно залежною*, якщо

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

для деяких елементів $c_1, \ldots, c_n$ поля k, з яких не всі дорівнюють нулеві. Множина $\boldsymbol{S}$ і вектори $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ називаються *лінійно незалежними*, якщо вони не є лінійно залежними. Зручно визначати порожню множину як лінійно незалежну множину векторів.

Іншими словами, вектори є лінійно незалежними, якщо жодна нетривіальна лінійна комбінація їх не дорівнює нуль-вектору. Два лінійно залежні вектори називаються *колінеарними*. Два ненульові вектори $\boldsymbol{u}_1$ і $\boldsymbol{u}_2$ є колінеарними тоді і тільки тоді, коли один з них є кратним іншому, тобто $\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_1) = \operatorname{span}(\boldsymbol{u}_2)$.

Означення 1.2.75. Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$. Множина векторів $\boldsymbol{S}$ називається *базою* (*базисом*) простору $\boldsymbol{X}$, якщо $\boldsymbol{S}$ — лінійно незалежна система векторів і $\boldsymbol{X} = \operatorname{span}(\boldsymbol{S})$.

Зауваження 1.2.76. Означення лінійно незалежних множин векторів, лінійно залежних множин векторів, лінійних оболонок і баз, які наведені вище стосувалися лише скінченних множин векторів, щоб зробити означення чіткішими і застосовувати до більшості наших векторних просторів. У деяких випадках нам, можливо, доведеться мати справу з "нескінченно вимірними" векторними просторами, і тому необхідно вказати, які зміни повинні бути внесені для їх урахування. Все, що потрібно зробити — це бути трохи більш уважним щодо того, що представляє собою лінійна комбінація векторів. Розглянемо довільну, можливо нескінченну, множину векторів $\{\boldsymbol{v}_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{I}}$ у векторному просторі, визначимо лінійну комбінацію цих векторів як суму

$$\sum_{\alpha\in\mathscr{I}} c_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha,$$

де всі, крім можливо скінченної кількості коефіцієнтів c_α дорівнюють нулю. З цією концепцією лінійної комбінації векторів означення викладене вище та наступна теорема застосовуватимуться до ***всіх*** векторних просторів.

Добре відома наступна теорема з лінійної алгебри:

Теорема 1.2.77. *Будь-який векторний підпростір векторного простору має базу та кількість векторів бази однозначно визначається підпростором. Кожну множину лінійно незалежних векторів у векторному просторі можна доповнити до бази цього простору.*

Теорема 1.2.77 обґрунтовує таке означення:

Означення 1.2.78. *Виміром* векторного простору $\boldsymbol{V}$ називається кількість векторів бази цього простору та позначається через $\dim \boldsymbol{V}$. Будемо говорити, що m-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору має *ковимір* $n - m$.

Зауваження 1.2.79. За нашими означеннями, викладеними вище, маємо, що векторний простір, який складається лише з нульового вектора, має вимірність 0, а порожня множина є його базою.

Означення 1.2.80. Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ називається *лінійним оператором* (*лінійним відображенням*), якщо T задовольняє умову

$$T(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = aT(\boldsymbol{v}) + bT(\boldsymbol{w}),$$

для всіх $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathsf{k}$.

Доведення наступної теореми є очевидним.

Теорема 1.2.81. *Обернене відображення до лінійного відображення, якщо воно існує, є лінійним відображенням, а також композиція лінійних відображень є лінійним відображенням.*

Означення 1.2.82. Лінійне відображення векторних просторів називається *несингулярним*, якщо для нього існує обернене, в протилежному випадку лінійне відображення називається *сингулярним*. Несингулярне лінійне відображення векторних просторів називається *ізоморфізмом*.

Означення 1.2.83. Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення, то означимо *ядро* лінійного відображення T, яке надалі позначатимемо через $\ker(T)$, та *образ* лінійного відображення T, надалі позначатимемо через $\operatorname{im}(T)$, наступним чином

$$\ker(T) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \mid T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\} \subseteq \boldsymbol{V}$$

і

$$\operatorname{im}(T) = \{T(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\} \subseteq \boldsymbol{W}.$$

Виконується така теорема, доведення якої очевидне.

Теорема 1.2.84. *Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,*

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

1.2.8 Матриці. Дії над матрицями

До цього моменту ми використовували матриці для спрощеного запису систем лінійних рівнянь. У цьому підрозділі матриці розглядатимуться як математичні об'єкти, а множина всіх матриць буде наділена структурою шляхом введення на ній операцій додавання матриць, множення матриці на число та множення матриць. Доцільність таких означень буде зрозумілою з подальших підрозділів, де ми побачимо як матриці будуть виконувати роль зручного представлення одного типу відображень. Виявиться, що вони слугують не просто інструментом для зручного запису та подання інформації, а насправді представляють певний тип функцій, що відображають одні вектори в інші. Теорія матриць має численні застосування.

Поняття матриці. Типи матриць

Означення 1.2.85. *Матрицею* над полем k називається прямокутна таблиця елементів цього поля

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathsf{k},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Матриці зазвичай позначають великими латинськими літерами. Іноді для того, щоб підкреслити, що матриця A складається з m рядків і n стовпчиків, ми позначатимемо її так: $A_{m\times n}$ або $[a_{ij}]_{m\times n}$. Матрицю з елементами a_{ij} позначають $[a_{ij}]$, а через (a_{ij}) — елемент i-го рядка і j-го стовпця матриці A:

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longleftarrow \boxed{\text{і-й рядок}}$$

$$\uparrow \; \boxed{\text{j-й стопчик}}$$

Дві матриці називаються *рівними*, якщо їх розміри однакові та відповідні елементи однакові.

Якщо окремо не зауважено, то надалі ми розглядатимемо матриць над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Стовпці матриці A є m-вимірними векторами, позначимо їх $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тоді

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Якщо $m = n$ (кількість рядків збігається з кількістю стовпців), то така матриця називається *квадратною матрицею порядку* n. Набір елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ утворює *головну діагональ*, а набір елементів $a_{n1}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{1n}$ — *другу діагональ* матриці.

Квадратна матриця, усі елементи якої нижче (вище) від головної діагональ дорівнюють нулю, називають *верхньою* (*нижньою*) *трикутною* матрицею:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Квадратна матриця, усі елементи якої, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають *діагональною матрицею*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Діагональну матриця з елементами $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ на головній діагоналі записують так:

$$\operatorname{diag}\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}.$$

Лінійні операції над матрицями

Означення 1.2.86. *Сумою* двох $m \times n$-матриць $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ та $B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$ називається $m \times n$-матриця $A+B$, стовпці якої є сумами відповідних стовпців матриць A та B:

$$A + B = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 + \vec{b}_1 & \vec{a}_2 + \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_n + \vec{b}_n. \end{bmatrix}$$

Означення 1.2.87. *Добутком* $m \times n$-матриці $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ називається $m \times n$-матриця

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda\vec{a}_1 & \lambda\vec{a}_2 & \cdots & \lambda\vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.88. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+0 \\ 4+(-1) & 1+3 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 16 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad -B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Суми $A+C$ і $B+C$ невизначені, оскільки матриць A і C, B і C мають різні розміри.

Різницею двох матриць A і B однакових розмірів називається матриця

$$A - B = A + (-1)B.$$

Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю (нульовому елементу поля k), називається *нульовою* і позначається 0 (або $0_{m\times n}$ щоб підкреслити її розміри).

Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

називаються *діагональними елементами* матриці A.

Теорема 1.2.89 (властивості лінійних операцій над матрицями). *Нехай A, B, C — матриці однакових розмірів над полем k, $\alpha, \beta \in \mathsf{k}$. Тоді:*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(асоціативність додавання матриць);*
2) $A + B = B + A$ *(комутативність додавання матриць);*
3) $A + 0 = A$ *(властивість нульової матриці);*
4) $A + (-A) = 0$ *(властивість протилежної матриць);*
5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(дистрибутивність множення матриці на число стосовно операції додавання матриць);*
6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$ *(дистрибутивність множення матриць на число стосовно операції додавання чисел);*
7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ *(асоціативність множення матриць на число);*
8) $1 \cdot A = A$.

Твердження теореми 1.2.89 випливають з того факту, що усі матриці мають однакові розміри, та перевірка кожної з восьми умов зводиться до перевірки виконання операцій додавання та множення на елемент поля k на множині k, а оскільки $(\mathsf{k}, +, \cdot)$ є полем, то усі умови виконуються за означенням поля.

Позначимо через $M_{m\times n}(\mathsf{k})$ множину всіх $m \times n$-матриць, елементи яких належать полю k. З теореми 1.2.89 і означення лінійного простору випливає, що $M_{m\times n}(\mathsf{k})$ є лінійним простором над полем k стосовно операцій додавання матриць і множення матриць на скаляр з поля k.

Означення 1.2.90. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Тоді *добутком матриці A на вектор $\vec{x}$* називається вектор

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Так означене множення матриці розмірності $m \times n$ на n-вимірний вектор-стовпець (матрицю розмірності $m \times 1$) фактично задає певне відображення простору $\mathbb{R}^n$ у простір $\mathbb{R}^m$.

Означення 1.2.91. *Добутком* матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times p}$ називається матриця

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \end{bmatrix}$$

Результатом множення є матриця розмірності $m \times p$.

Приклад 1.2.92. Обчислити $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Оскільки матриця A розмірності 2×2, а матриця B розмірності 2×3, то множення матриць $A \cdot B$ визначене. Позначимо через $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ стовпці матриць B. Тоді формуємо з векторів $A\vec{b}_1$, $A\vec{b}_2$, $A\vec{b}_3$ матрицю $A \cdot B$:

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}, \qquad A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}.$$

Множення $B \cdot A$ невизначене, оскільки розміри матриць B і A не узгоджуються з означенням множенням матриць (означення 1.2.91).

Зауваження 1.2.93. Добуток двох матриць не завжди існує, а саме: добуток матриць розмірності $m \times n$ на матрицю розмірності $k \times p$ існує тоді і тільки тоді, коли $n = k$. Разом з цим добуток двох квадратних матриць одного й того ж порядку завжди існує.

Для обчислення добутку матриць використовується також зручне правило множення "рядок на стовпець". Воно базується на понятті добутку рядка однієї матриці на стовпець іншої.

Нехай маємо дві матриць $A_{m\times n}$ та $B_{n\times p}$. Під добутком i-го рядка матриці A на j-й стовпчик матриці B розуміють число

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Тоді *добутком матриці* $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times p}$ є матриця C розмірності $m \times p$, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює добутку i-го рядка матриці A на j-й стовпчик матриці B.

Наприклад,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot 1 & 2\cdot 3 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 6 + 3\cdot 3 \\ 1\cdot 4 + (-5)\cdot 1 & 1\cdot 3 + (-5)\cdot(-2) & 1\cdot 6 + (-5)\cdot 3 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}.$$

Лема 1.2.94. *Нехай дано матриці* $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ *і вектор* $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$. *Тоді*

$$A \cdot (B\vec{x}) = (AB)\vec{x}.$$

Доведення. Нехай $B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$ і $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} A \cdot (B\vec{x}) &= A \cdot (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_p\vec{b}_p) = \\ &= A(x_1\vec{b}_1) + A(x_2\vec{b}_2) + \cdots + A(x_p\vec{b}_p) = \\ &= x_1(A\vec{b}_1) + x_2(A\vec{b}_2) + \cdots + x_p(A\vec{b}_p) = \\ &= (A\vec{b}_1)x_1 + (A\vec{b}_2)x_2 + \cdots + (A\vec{b}_p)x_p = \\ &= \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \\ &= (AB)\vec{x}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. □

Теорема 1.2.95. *Нехай* A, B, C *— матриці таких розмірів, для яких визначені операції, що наведені нижче;* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тоді:*

(1) $(AB)C = A(BC)$ *(асоціативність множення матриць);*
(2) $A(B + C) = AB + AC$ *(ліва дистрибутивність множення матриці стосовно операції додавання матриць);*
(3) $(A+B)C = AC+BC$ *(права дистрибутивність множення матриці стосовно операції додавання матриць);*
(4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Доведення. (1) Нехай маємо три матриці $A = A_{m\times n}$, $B = B_{n\times p}$ та $C = C_{p\times q} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_q \end{bmatrix}$. Тоді за означенням добутку двох матриць (означення 1.2.91) маємо, що

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix}.$$

Враховуючи лему 1.2.94, отримуємо:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A\begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A(B\vec{c}_1) & A(B\vec{c}_2) & \cdots & A(B\vec{c}_q) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (AB)\vec{c}_1 & (AB)\vec{c}_2 & \cdots & (AB)\vec{c}_q \end{bmatrix} = \\ &= (AB)C. \end{aligned}$$

(2) Нехай маємо три матриці $A = A_{m\times n}$, $B = B_{n\times p} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix}$ і $C = C_{n\times p} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_p \end{bmatrix}$. Тоді використовуючи означення 1.2.91 множення матриць і властивості множення матриці на вектор, знаходимо:

$$A(B + C) = A\begin{bmatrix} \vec{b}_1 + \vec{c}_1 & \vec{b}_2 + \vec{c}_2 & \cdots & \vec{b}_p + \vec{c}_p \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \quad A(\vec{b}_2 + \vec{c}_2) \quad \cdots \quad A(\vec{b}_p + \vec{c}_p)\right] = \\
&= \left[A\vec{b}_1 + A\vec{c}_1 \quad A\vec{b}_2 + A\vec{c}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p + A\vec{c}_p\right] = \\
&= \left[A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p\right] + \left[A\vec{c}_1 \quad A\vec{c}_2 \quad \cdots \quad A\vec{c}_p\right] = \\
&= AB + AC.
\end{aligned}
$$

(3) Нехай матриці $A, B \in M_{m\times n}$ і матриця $C \in M_{n\times p}$. Легко перевірити, що матриці $(A+B)C$ і $AC+BC$ мають однакові розміри $n \times p$. Доведемо тепер, що відповідні елементи цих матриць однакові. Елемент i-го рядка та j-го стовпчика матриці $(A+B)C$ дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj},$$

а елемент i-го рядка та j-го стовпчика матриці $AC + BC$ дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj},$$

тобто вони однакові, що і треба було довести.

(4) Нехай дано матриці $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ і $B_{n\times p} = [b_{ij}]$ і число $\alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, що матриці $\alpha(AB)$, $(\alpha A)B$ і $A(\alpha B)$ є однакових розмірів. Розглянемо елементи i-го рядка та j-го стовпчика цих матриць:

$$
\begin{aligned}
(\alpha(AB))_{ij} &= \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}; \\
((\alpha A)B)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{ik})b_{kj}; \\
(A(\alpha B))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\alpha b_{kj}).
\end{aligned}
$$

Очевидно, вони однакові, а, отже, усі вказані матриці рівні. □

Зауваження 1.2.96. Про матриці варто запам'ятати таке:

- взагалі кажучи, $AB \neq BA$;
- матричне множення не допускає скорочень: якщо $AC = BC$ (або $CA = CB$), то це не означає, що $A = B$;
- якщо добуток матриць AB є нульовою матрицею, то не можна стверджувати, що $A = 0$ або $B = 0$.

Матрицю A можна помножити саму на себе лише тоді, коли ця матриця квадратна. Натуральний степінь k матриці A розуміють як

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ множників}}.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриць A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Означення 1.2.97. Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.98. *Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.*

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. □

Приклад 1.2.99. Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c = 1; \\ 2(a+c) = 0; \\ b+d = 0; \\ 2(b+d) = 1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Теорема 1.2.100 (обернена матриця до матриці другого порядку). *Якщо* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *і* $ad - bc \neq 0$, *то матриця* A *є оборотною, причому*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, *то до матриці* A *не існує оберненої.*

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.107) буде доведено в більш загальному вигляді. □

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.101 (властивості оборотних матриць).

1. *Якщо* A — *оборотна матриця, то матриця* A^{-1} *також оборотна, причому* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *Якщо* A — *оборотна матриця,* $c \neq 0$, *то матриця* cA *також оборотна, причому* $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$.
3. *Якщо квадратні матриці однакового порядку* A *та* B *є оборотними, то матриця* AB *також оборотна, причому*

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

2. Маємо:

$$cA \cdot \tfrac{1}{c} A^{-1} = c \cdot \tfrac{1}{c} A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\tfrac{1}{c} A^{-1} \cdot cA = \tfrac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. □

Означення 1.2.102. *Рангом матриці* називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

Приклад 1.2.103. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\mathrm{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\mathrm{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Лема 1.2.104. *Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.*

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$\begin{aligned} a_{p+1,1} &= c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p+1,n} &= c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn}, \\ a_{p+2,1} &= c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p+2,n} &= c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1} &= c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,n} &= c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}. \end{aligned}$$

Розглянемо вектори

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}), \\ \vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{u}_p &= (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}). \end{aligned}$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. □

Теорема 1.2.105. *Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.*

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$.

За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. □

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.106. *Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.107. *Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.*

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$\begin{gathered} A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n. \end{gathered}$$

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$\begin{gathered} A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n. \end{gathered}$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.116) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$\begin{gathered} ABC = A(BC) = AI = A \\ ABC = (AB)C = IC = C, \end{gathered}$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A. □

Теорема 1.2.108 (основна теорема оборотних матриць). *Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *матриця A — оборотна;*
2) *ранг матриці A дорівнює n;*
3) *стовпці матриці A лінійно незалежні;*
4) *система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;*
5) *однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;*
6) *зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.*

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою* (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.101);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Означення 1.2.109. Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Приклад 1.2.110. Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на 2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.111. *Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n з допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.*

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.108) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.111 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриць, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Приклад 1.2.112. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Приклад 1.2.113. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \qquad\; x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \qquad\;\; + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Тоді
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{9}{2} & 7 & -\dfrac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \dfrac{3}{2} & -2 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

1.2.9 Ще про системи лінійних рівнянь

Множення матриці на вектор і матрично-векторна форма запису системи лінійних рівнянь

Означення 1.2.114. Якщо A є $m\times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ і $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, то *добутком матриці A на вектор $\vec{x}$* (позначається $A\cdot\vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x}=\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\dots+x_n\vec{a}_n.$$

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{1.8}$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix},\qquad \vec{a}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix},\qquad \dots,\qquad \vec{a}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1.8) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\dots+x_n\vec{a}_n=\vec{b}.\tag{1.9}$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1.8).

Якщо ж головну матрицю системи (1.8) позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},$$

то систему (1.8) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x}=\vec{b}.\tag{1.10}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній форм, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x}=\vec{0}.$$

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.115. *Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:*

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.116 (теорема Кронекера–Капеллі). *Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.*

Доведення. Необхідність. Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ є еквівалентними, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. □

Підпростори, пов'язані з матрицями

Означення 1.2.117. Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.118. *Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.*

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два роз'вязки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.115 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. □

Означення 1.2.119. Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Зв'язок між розв'язками неоднорідної та однорідної систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{1.11}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{1.12}$$

Теорема 1.2.120. *Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (1.11), Z — множина всіх розв'язків системи (1.12), то*

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (1.11).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (1.12). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (1.11). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (1.11) є розв'язком системи (1.12):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (1.11) можна вказати такий розв'язок системи (1.12), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (1.11). □

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (1.11):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (1.11) додати по черзі усі розв'язки системи (1.12), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (1.11).

Означення 1.2.121. Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

Загальний розв'язок і фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.122. *Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи*

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \dots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \dots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \dots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \dots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ системи:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \dots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n, \\ \alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \dots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\alpha_r = \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \dots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$\begin{aligned} &1, 0, 0, \dots, 0;\\ &0, 1, 0, \dots, 0;\\ &\dots\\ &0, 0, 0, \dots, 1. \end{aligned}$$

Отримаємо $n - r$ розв'язків системи:

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \dots, 0),\\ \vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \dots, 0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \dots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \dots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. □

Наслідок 1.2.123. *Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.*

1.2.10 Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Детермінанти (визначники) n-го порядку

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.124. Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.125. *Мінором* елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.126. *Алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення 1.2.124.

Означення 1.2.127. *Детермінантом* матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Формули для обчислення визначників матриць другого та третього порядків

Розглянемо визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \\ = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схематично обчислення визначника другого порядку можна зобразити в такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Обчислимо детермінант матриці третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично запам'ятати формулу для обчислення детермінанту третього порядку допомагає наступна схема:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Означення 1.2.127 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їх алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.128 (теорема Лапласа про розклад визначника). *Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їх алгебраїчні доповнення:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Приклад 1.2.129. Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:

$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96$**.**

Теорема 1.2.130. *Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.*

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\dots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\dots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\dots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

□

Доведення теореми Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.131. *Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді*

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}. \tag{1.13}$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1.13) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1.13) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1.13), що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1}M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1}a_{i1} \cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1.13). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1.13) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1}a_{i1} \cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1.13) однакові. □

Лема 1.2.132. *Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді*

$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1)\times(n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).

За лемою 1.2.131 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1}b_{il}M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) = (-1)^{r+1}a_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1}a_{r+1,1}M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ і $r+1$-ий доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r}a_{r,1}M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1}a_{r1}M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною відповідно з $(r+1)$-м та r-м доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.131:

$$\begin{aligned}
\det B = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) + \\
&\quad + (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) - \\
&\quad - (-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) = \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s ($r < s$) можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком із детермінантом матриці A. □

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.132

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$.

Тоді

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i-1} \det B = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.131. □

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.133. *Перестановкою* елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.134. *Інверсією* називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, в іншому випадку — *непарною*.

Теорема 1.2.135. *Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді*

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{1.14}$$

де $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

Нехай $n = 2$. Тоді формула (1.14) набуває вигляду

$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі

$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}},$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),\end{aligned}$$

де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$.

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i - 1 + N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$

що і потрібно було довести. □

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень.

Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.136. *Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то*

$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:

$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

□

Означення 1.2.137. Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Твердження 1.2.138. *При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:*

$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:

$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$

А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. □

Наслідок 1.2.139. *Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.*

Твердження 1.2.140. *Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то*

$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.132.

Твердження 1.2.141. *Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то*

$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.140 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. $\square$

Твердження 1.2.142. *Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то*

$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:

$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$

$\square$

Твердження 1.2.143. *Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то*

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj} + b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

$\square$

Твердження 1.2.144. *Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.*

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A$$

за твердженням 1.2.141. □

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.145. Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.142 і 1.2.141, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 1.2.146. Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.142 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.140):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.144 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.144 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

Детермінанти елементарних матриць. Критерій оборотності матриць

Теорема 1.2.147. *Нехай E — елементарна матриця порядку n.*

1. *Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то* $\det E = -1$.
2. *Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то* $\det E = k$.
3. *Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то* $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.147 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.140, 1.2.142 і 1.2.144, відповідно.

Наслідок 1.2.148. *Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.*

Лема 1.2.149. *Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді*

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то

$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і

$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і

$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. □

Теорема 1.2.150. *Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли*

$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.107 та 1.2.108 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що

$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$

а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.108.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.149, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.148 отримуємо, що $\det(A) = 0$. Отримали протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. □

Означення 1.2.151. Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Детермінанти та операції над матрицями

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.138 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.152. *Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то*

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.152 випливає з твердження 1.2.142.

4. Наступне фундаментальне твердження теорії детермінантів вперше обґрунтував Коші.

Теорема 1.2.153. *Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I &\Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1^{-1} \ldots E_m^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1' \ldots E_m', \end{aligned}$$

де $E_1, \ldots, E_m$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

Тоді

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1' \ldots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \ldots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця.

Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC,\\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. $\square$

5. Зв'язок між детермінантом матриці і оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.154. *Якщо A — оборотна матриця, то*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. $\square$

Правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.155 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь). *Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок*

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

За теоремою 1.2.153:

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми. □

Приклад 1.2.156. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\dfrac{4}{7}$ і $x_2 = \dfrac{13}{7}$.

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1.15) (вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;
(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Приєднана матриця. Формула для обчислення оберненої матриці

Означення 1.2.157. Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається *приєднаною матрицею*.

Лема 1.2.158 (про фальшивий розклад визначника). *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. □

Теорема 1.2.159. *Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

□

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

1.3 Елементи лінійної алгебри

1.3.1 Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у підрозділі 1.2.7. Даний підрозділ дає підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел.

Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1. Елементи $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення читачеві.

Теорема 1.3.2. *Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони пераховані.*

На рис. 1.5(a) точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1$ і $\boldsymbol{p}_2$ є лінійно незалежними точками, але на рис. 1.5(b)

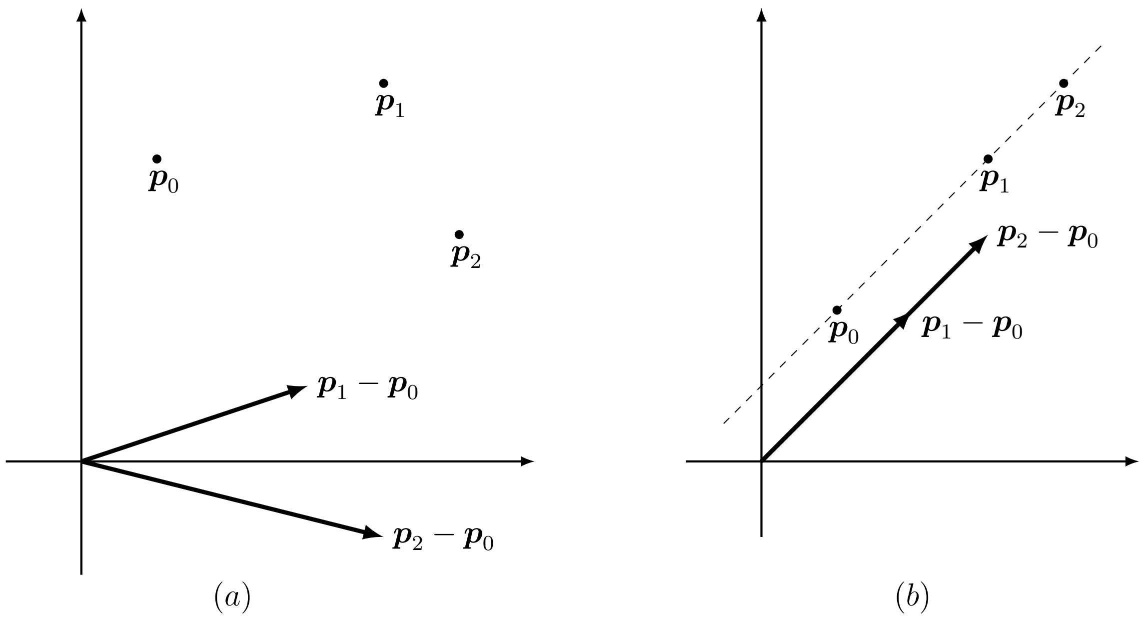


Рис. 1.5: Лінійна незалежність та залежність точок

точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1$ і $\boldsymbol{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. 1.5(a) та 1.5(b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. 1.5(b) називають лінійно залежними.

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — підмножини векторного простору $\boldsymbol{V}$. *Сума* $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ множин $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначається так:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Y} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X} \text{ і } \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y} \right\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4. *Якщо $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — підпростори векторного простору $\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ є підпростором в $\boldsymbol{V}$.*

Означення 1.3.5. Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, і ми це позначатимемо $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{0}}\}.$$

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6. *Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — підпростори векторного простору $\boldsymbol{V}$. Тоді $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ має єдине зображення у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$.*

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2$ для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{V}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2 \in \boldsymbol{Y}$. Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{a}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1) - (\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2) = (\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2) + (\overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2).$$

Припустимо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ або $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2 \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. Тоді, оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 = -(\overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2 \in \boldsymbol{Y}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{y}}_2 \in \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$. А це суперечить тому, що $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{0}}\}$.

Припустимо, що кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ має єдине зображення у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Якщо $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} \neq \{\overrightarrow{\boldsymbol{0}}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$, ми отримуємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{Y}$, тобто $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{0}} \in \boldsymbol{Y}$, і $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}} + \overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{0}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ має єдине зображення у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. □

Означення 1.3.7. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\boldsymbol{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\boldsymbol{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = T(T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ для кожного $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема 1.3.8. *Нехай* $\boldsymbol{V}$ *— векторний простір. Якщо* $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *— оператор проектування на* $\boldsymbol{V}$*, то*

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))$$

і очевидно, що різниця $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Якщо $\boldsymbol{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{X} : \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}$, для $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємнооднозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. $\square$

1.3.2 Скалярні добутки

Означення 1.3.9. Нехай $\boldsymbol{V}_i$, $i = 1, \dots, n$, і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f \colon \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індексу $i = 1, \dots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_i, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n) &= f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n) + \\ &\quad + f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_i, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n), \\ f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n) &= cf(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n), \end{aligned}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j \in \boldsymbol{V}_j$ і $c \in \mathsf{k}$.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індекса $i = 1, \dots, n$ і для всіх елементів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{i-1}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j \in \boldsymbol{V}_j$ відображення з $\boldsymbol{V}_i$ в $\boldsymbol{W}$ визначене за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{i-1}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.10. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathsf{k} \colon (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \mapsto \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \right\rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\boldsymbol{V}$, якщо це відображення задовольняє наступні дві умови для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$:

(1) $\langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \overline{\langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);
(2) $\langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \rangle$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V},$$

і

$$\langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Ми пропонуємо читачеві в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.11. Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12. Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13. *Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.*

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Означимо *довжину* $|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ за формулою

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного продукту, ми зможемо дати прості доведення.

Означення 1.3.15. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{V}$ означимо *вектор з $\boldsymbol{p}$ до $\boldsymbol{q}$*, який будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\boldsymbol{p}$ до $\boldsymbol{q}$*, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Теорема 1.3.16. *Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:*

(1) $\left|\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle\right| \leqslant \left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|$ (***нерівність Коші-Шварца***)[2], *і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ є лінійно залежними;*

(2) $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right| \leqslant \left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|+\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|$ (***нерівність трикутника***), *і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ є лінійно залежними.*

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}} &\leqslant \left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}}-c\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{u}}-c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle = \\ &= \left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right\rangle - 2c\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle + c^2\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle = \\ &= \left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|^2 - 2c\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle + c^2\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|^2.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1.16) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|^2 - 2c\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle + c^2\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$\left(-2\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle\right)^2 - 4\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|^2\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $\left|\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle\right| \leqslant \left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|$.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1.16) перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ або $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, тобто вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|^2}\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle$$

в нерівності (1.16) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|^2 &= \left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle = \\ &= \left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right\rangle + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|^2 \leqslant \\ &\leqslant \left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|^2 = \\ &= \left(\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|\right)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ є лінійно залежними. □

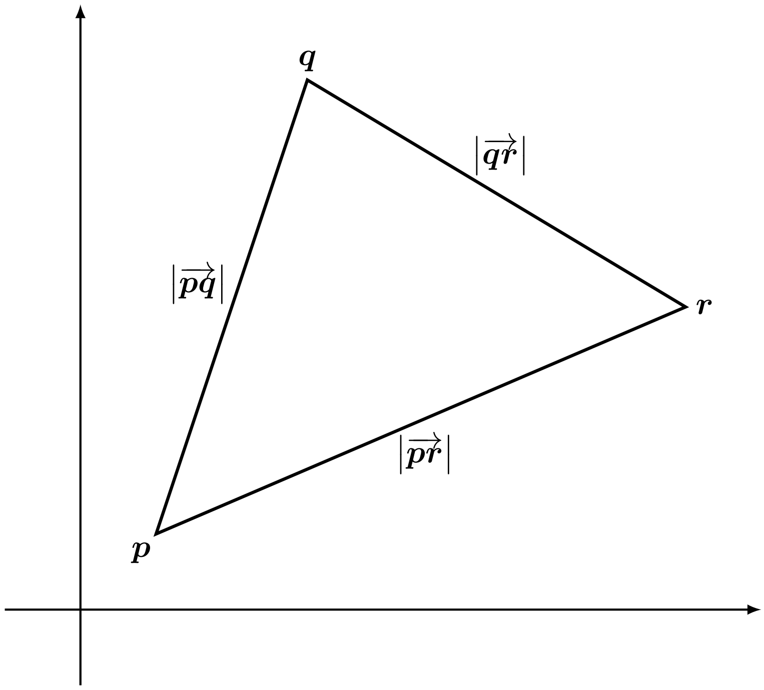


Рис. 1.6: Нерівність трикутника

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис. 1.6) і його сформульовано в наступному наслідку.

Наслідок 1.3.17. *Якщо* $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n$*, то*

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{pr}}| < |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{qr}}|$$

за умови, що точки $\boldsymbol{p}$*,* $\boldsymbol{q}$ *і* $\boldsymbol{r}$ *не є колінеарними.*

[2]У математичні літературі ця нерівність також називається *нерівністю Коші-Буняковського.*

1.4 Прямі

Наша перша мета в цьому розділі – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто 0-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме "прямі" лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.

Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв'язків лінійного рівняння.

Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині). Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1.17}$$

де a, b і c — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що a і b одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. 1.7(a)). Якщо $a = 0$, то пряма

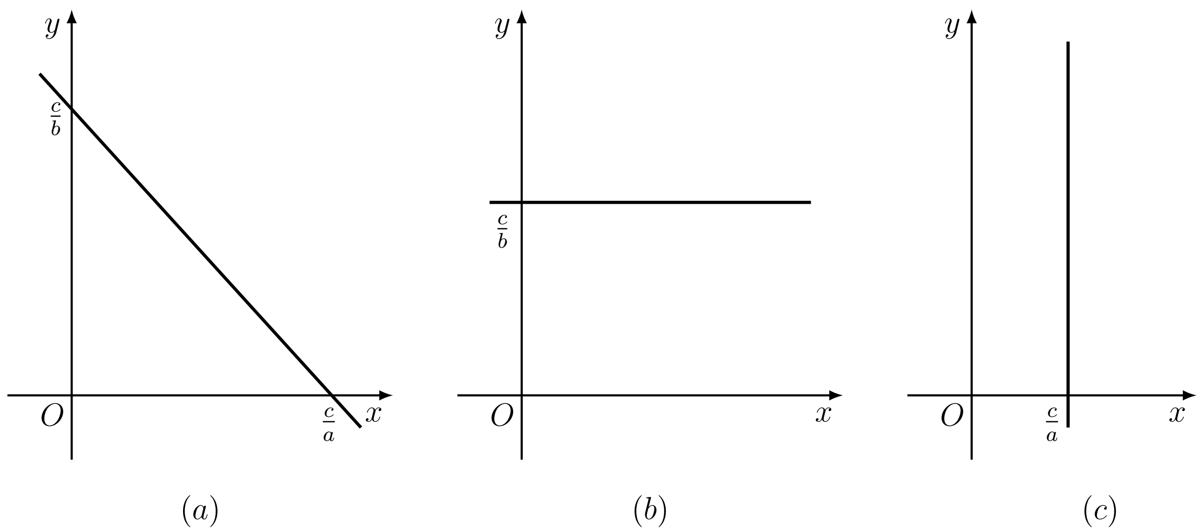


Рис. 1.7: Пряма

називається *горизонтальною* (див. рис. 1.7(b)). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. 1.7(c)). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом* прямої.

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму (див. вправу 1.17.22).

Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок: пряма з кутовим коефіцієнтом m і y-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{1.18}$$

Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт: пряма, що проходить через точку (x_1, y_1) з кутовим коефіцієнтом m визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{1.19}$$

Рівняння прямої через дві точки: пряма, що проходить через дві різня точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) (див. рис. 1.8) визначається рівнянням

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{1.20}$$

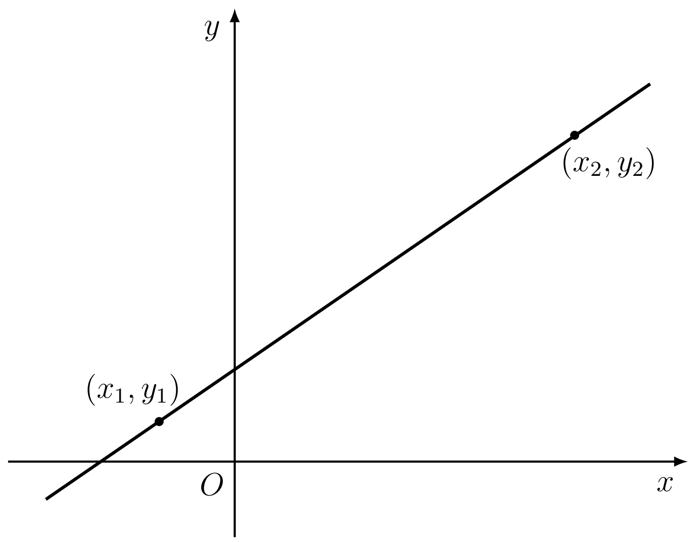


Рис. 1.8: Рівняння прямої через дві точки

Зауважимо, що рівняння (1.18)–(1.20) можна застосувати лише для невертикальних прямих, тобто ці рівняння визначають лише невертикальні прямі.

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї лінія визначається точкою та напрямком.

Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор). Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1.21}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою*, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис. 1.9). Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots & \quad \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

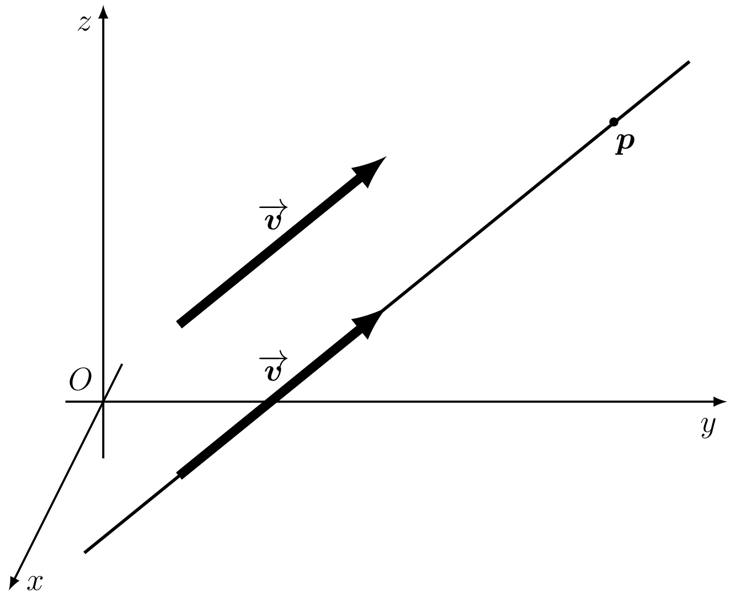


Рис. 1.9: Рівняння прямої через точку та напрямний вектор

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються (див. вправу 1.17.23). Означення, засноване на рівнянні формули (1.17), є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (1.21) є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати t як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу t.

Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

Приклад 1.4.3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2, 3)$ і $\boldsymbol{q} = (-2, 1, -1)$.

Розв'язок. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$, а отже параметричним рівнянням прямої $\boldsymbol{L}$ є

$$\begin{aligned} x &= -2t, \\ y &= 2 - t, \\ z &= 3 - 4t. \end{aligned}$$

Приклад 1.4.4. Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad \boldsymbol{L}_2: \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

Розв'язок. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$
\begin{aligned}
2 + t &= 1 - 2s \\
-1 + t &= -2 + s
\end{aligned}
$$

для змінних s і t. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра t.

Зауваження 1.4.5. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.4, — використовувати одну і ту ж змінну для s і t. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

Означення 1.4.6. Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

Означення 1.4.7. Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\right\} \tag{1.23}$$

називається *відрізком від точки* $\boldsymbol{p}$ *до точки* $\boldsymbol{q}$ (див. рис. 1.10), і надалі буде по-

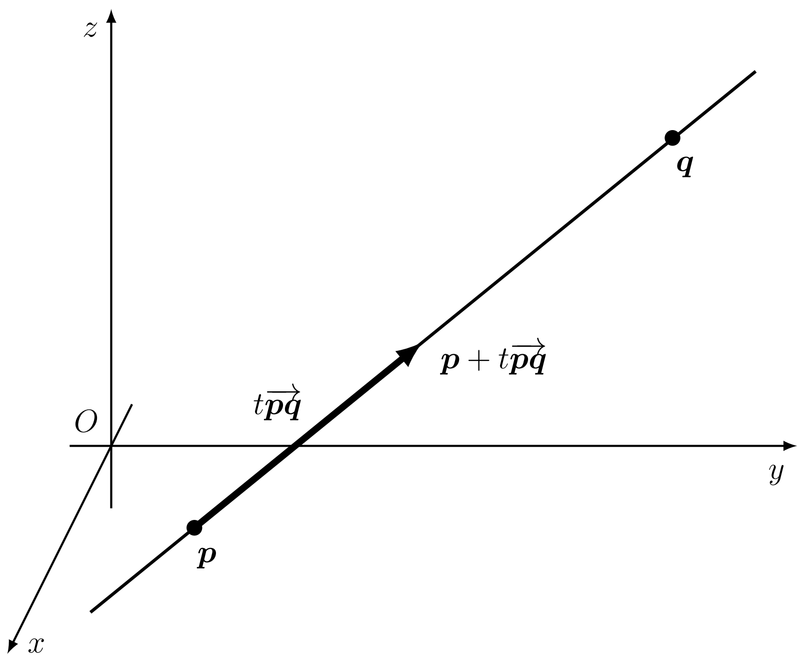


Рис. 1.10: Відрізок від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$

значатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$ (див. вправу 1.17.34). Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$ (вправа 1.17.34). Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

Твердження 1.4.8. *Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді*

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}. \tag{1.24}$$

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ для деякого дійсного числа t такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{px}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{1.25}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (1.25) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. □

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

Твердження 1.4.9. *Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. □

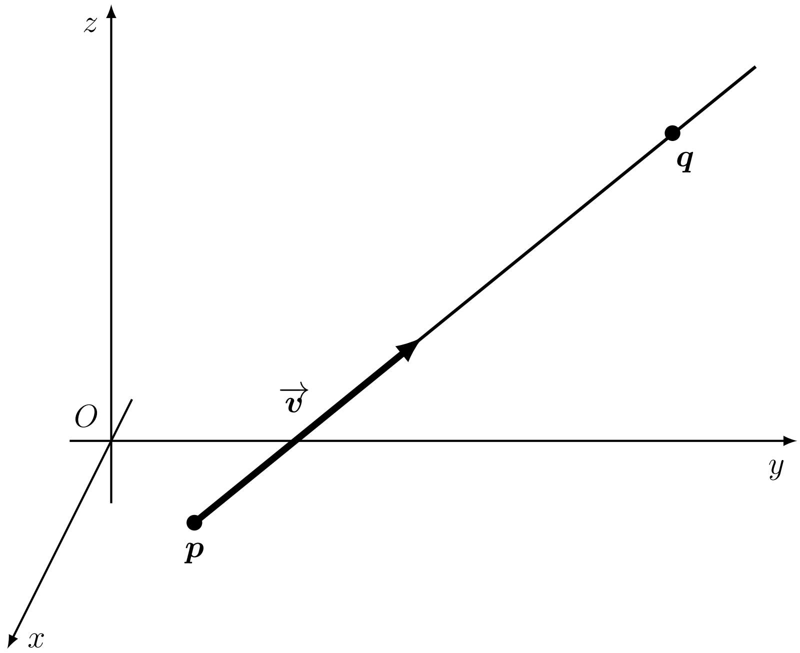


Рис. 1.11: Промінь з точки в напрямку вектора

На завершення означимо поняття променя.

Означення 1.4.10. Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *променем з точки* $\boldsymbol{p}$ *в напрямку* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ (див. рис. 1.11), який позначається $\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки* $\boldsymbol{p}$ *через точку* $\boldsymbol{q}$, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$

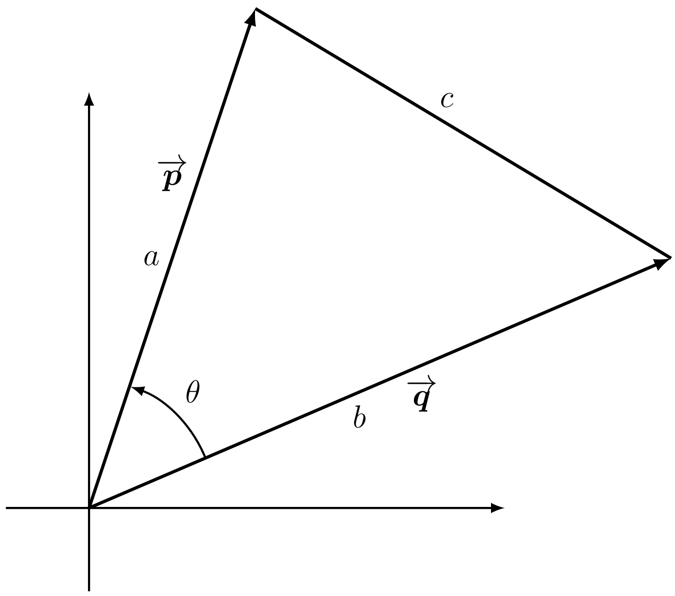
1.5 Кути

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цьому розділі ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цьому підрозділі, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

Означення 1.5.1. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* θ між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, який будемо позначати $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ або $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку θ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1.26}$$

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1.26) не більше за 1, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис. 1.12. Щоб побачити це, необхідно замінити значення $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$, та $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$ на a,



$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

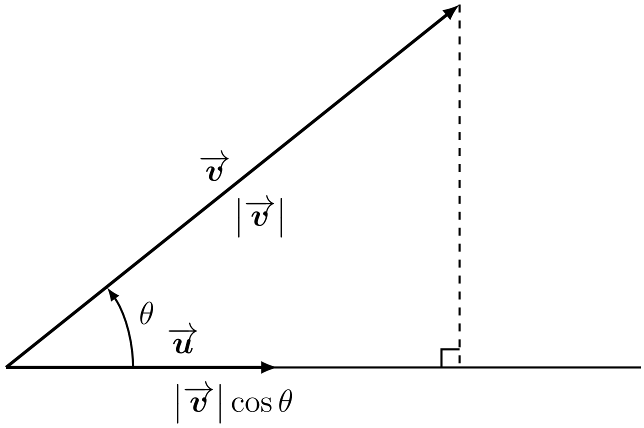
Рис. 1.12: Теорема косинусів

b і c, відповідно, і спростити результат.

Тепер, якщо $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ (див. рис. 1.13). Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скаляр-



$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right| \cos\theta$$

Рис. 1.13: Геометрична інтерпретація скалярного добутку

ного добутку:

> *якщо* $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| = 1$, *то величина* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *на вектор* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

Означення 1.5.2. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Якщо $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = 0$ або $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \parallel \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Означення 1.5.3. Два вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$.

Теорема 1.5.4. *Нехай* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. *Тоді:*

(*i*) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *тоді і тільки тоді, коли вектори* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ *і* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *є ортогональними;*
(*ii*) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \parallel \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *тоді і тільки тоді, коли вектори* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ *і* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *є лінійно залежними.*

Доведення. Твердження (*i*) випливає з означення скалярного добутку векторів.

(*ii*) Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \parallel \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, то за означенням маємо $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = 0$ або $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ є колінеарними, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ є лінійно залежними. Тоді за нерівністю Коші-Шварца (див. теорема 1.3.16(1)) маємо, що $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle| = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = 0$ або $\angle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \pi$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \parallel \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. $\square$

Хоча слова “ортогональний” і “перпендикулярний” мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

На звавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i = \cos\theta_i$, де θ_i — кут між вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і базовим вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$. Це обґрунтовує таку термінологію:

Означення 1.5.5. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий вектор, то i-а компонента одиничного вектора називається *i-им напрямним косинусом вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

1.6 Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цьому підрозділі розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Читач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується в більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1. Вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_i \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_j = 0$ для $i \neq i$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\vec{\boldsymbol{v}}$ через базис $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{\boldsymbol{v}} = a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \vec{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грам-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{v}}_1|}\vec{\boldsymbol{v}}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{\boldsymbol{u}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{u}}_2$ і векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ збігаються (див. рис. 1.14). Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ до вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, це зробити вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{\boldsymbol{v}}$ вектора $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ на вектор $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, і як ми вказували в підрозділі 1.5, що вектор $\vec{\boldsymbol{v}}$ можна знайти за допомогою точкового добутку. Наведені нижче

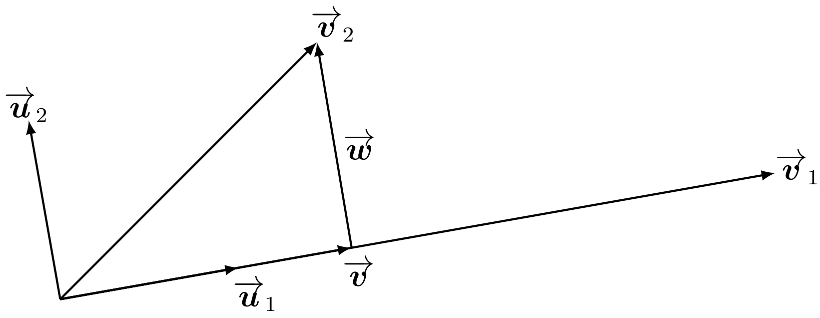


Рис. 1.14: Проста геометрична проекція

рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}}_1 &= \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{v}}_1|}\vec{\boldsymbol{v}}_1,\\ \vec{\boldsymbol{u}}_2 &= \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{w}}|}\vec{\boldsymbol{w}},\end{aligned} \tag{1.27}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{w}} &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}},\\ \vec{\boldsymbol{v}} &= \left(\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\vec{\boldsymbol{u}}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{\boldsymbol{w}}$ і $\vec{\boldsymbol{u}}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{w}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 &= \left(\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \left(\left(\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\right) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 =\\ &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 - \left(\left(\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\vec{\boldsymbol{u}}_1\right) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 =\\ &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 - \left(\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right) =\\ &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 - \left(\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\cdot 1 =\\ &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 - \vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1 =\\ &= 0.\end{aligned}$$

Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ (див. рис. 1.15). Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Припустимо, що вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{u}}_2$ утворюють такий базис. Тепер знайдемо третій вектор $\vec{\boldsymbol{u}}_3$, спроектувавши вектор $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ на вектор $\vec{\boldsymbol{x}}$ у підпросторі $\boldsymbol{X}$, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{\boldsymbol{u}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{u}}_2$. Різниця $\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}}_3 - \vec{\boldsymbol{x}}$ є вектором ортогональним до підпростору $\boldsymbol{X}$, який потір нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором. Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор* $\vec{\boldsymbol{x}}$? Приклад на рис. 1.16 мотивує відповідь. Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$

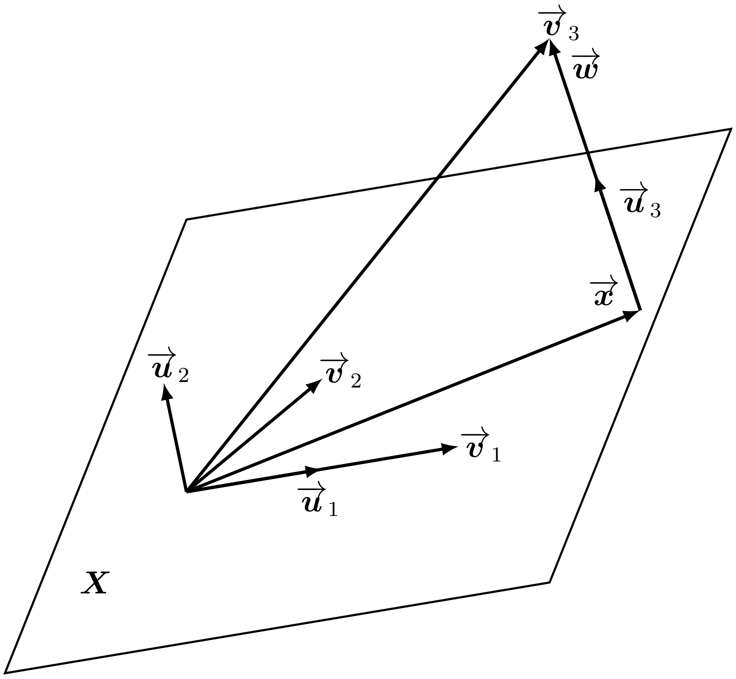


Рис. 1.15: Більше ортогональних проекцій

на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта).

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$
Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$

Якщо $\boldsymbol{S} = \varnothing$, то повертаємося до $\boldsymbol{B} = \varnothing$.

Нехай $s = 1$, $\boldsymbol{B} = \varnothing$ і $m = 0$.

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.
Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \ldots - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = (1/|\vec{w}|)\vec{w}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.
Приріст s.
Йти до **кроку 1**.

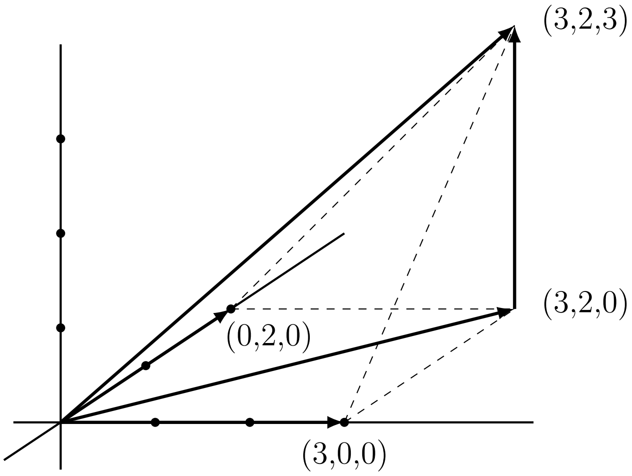


Рис. 1.16: Більше ортогональних проекцій

Теорема 1.6.4. *Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.*

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_i$ утворюють ортонормовану множину,
(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{\boldsymbol{w}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i = 0$, де $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_m\right). \tag{1.28}$$

З припущення індукції (1.28) випливає, що вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (1.28) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right). \tag{1.29}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{\boldsymbol{v}}_s$. Використавши припущення індукції (1.28), бачимо, що вектор $\vec{\boldsymbol{v}}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_{s-1}, \vec{\boldsymbol{u}}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (1.28) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right). \tag{1.30}$$

З включень (1.29) і (1.30) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то це та інше використання припущення індукції (1.28) доводять, що виконується включення (1.30). Також, вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (1.28) випливає, що виконується включення (1.30). Це повністю завершує доведення теореми. □

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ є лінійно незалежними. У найгіршому випадку, коли множина векторів $\boldsymbol{S}$ є порожньою або $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \ldots = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5. *Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.*

Приклад 1.6.6. Знайдіть ортонормовану базу $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1|}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{v}} &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (2, -1, 1),\\
\overrightarrow{\boldsymbol{w}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (1, 3, 1).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) =\\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) =\\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) =\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Означення 1.6.7. Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\right\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8. *Якщо* $\boldsymbol{X}$ *— підпростір векторного простору* $\boldsymbol{V}$ *зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення* $\boldsymbol{X}^\perp$ *простору* $\boldsymbol{X}$ *є підпростором у* $\boldsymbol{V}$ *і*

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ *— підпростір з властивістю, що кожен вектор з* $\boldsymbol{Y}$ *є нормальним до* $\boldsymbol{X}$*, то* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^\perp$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^\perp$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^\perp$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,\\
&(\alpha \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

а отже $\boldsymbol{X}^\perp$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^\perp$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right) \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2\right) \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k\right) \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^\perp$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^\perp$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^\perp$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^\perp$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^\perp = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{0}}\right\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^\perp$. $\square$

Означення 1.6.9. Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^\perp$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10. *Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що*

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \vec{\boldsymbol{n}}_i \bullet \vec{\boldsymbol{u}} = 0 \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. □

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\vec{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} \oplus \vec{\boldsymbol{y}}$, де $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11. Вище означений вектор $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.[3]

Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Теорема 1.6.12. *Нехай $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком ($k \geqslant 1$) і $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то*

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1\right)\vec{\boldsymbol{n}}_1 + \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2\right)\vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k\right)\vec{\boldsymbol{n}}_k \tag{1.31}$$

і

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} - \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1\right)\vec{\boldsymbol{n}}_1 - \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2\right)\vec{\boldsymbol{n}}_2 - \ldots - \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k\right)\vec{\boldsymbol{n}}_k. \tag{1.32}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1\right)\vec{\boldsymbol{n}}_1 + \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2\right)\vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + \left(\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k\right)\vec{\boldsymbol{n}}_k,$$

отримуємо рівність (1.31). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} \oplus \vec{\boldsymbol{y}}$, де $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (1.32). □

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1.31) і (1.32) є хибними. Такі приклади у випадку неортонормованих баз наведено у вправі 1.17.46.

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

[3] Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$ і ортогональне доповнення вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.

Означення 1.6.13. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільні два вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|} \tag{1.33}$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}. \tag{1.34}$$

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$. Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору $\boldsymbol{X}$, а друга ортогональна їй (див. рис. 1.17).

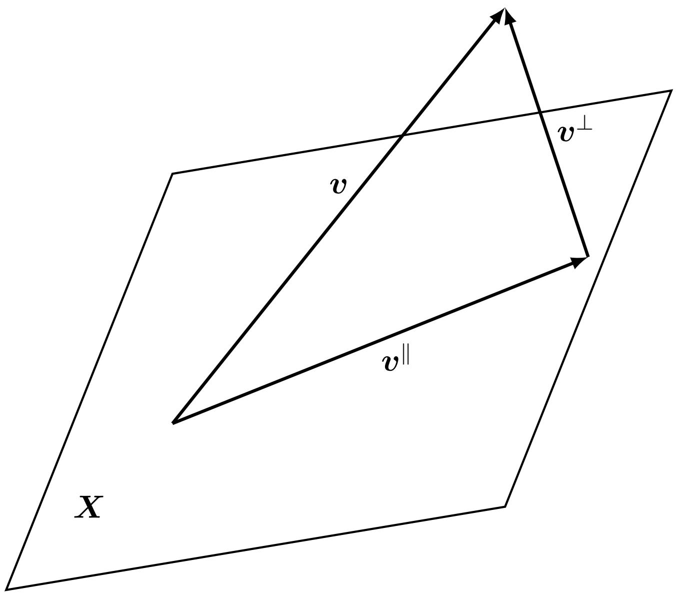


Рис. 1.17: Розклад вектора стосовно підпростору

Ми завершуємо цей підрозділ поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14. Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо

$$AA^T = A^T A = I,$$

тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15. (1) *Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.*
(2) *Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.*
(3) *Детермінант ортогональної матриці дорівнює* ± 1.
(4) *Множина всіх ортогональних матриць однакового розміну з детермінантом* $+1$ *є підгрупою групи ортогональних матриць.*

Означення 1.6.16. Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики, і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Теорема 1.6.17. *Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.*

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. □

Теорема 1.6.18. *Нехай* $n \geqslant 1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ *і* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — *ортонормовані бази в дійсному векторному просторі* $\boldsymbol{V}$ *зі скалярним добутком. Якщо*

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{1.35}$$

то $A = (a_{ij})$ *є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай* $A = (a_{ij})$ — *ортогональна матриця. Якщо* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ — *ортонормована база і якщо* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — *вектори, які визначаються рівністю* (1.35), *то вектори* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ *є також ортонормованою базою у векторному просторі* $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності[4]

$$\delta_{st} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

□

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19. Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\, A^T = A^T\, \overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця". Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Означення 1.6.20. Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі. Див. наприклад [?].

Приклад 1.6.21. Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0, 5, 0, 5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8, 10, -8, 14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1|} \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}} \cdot (1, 2, 3, 4) = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{b}} &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right) \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) = \\ &= \frac{10 + 20}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) = \\ &= (1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

[4] *Символ Кронекера* δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{b}}_2 - \vec{\boldsymbol{b}} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1, 3, -3, 1).$$

Тоді

$$\vec{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{w}}|}\vec{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}} \cdot (-1, 3, -3, 1) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1).$$

Для отримання вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_3$ покладемо

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{b}} &= \left(\vec{\boldsymbol{b}}_3 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right) \vec{\boldsymbol{u}}_1 + \left(\vec{\boldsymbol{b}}_3 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2\right) \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \\
&= \frac{8\cdot 1 + 10\cdot 2 + (-8)\cdot 3 + 14\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) + \\
&\quad + \frac{8\cdot(-1) + 10\cdot 3 + (-8)\cdot(-3) + 14\cdot 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1) = \\
&= \frac{8+20-24+56}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \frac{-8+30+24+14}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) = \\
&= \frac{60}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \frac{60}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) = \\
&= 2 \cdot (1, 2, 3, 4) + 3 \cdot (-1, 3, -3, 1) = \\
&= (2, 4, 6, 8) + (-3, 9, -9, 3) = \\
&= (-1, 13, -3, 11), \\
\vec{\boldsymbol{w}} &= \vec{\boldsymbol{b}}_3 - \vec{\boldsymbol{b}} = (8, 10, -8, 14) - (-1, 13, -3, 11) = (9, -3, -5, 3).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}}_3 &= \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{w}}|}\vec{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{81+9+25+9}} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{124}} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3).
\end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned}
|\vec{\boldsymbol{u}}_1| &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1, \\
|\vec{\boldsymbol{u}}_2| &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1, \\
|\vec{\boldsymbol{u}}_3| &= \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) + 4\cdot 1\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(-1+6-9+4\right) = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4)\right)\bullet\left(\frac{1}{2\sqrt{31}}\cdot(9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{31}}\left(1\cdot 9+2\cdot(-3)+3\cdot(-5)+4\cdot 3\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{31}}\left(9-6-15+12\right) = \\ &= 0\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_3 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1)\right)\bullet\left(\frac{1}{2\sqrt{31}}\cdot(9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{31}}\left((-1)\cdot 9+3\cdot(-3)+(-3)\cdot(-5)+1\cdot 3\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{31}}\left(-9-9+15+3\right) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Приклад 1.6.22. Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \vec{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\vec{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\vec{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\vec{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\vec{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\vec{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\vec{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\vec{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\vec{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\vec{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4), \\ \vec{\boldsymbol{u}}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1), \\ \vec{\boldsymbol{u}}_3 &= \frac{1}{2\sqrt{31}}\cdot(9,-3,-5,3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\vec{\boldsymbol{a}} = (a,b,c,d)$. Оскільки вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$ ортогональний до елементів бази $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, $\vec{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{u}}_3 \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) = 0.$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ -a + 3b - 3c + d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ 5b + 5d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a + 2b + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a - 3b - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2d + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a + 3d - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a - 5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a + 27c &= -18d; \\ 9a - 5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a + 27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ c &= -\dfrac{12}{32}d = -\dfrac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - \frac{9}{8}d & = -2d; \\ c & = -\frac{3}{8}d; \\ b & = -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = -\frac{7}{8}d; \\ \\ c & = -\frac{3}{8}d; \\ b & = -d. \end{cases}$$

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

(2) За формулою (1.33) маємо, що

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1} &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1\right|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1\right|} = \\ &= \left((4, 3, 2, 1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}} \cdot (1, 2, 3, 4)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}} \cdot (1, 2, 3, 4) = \\ &= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) = \\ &= \frac{20}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot (1, 2, 3, 4) = \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right). \end{aligned}$$

(3) За формулою (1.34) маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1} = (4, 3, 2, 1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right).$$

(4) За формулою (1.31) з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1\right)\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 + \left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 + \left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_k\right)\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_3,$$

де $\vec{\boldsymbol{n}}_1$, $\vec{\boldsymbol{n}}_2$, $\vec{\boldsymbol{n}}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{n}}_1 &= \vec{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),\\
\vec{\boldsymbol{n}}_2 &= \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),\\
\vec{\boldsymbol{n}}_3 &= \vec{\boldsymbol{u}}_3 = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = {}& \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) +\\
&+ \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) +\\
&+ \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3) =\\
={}& \frac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) + \frac{0}{20} \cdot (-1,3,-3,1) + \frac{20}{124} \cdot (9,-3,-5,3) =\\
={}& \frac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) + \frac{5}{31} \cdot (9,-3,-5,3) =\\
={}& \left(\frac{2}{3} + \frac{45}{31}, \frac{4}{3} - \frac{15}{31}, 2 - \frac{25}{31}, \frac{8}{3} + \frac{15}{31}\right) =\\
={}& \left(\frac{2\cdot 31 + 45\cdot 3}{3\cdot 31}, \frac{4\cdot 31 - 15\cdot 3}{3\cdot 31}, \frac{2\cdot 31 - 25}{31}, \frac{8\cdot 31 + 15\cdot 3}{3\cdot 31}\right) =\\
={}& \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(5) За формулою (1.32) з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \left(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1\right) \vec{\boldsymbol{n}}_1 - \left(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2\right) \vec{\boldsymbol{n}}_2 - \left(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_3\right) \vec{\boldsymbol{n}}_3,$$

де $\vec{\boldsymbol{n}}_1$, $\vec{\boldsymbol{n}}_2$, $\vec{\boldsymbol{n}}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. А отже

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}} &= \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} =\\
&= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) =\\
&= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) =\\
&= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).
\end{aligned}$$

1.7 Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1. Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1.36}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \tag{1.37}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$ (див. вправу 1.17.47).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2. Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\right\}, \tag{1.38}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (1.38) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{1.39}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0. \tag{1.40}$$

Рівність (1.38) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис. 1.18).

Означення 1.7.3. Рівняння (1.40) називається *рівнянням гіперплощини в точковонормальному вигляді* визначеної рівнянням (1.38) або (1.39). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.

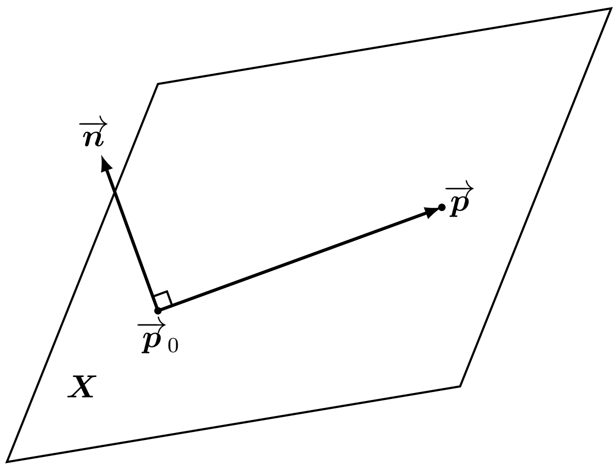


Рис. 1.18: Точково-нормальне означення гіперплощини

Приклад 1.7.4. Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0, 0, 0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0, 0, 1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення "площина" у слові "гіперплощина".

Твердження 1.7.5. (1) *Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору*

$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) *Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.*

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.84 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\vec{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}}_0 = \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\vec{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{p}}_0\right) = \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. □

Приклад 1.7.6. Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням

$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\vec{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\vec{\boldsymbol{p}} \mapsto \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ та $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7. Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} = \left(v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1\right), \tag{1.41}$$

де $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (1.41) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше у підрозділі 1.15. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

Приклад 1.7.8. Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} &= (1-1, 2-0, 0-1) = (0, 2, -1), \\ \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} &= (0-1, 0-0, 3-1) = (-1, 0, 2) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1) \cdot (-1) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1) \cdot 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0 \cdot (-1) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \\ &= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \\ &= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \\ &= (4, 1, 2). \end{aligned}$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4, 1, 2)$ має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4, 1, 2) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0,$$

$$4(x-1) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то ми бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k \right\}. \tag{1.42}$$

Означення 1.7.9. Рівняння (1.42) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Лема 1.7.10. *Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.*

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Таким чином, ми маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. □

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків “орієнтованих” гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.12. *У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (1.42) маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}\right) = 0\right\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}\right) = 0\right\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже є паралельними. □

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13. *Площина* $\boldsymbol{X}_0$ *не залежить від вибору бази площини* $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. □

Означення 1.7.14. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *на площину* $\boldsymbol{X}$ називається ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$. *Ортогональним доповненням вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ *стосовно площини* $\boldsymbol{X}$ називається ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.

Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15. Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина $\boldsymbol{X}$ називається *паралельною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є паралельний до площини $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{X}$ називається *ортогональною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до площини $\boldsymbol{Y}$.

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останньому підрозділі (див. рис. 1.17). Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Приклад 1.7.16. Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$
\begin{aligned}
x &= 2 + 3t,\\
y &= -t,\\
z &= 7
\end{aligned}
$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими слова, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Завершуємо цей підрозділ ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. 1.19 зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною)

$$x + 2y - 2 = 0.$$

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18. Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19. (1) *Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.*
(2) *Якщо* $\boldsymbol{X}$ *— площина, то* $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. □

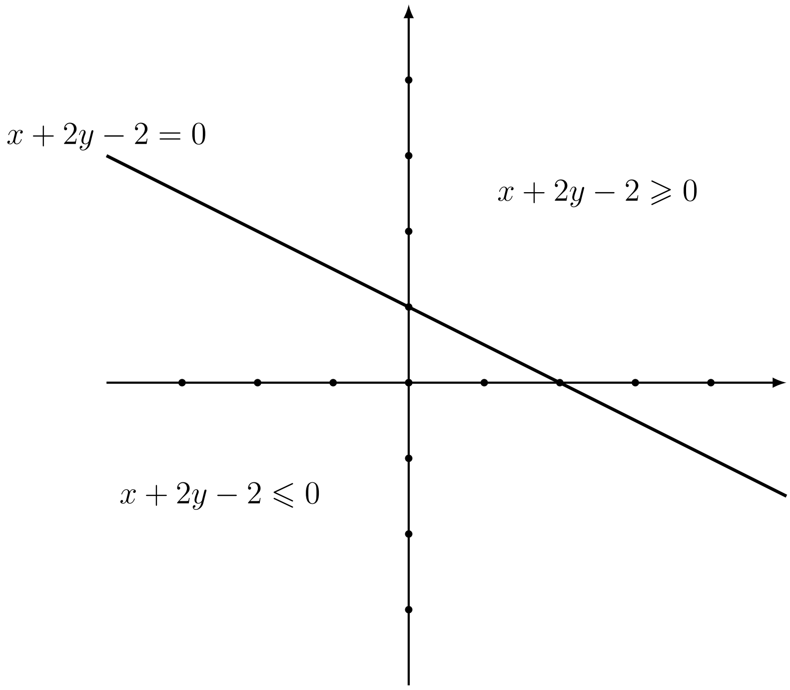


Рис. 1.19: Півплощини, які визначаються прямою $x + 2y - 2 = 0$

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20. *Нехай* $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. *Тоді*

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. □

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\right\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні.* Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

1.8 Орієнтація

Цей підрозділ — це вступ до поняття орієнтації. Хоча ця інтуїтивна концепція знайома всім, напевно, мало хто замислювався над тим, що це означає та як можна дати точне означення поняття орієнтації.

Поняття орієнтації проявляє себе у багатьох різних розуміннях і значеннях. У щоденній розмові можна зустріти такі фрази, як "ліворуч від", "праворуч від", "за годинниковою стрілкою" або "проти годинникової стрілки". Фізики говорять про правило правого чи лівого свердлика, або про праві чи ліві системи координат. У комп'ютерній графіці, можливо, потрібно вибирати нормалі до плоскої кривої послідовно так, щоб усі вони, скажімо, вказували "всередину" (чи "ззовні") кривої (див. рис. 1.20). Ана-

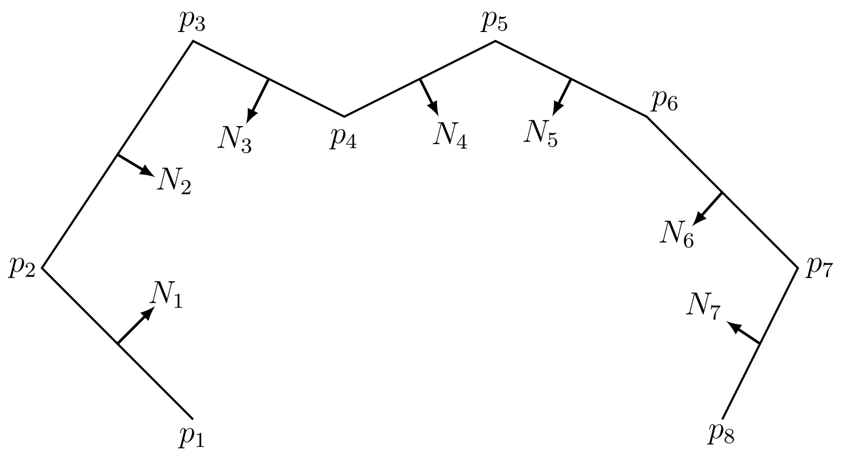


Рис. 1.20: Однорідно орієнтовані нормалі

логічне запитання може бути задано для нормалей у випадку поверхонь. Як можна систематично сказати, що наш вибір нормалей є "сумісним"? Що це насправді означає?

Напевно, найпростіший спосіб продемонструвати властивість орієнтування для поверхонь — це в термінах кількості "сторін", які вони мають. Розглянемо циліндр на рис. 1.21(a). Ця поверхня має ту властивість, що якби хтось був жуком, то єдиним способом проникнути із "зовнішнього боку" у "внутрішній" треба було б повзати через край поверхні. Ми висловлюємо це кажучи, що циліндр є "двобічним" або орієнтованим. Очевидно, що циліндр можна отримати із смужки паперу, склеївши два кінці звичайним чином. Якщо, навпаки, ми візьмемо ту ж саму смужку паперу та спочатку повернемо її на 180°, перш ніж склеїти кінці, то отримаємо поверхню, яка називається стрічкою Мьобіуса (див. рис. 1.21(b)). Незважаючи на те, що стрічка Мьобіуса має дві сторони в будь-якій точці, ми можемо дістатися з одного боку на інший, пройшовши всю стрічку, паралельно меридіану. Стрічка Мьобіуса — це "однобічна" або неорієнтована поверхня. Взагалі, просте означення полягає в тому, що кажуть, що поверхня $\boldsymbol{S}$ є *орієнтованою* (*неорієнтованою*), якщо неможливо (можливо) дістатися з одного боку поверхні $\boldsymbol{S}$ в точці на інший бік, проходячи вздовж поверхні.

Можна визначити орієнтованість також з точки зору властивостей, які безпосередньо пов'язані з інтуїтивним розумінням поняття "орієнтація". Наприклад, орієнтова-

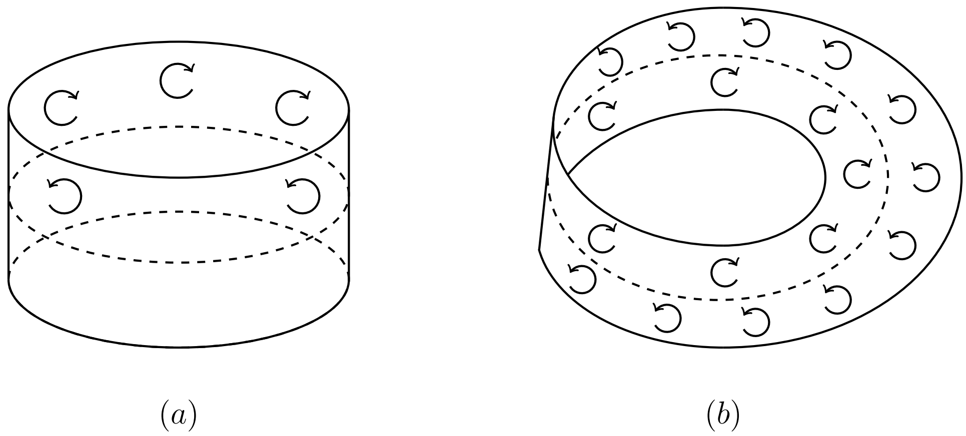


Рис. 1.21: Індуковані орієнтації вздовж шляхів

на поверхня — це така, де можна визначити узгоджене поняття ліворуч та праворуч або рух за годинниковою стрілкою та проти годинникової стрілки. Але що означає "узгоджений"? Якщо двоє людей стоять у різних точках поверхні, і кожен з них вирішив, що називати за годинниковою стрілкою, як вони можуть визначити, чи є їх вибір узгодженим (припускаючи, що вони не можуть бачити один одного)? Один із способів відповісти на це запитання — попросити одного з них підійти туди, де стоїть другий, а потім порівняти свої уявлення про годинникову стрілку. Це призводить до наступного підходу до визначення узгодженої орієнтації в кожній точці поверхні $\boldsymbol{S}$. Починаючи з точки $\boldsymbol{p}$ на поверхні, вибирають орієнтацію в точці $\boldsymbol{p}$, вирішуючи, яке з двох можливих обертань навколо цієї точки треба визначити як обертання за годинниковою стрілкою. Тепер, нехай $\boldsymbol{q}$ — довільна інша точка поверхні $\boldsymbol{S}$, причому точка $\boldsymbol{q}$ може збігатися з точкою $\boldsymbol{p}$. Рухаємося до точки $\boldsymbol{q}$ вздовж якогось шляху, весь час пам'ятаючи, яке обертання було визначено, як обертання за годинниковою стрілкою. Це призведе до уявлення про обертання за годинниковою стрілкою в точці $\boldsymbol{q}$, а отже, й орієнтації в точці $\boldsymbol{q}$. На жаль, існує багато шляхів від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$ (і взагалі не існує єдиного найкоротшого шляху), і, хоча це може здатися не одразу очевидним, різні шляхи можуть індукувати різні орієнтації. Якщо орієнтація в точці $\boldsymbol{p}$ завжди індукує однакову орієнтацію в кожній точці поверхні, незалежно від того, яким шляхом ми проходимо до цієї точки, тоді поверхня $\boldsymbol{S}$ називається *орієнтованою*. З рис. 1.21(b) видно, що обхід меридіана стрічки Мьобіуса призведе до зворотної (оберненої) орієнтації у вихідній точці, яка є протилежною вибраній на початку. Тому ми назвали б стрічку Мьобіуса неорієнтовною, і наше нове означення поняття орієнтації сумісне з попереднім.

Орієнтованість — це властивість поверхонь. Фелікс Кляйн (Felix Klein) був першим, хто чітко визначив цей факт у 1876 р. Сфера є орієнтована поверхня, як і тор (поверхня бублика), так і подвійний тор (поверхня твердої вісімки), які зображені на рис. 1.22. Насправді, оскільки тор буде частим прикладом, то настав час дати трохи точніше його означення. Це окремий випадок більш загального типу поверхні.

Означення 1.8.1. *Поверхнею обертання* в $\mathbb{R}^3$ називається простір $\boldsymbol{S}$, отриманий обертанням плоскої кривої навколо прямої в площині, яка називаються *віссю обер-*

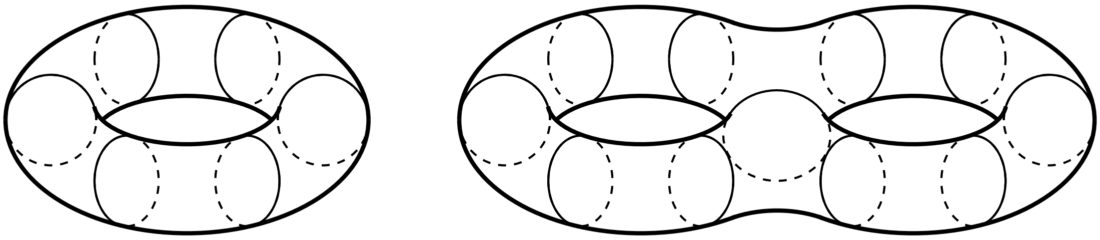
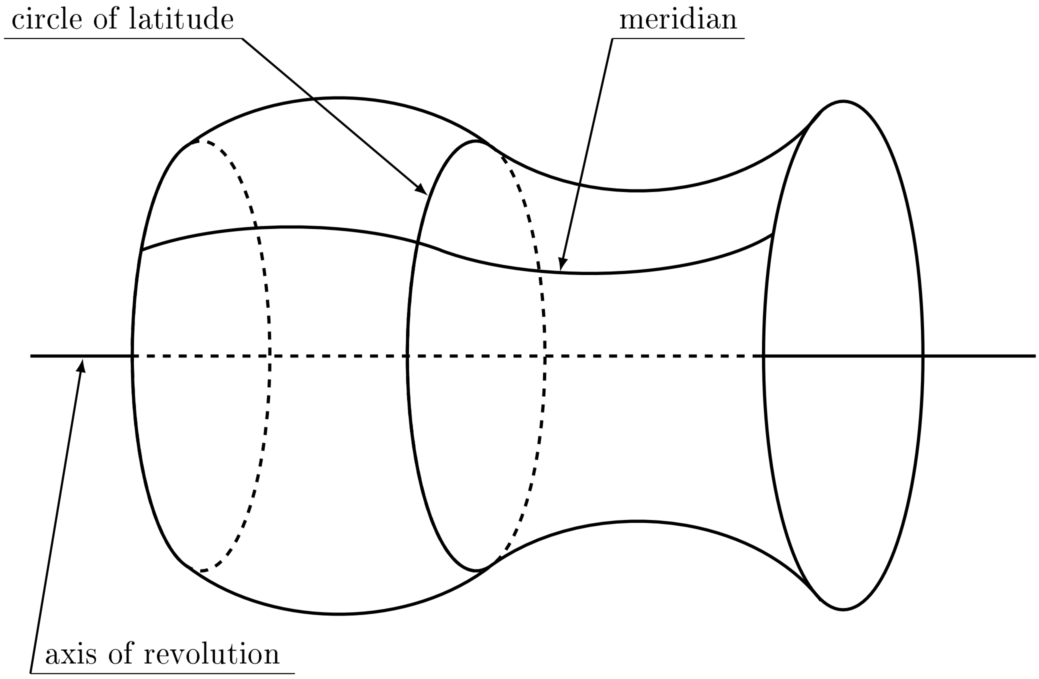


Рис. 1.22: Тор і подвійний тор — орієнтовані поверхні

тання. *Меридіан поверхні* $\boldsymbol{S}$ — це зв'язна компонента перетину поверхні $\boldsymbol{S}$ і площини, яка проходить через вісь обертання. *Паралелі* або *кола широт поверхні обертання* $\boldsymbol{S}$ — це зв'язні компоненти перетину поверхні $\boldsymbol{S}$ і площини, ортогональної осі обертання (див. рис. 1.23).



axis of revolution – вісь обертання
circle of latitude – паралель
meridian – меридіан

Рис. 1.23: Поверхня обертання

Тор — це поверхня обертання, де крива, що обертається, — це коло, яке не перетинає вісь обертання.

Зауважимо, що меридіани поверхонь обертання перетинаються з колами широти в одній точці, а також, що поверхня обертання насправді може не бути "поверхнею", якщо крива, що обертається, не вибирається ретельно, наприклад, якщо вона перетинає вісь. Поверхні обертання також є орієнтованими.

Існують поверхні без межі (без краю), які не можна орієнтувати, і читачеві пропонується знайти їх самостійно (або почекати, поки не з'явиться пізніше в цьому курсі лекцій). Необхідно звернути увагу на таке: неорієнтовані поверхні без межі (без краю) не існують у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$. Потрібен четвертий вимір.

Завершимо це інтуїтивне обговорення орієнтованості. Перейдемо до математичних означень. У цьому підрозділі ми визначаємо найголовніше поняття, а саме те, що мається на увазі під орієнтацією векторного простору. Воно відповідає означенню локального поняття, тобто поняттю орієнтації в точці.

Розглянемо спробу визначити орієнтацію у початку координат у $\mathbb{R}^2$. Нехай $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2)$ — впорядкована база в $\mathbb{R}^2$ (див. рис. 1.24). Ми могли б використати цю

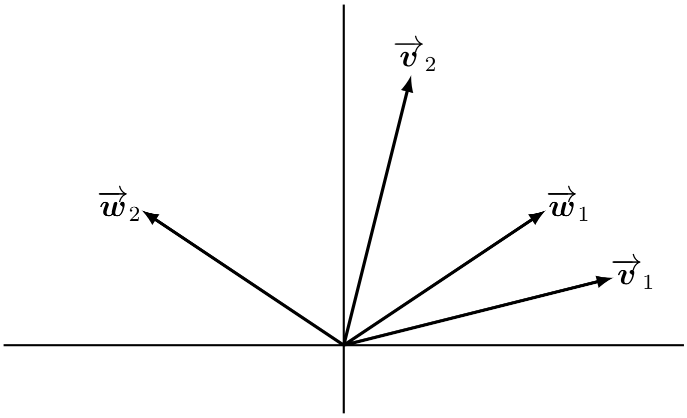


Рис. 1.24: Використання впорядкованих базисів для визначення орієнтації

впорядковану пару, щоб запропонувати ідею руху проти годинникової стрілки. Проблема полягає лише в тому, що існує багато впорядкованих базисів для $\mathbb{R}^2$. Наприклад, пара $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2)$ на рис. 1.24 також відповідає руху проти годинникової стрілки. Отже, нам потрібне відповідне відношення еквівалентності. Ключем до визначення цього відношення є матриця, що стосується двох впорядкованих базисів.

Нехай $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2)$ і $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2)$ — два впорядковані базиси в $\mathbb{R}^2$. Припустимо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 &= a_{11}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + a_{12}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2,\\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 &= a_{21}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + a_{22}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2,\end{aligned}$$

для $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що впорядковані базиси $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2)$ і $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2)$ *еквівалентні*, якщо визначник матриці

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

додатний. Оскільки ми маємо справу з базами, то знаємо, що коефіцієнти a_{ij} існують та єдині, а матриця $A = (a_{ij})$ — неособлива. Неважко помітити, що таке відношення є відношенням еквівалентності і, що ми маємо саме два класи еквівалентності, оскільки ненульовий детермінант є або додатним, або від'ємним. Ми могли б визначити орієнтацію простору $\mathbb{R}^2$ бути одним з таких класів еквівалентності. Як швидка перевірка того, що ми отримуємо те, чого хочемо, зверніть увагу, якщо $\vec{\boldsymbol{w}}_1 = \vec{\boldsymbol{v}}_2$ і $\vec{\boldsymbol{w}}_2 = \vec{\boldsymbol{v}}_1$, то

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що детермінант матриці A дорівнює -1, а отже впорядковані базиси $(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2)$ і $(\vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_1)$ визначають різні класи еквівалентності.

Оскільки ми використовували лише концепції векторного простору, то легко узагальнити те, що ми щойно зробили.

Означення 1.8.2. Нехай $\mathscr{B}_1 = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і $\mathscr{B}_2 = (\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{w}}_n)$ — впорядковані базиси для векторного простору $\boldsymbol{V}$ і нехай

$$\vec{\boldsymbol{w}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{v}}_j, \qquad \text{де } a_{ij} \in \mathbb{R},$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$. Будемо говорити, що впорядковані базиси $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ *еквівалентні*, і записуватимемо це $\mathscr{B}_1 \sim \mathscr{B}_2$, якщо детермінант матриці (a_{ij}) додатний.

Доведення наступної леми очевидне.

Лема 1.8.3. $\sim$ — *відношення еквівалентності на множині впорядкованих базисів для векторного простору* $\boldsymbol{V}$ *з рівно двома класами еквівалентності.*

Означення 1.8.4. *Орієнтацією* векторного простору $\boldsymbol{V}$ називається клас еквівалентності впорядкованого базису векторного простору $\boldsymbol{V}$ стосовно відношення $\sim$. Для однієї фіксованої орієнтації векторного простору $\boldsymbol{V}$ інша його орієнтація називається *протилежною орієнтацією*. Клас еквівалентності впорядкованого базису $(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ за відношенням $\sim$ будемо позначати $[\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n]$. У цьому випадку будемо говорити, що впорядкований базис $(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ *індукує* або *визначає* орієнтацію $[\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n]$ векторного простору $\boldsymbol{V}$. *Орієнтований векторний простір* — це пара $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\sigma})$, де $\boldsymbol{V}$ — векторний простір, а $\boldsymbol{\sigma}$ — його орієнтація.

Приклад 1.8.5. Доведіть, що орієнтовані базиси $((1,3),(2,1))$ і $((1,1),(2,0))$ визначають одну орієнтацію площини.

Розв'язок. Зауважимо, що

$$(1,1) = \frac{1}{5}(1,3) + \frac{2}{5}(2,1),$$
$$(2,0) = -\frac{2}{5}(1,3) + \frac{6}{5}(2,1)$$

(див. рис. 1.25) і

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{6}{25} + \frac{4}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} > 0.$$

Приклад 1.8.6. Доведіть, що орієнтовані базиси $((1,3),(2,1))$ і $((3,-1),(-1,3))$ визначають різні орієнтації площини.

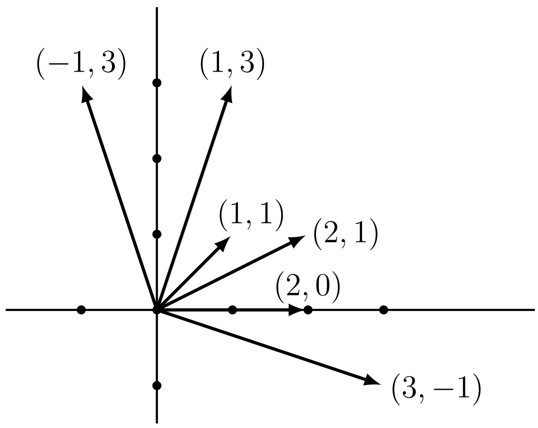


Рис. 1.25: Орієнтації базисів

Розв'язок. Зауважимо, що

$$(3,-1) = -(1,3) + 2(2,1),$$
$$(-1,3) = \frac{7}{5}(1,3) - \frac{6}{5}(2,1)$$

(див. рис. 1.25) і

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{6}{5} - \frac{14}{5} = -\frac{8}{5} < 0.$$

Оскільки довільні векторні простори не мають жодних спеціальних базисів, то зазвичай не можна говорити про "стандартну" орієнтацію векторного простору, а можна лише порівнювати упорядковані базиси, визначаючи, чи однакові їхні орієнтації, чи ні. У спеціальному випадку n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ ми маємо стандартний базис $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$, де

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1,0,\ldots,0), \quad \vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0,1,\ldots,0), \quad \ldots \quad \vec{\boldsymbol{e}}_n = (0,0,\ldots,1).$$

Означення 1.8.7. Орієнтація $[\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n]$ називається *стандартною орієнтацією* n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Стандартна орієнтація відповідає тому, що називається правило правого свердлика, і протилежна орієнтація — правило лівого свердлика.

Необхідно зазначити, що насправді важливим поняттям є не формальне визначення орієнтації, а пов'язана з цим термінологія. Читач повинен розуміти саме такі фрази, як "ці дві впорядковані бази визначають однакові або протилежні орієнтації" або "ця база індукує стандартну або нестандартну орієнтацію лінійного простору $\mathbb{R}^n$".

Розв'язування лінійних рівнянь може бути нудним, і тому приємно знати, що існує набагато простіший метод для визначення, чи впорядковані базиси визначають однакову орієнтацію чи ні у випадку n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Лема 1.8.8. *Два впорядковані базиси* $(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ *і* $(\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{w}}_n)$ *n-вимірного евклідового простору* $\mathbb{R}^n$ *визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді,* *коли визначники*

$$\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1\\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2\\ \vdots\\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n\end{pmatrix} \qquad i \qquad \det\begin{pmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1\\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2\\ \vdots\\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n\end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ідея доведення леми полягає в тому, щоб виразити обидва базиси через стандартний впорядкований базис $(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n)$, а далі скористатися властивостями визначників і лемою 1.8.3.

Приклад 1.8.9. Розв'язки прикладів 1.8.5 і 1.8.6 є набагато простіші за допомогою леми 1.8.8. Не потрібно розв'язувати жодні лінійні рівняння, а просто обчислити такі детермінанти:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} = -5, \qquad \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = -5, \qquad \det\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix} = 8.$$

Означення 1.8.10. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Будемо говорити, що невироджене лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *зберігає орієнтацію*, якщо впорядковані базиси $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і $(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1), T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2), \dots, T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n))$ визначають однакову орієнтацію векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо є лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ не зберігає орієнтацію, то будемо говорити, що воно *розвертає орієнтацію*. Більш загально, якщо $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\sigma})$ і $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\tau})$ — два орієнтовані n-вимірні векторні простори і якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — невироджене лінійне відображення (очевидно, що воно є ізоморфізмом лінійних просторів), то будемо говорити, що $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *зберігає орієнтацію*, якщо $\boldsymbol{\tau} = [T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1), T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2), \dots, T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)]$ для всіх впорядкованих базисів $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ з властивістю $\boldsymbol{\sigma} = [\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n]$, і в протилежному випадку будемо говорити, що T *розвертає орієнтацію*.

Тотожне відображення векторного простору, очевидно, зберігає орієнтацію.

Наступна теорема безпосередньо випливає з означення.

Теорема 1.8.11. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — невироджене лінійне перетворення. Перетворення T зберігає орієнтацію тоді і лише тоді, коли* $\det(T) > 0$.

Теорема 1.8.12. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T, T_1, T_2, \dots, T_k\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — невироджені лінійні перетворення.*

1. *Перетворення T зберігає орієнтацію тоді і лише тоді, коли T^{-1} зберігає орієнтацію.*
2. *Нехай $T = T_1 \circ T_2 \circ \dots \circ T_k\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$. Перетворення T зберігає орієнтацію тоді і лише тоді, коли кількість перетворень T_i які розвертають орієнтацію, є парна.*

Теорема 1.8.12 є безпосереднім наслідком теореми 1.8.11 та таких рівностей:

$$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)} \qquad \text{i} \qquad \det(T) = \det(T_1)\cdot\det(T_2)\cdot\ldots\cdot\det(T_k).$$

Означення 1.8.13. Нехай $\boldsymbol{X}$ — площина n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ з базисом $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$. *Орієнтацією площини* $\boldsymbol{X}$ називається орієнтація лінійного підпростору $\operatorname{aff}(\{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n\})$ (який є перенесенням площини $\boldsymbol{X}$ до початку координат) простору $\mathbb{R}^n$. *Орієнтована площина* це пара $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$, де $\boldsymbol{X}$ — площина, а $\boldsymbol{\sigma}$ — орієнтація площини $\boldsymbol{X}$. Вираз "площина $\boldsymbol{X}$ орієнтована впорядкованим базисом $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_k)$" буде означати, що маємо орієнтовану площину $(\boldsymbol{X}, [\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_k])$. Орієнтовану пряму часто називають *напрямленою прямою*.

Орієнтовану площину $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ часто називають просто "орієнтованою площиною $\boldsymbol{X}$". У цьому випадку орієнтація $\boldsymbol{\sigma}$ вважається заданою, але просто не вказується явно, поки це не буде потрібно. Орієнтація орієнтованої прямої визначається єдиним одиничним вектором напрямку.

Зазвичай, хоча вони, здається, мають сенс, такі вирази, як "кут між двома прямими" або "кут між двома площинами в $\mathbb{R}^3$", є неоднозначними, оскільки це може означати один із двох кутів. У орієнтованому випадку такі кути визначаються однозначно.

Означення 1.8.14. Нехай $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ і $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau})$ — орієнтовані гіперплощини в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = [\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}]$ і $\boldsymbol{\tau} = [\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_{n-1}]$ — нормальні вектори для $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, відповідно, з властивістю, що впорядковані базиси $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n)$ індукують стандартну орієнтацію простору $\mathbb{R}^n$, тоді кут між векторам $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n$ називається *кутом між орієнтованими гіперплощинами* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ і $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau})$.

Зауважимо, що кут між орієнтованими гіперплощинами коректно визначений.

Означення 1.8.15. Нехай $\boldsymbol{L}$ — орієнтована пряма і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ — одиничний вектор, який визначає орієнтацію прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ — дві точки на прямій $\boldsymbol{L}$. *Орієнтована відстань* від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$, позначається $\|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}\|$, визначається за формулою

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}\| = \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}.$$

Неважко перевірити, якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то $\|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}\|$ — це просто звичайна відстань (довжина вектора) $|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$ якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ індукує ту саму орієнтацію на прямій $\boldsymbol{L}$, що і вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, та $-|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$ — в протилежному випадку.

Кут між двома векторами, як визначено в підрозділі 1.5, завжди є невід'ємною величиною, але іноді зручно говорити про знаковий кут, де знак кута визначається напрямком (проти годинникової стрілки або за годинниковою стрілкою), що кут "охоплює".

Означення 1.8.16. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — два лінійно незалежні вектори на площині $\mathbb{R}^2$. Якщо θ — кут між векторам $\boldsymbol{u}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, то визначимо *знаковий кут між* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ *та* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, який позначатимемо $\angle_s(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, так:

$$\angle_s(\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \begin{cases} \theta, & \text{якщо впорядкована база } (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \\ & \quad \text{індукує стандартну орієнтацію в } \mathbb{R}^2; \\ -\theta, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

На цьому наше обговорення локальної теорії орієнтації закінчується. Ми повернемося до теми орієнтації в подальших розділах, в розумінні під орієнтації в точці простору кривих. Ми також розглянемо глобальні аспекти орієнтації та те, що може означати сказати, що орієнтований цілий простір. Однак, щоб не залишати читача в певній мірі щодо того, як визначення цього розділу вписуються в цілу картину, корисно дати короткий опис того, що має бути. Хорошим прикладом можуть служити поверхні.

Нехай $\boldsymbol{S}$ — гладка поверхня. Під цим поняттям ми маємо на увазі те, що $\boldsymbol{S}$ має хорошу дотичну площину $\boldsymbol{T_p}$ в кожній точці $\boldsymbol{p}$, яка постійно змінюється, коли ми рухаємося від точки до точки. Назвемо точку, де дотична площина торкається поверхні, своїм "початком". Оскільки кожна дотична площина $\boldsymbol{T_p}$ є двовимірним векторним простором, то ми завжди знаємо, коли це означає мати орієнтацію $\boldsymbol{\sigma_p}$ для кожної дотичної площини $\boldsymbol{T_p}$ окремо. Сім'я орієнтацій $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{\sigma_p}$ називається орієнтацією для поверхні $\boldsymbol{S}$, якщо орієнтації $\boldsymbol{\sigma_p}$ постійно змінюються від точки до точки. Щоб пояснити, що мається на увазі під поняттям постійно зміни орієнтації, зверніть увагу, що існує чітко визначена однозначна проекція $\boldsymbol{\pi_p}$ околу початку координат у дотичній площині $\boldsymbol{T_p}$ на окіл точки $\boldsymbol{p}$ на поверхні. Рис. 1.26 показує цю відповідність

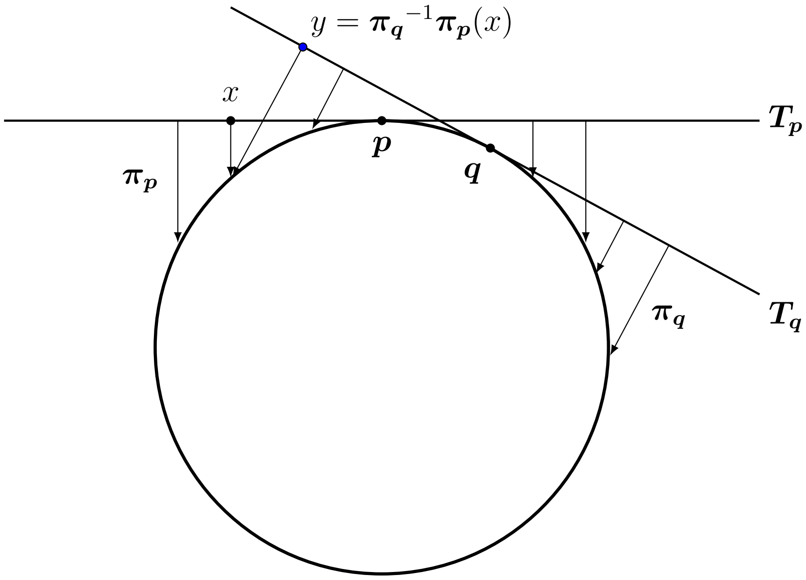


Рис. 1.26: Визначення постійно змінюваних орієнтацій

у випадку кривої. Це означає, що якщо дві точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ близькі, то відображення

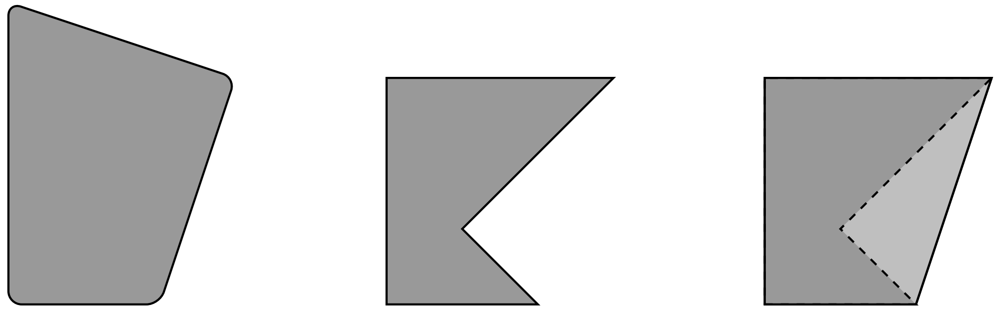
$$\boldsymbol{\pi_{p,q}} = \boldsymbol{\pi_q}^{-1}\boldsymbol{\pi_p}$$

є коректно визначеною біекцією між околом початку координат у дотичній площині $\boldsymbol{T_p}$ та околом початку координат у дотичній площині $\boldsymbol{T_q}$. Ми можемо використовувати це відображення для встановлення відповідності між упорядкованими базисами в двох дотичних просторах. Таким чином, ми можемо порівнювати орієнтації, і ми говоримо, що орієнтації в $\boldsymbol{O}$ постійно змінюються, якщо близькій точки $\boldsymbol{\sigma_p}$ і $\boldsymbol{\sigma_q}$ пов'язані відображенням $\boldsymbol{\pi_{p,q}}$. Орієнтована поверхня — це пара $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{O})$, де $\boldsymbol{S}$ — поверхня, а $\boldsymbol{O}$ її орієнтація.

1.9 Опуклі множини

Означення 1.9.1. Підмножина $\boldsymbol{X}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{X}$ відрізок $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ повністю міститься в $\boldsymbol{X}$, а в протилежному випадку множина $\boldsymbol{X}$ називається *неопуклою*.

Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. 1.27(a) і (b), відповідно. У наступному твердженні перелічено деякі



(a) (b) (c)

Рис. 1.27: Опуклі, неопуклі множини та опукла оболонка

основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2. (i) *Порожня множина та* $\mathbb{R}^n$ *опуклі множини.*

(ii) *Кожна півплощина в* $\mathbb{R}^n$ *опукла множина.*

(iii) *Перетин довільної кількості опуклих множин у* $\mathbb{R}^n$ *опукла множина.*

Доведення. Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо читачеві (див. вправи 1.17.67 і 1.17.68). □

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3. Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка* або *опукле замикання* множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} \colon \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис 1.27(c)).

Твердження 1.9.4. *Якщо* $\boldsymbol{X}$ *— опукла підмножина в* $\mathbb{R}^n$*, то* $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо читачеві як вправу (див. вправу 1.17.69).

Означення 1.9.5. Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено в підрозділі **??**. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис 1.28).

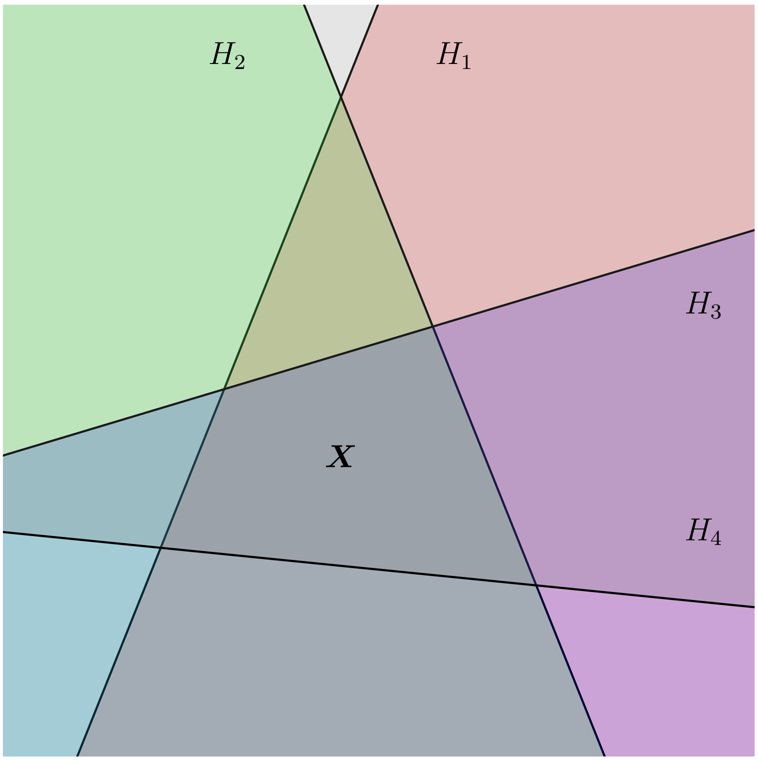
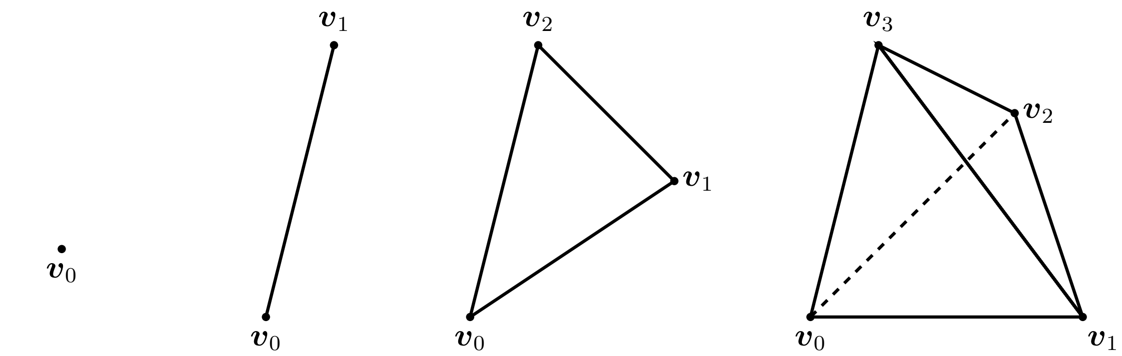


Рис. 1.28: Опуклий лінійний многогранник $\boldsymbol{X}$

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6. Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежної точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливbq, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. 1.29 наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим. Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У



$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ (a) $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ (b) $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ (c) $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ (d)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^0 &= \boldsymbol{v}_0 && - \text{ точка} \\ \boldsymbol{\sigma}^1 &= \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 && - \text{ відрізок від точки } \boldsymbol{v}_0 \text{ до точки } \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}^2 &= \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 && - \text{ повністю весь трикутник} \\ \boldsymbol{\sigma}^3 &= \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3 && - \text{ повністю весь тетраедр} \end{aligned}$$

Рис. 1.29: Деякі симплекси

загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n+1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їх порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$. k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліціальними комплексами*, які будуть визначені в главі **??**, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7. (i) *Множина* $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\})$ *складаються з точок* $\boldsymbol{w}$*, які можна записати у вигляді*

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1. \tag{1.43}$$

(ii) *Множина* $\operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\})$ *складаються з точок* $\boldsymbol{w}$*, які можна записати у вигляді*

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = \\
&= t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) = \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i.
\end{aligned}$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, і тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$. Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). □

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1.43)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1.43}$$

замість того означення, яке ми сформулювали в підрозділі 1.7, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8. Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0, 1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Теорема 1.9.9. *Нехай* $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ *лінійно незалежна точка. Тоді:*

(*i*) *кожну точку* $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ *можна записати єдиним чином у вигляді*

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(*ii*) *кожну точку* $\boldsymbol{w}$ *симплекса* $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ *можна записати єдиним чином у вигляді*

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (*i*) та (*ii*). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a'_i \boldsymbol{v}_i.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} &= \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a'_i \boldsymbol{v}_i = \\
&= \sum_{i=0}^{k} (a_i - a'_i)\, \boldsymbol{v}_i = \\
&= \sum_{i=0}^{k} (a_i - a'_i)\, (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0) + \sum_{i=0}^{k} (a_i - a'_i)\, \boldsymbol{v}_0 = \\
&= \sum_{i=0}^{k} (a_i - a'_i)\, (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} (a_i - a'_i)\, (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0)\,.
\end{aligned}$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} (a_i - a'_i) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a'_i = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже $a_1 = a'_1, a_2 = a'_2, \ldots, a_k = a'_k$, що також означає, що $a_0 = a'_0$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (*ii*) залишаємо читачеві як вправу. □

Означення 1.9.10. Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11. Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4, 0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3, 5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1, 0) + a_1(4, 0) + a_2(3, 3) = (3, 1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис. 1.30).

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Твердження 1.9.12. $a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, *де* $i = 0, \ldots, k$, *для симплекса* $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ *і довільної точки* $\boldsymbol{w}$ *в ньому.*

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f|\colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

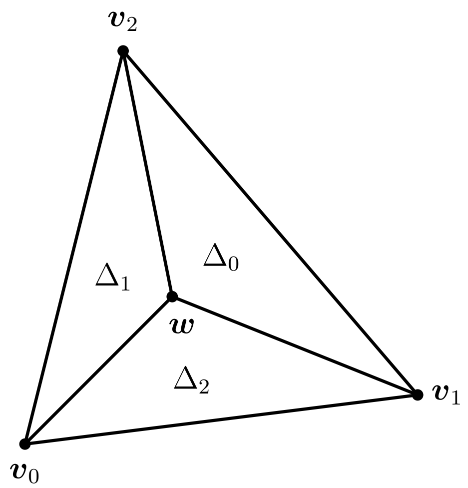


Рис. 1.30: Барицентричні координати та коефіцієнти об'єму

Означення 1.9.13. Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

У розділі **??** ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається симпліціальним відображенням між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їх базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

1.10 Матриці лінійних перетворень

У цьому підрозділі ми нагадаємо деякі важливі поняття з лінійної алгебри. Матеріал цього підрозділу можна знайти в кожному підручнику з лінійної алгебри. Див. також підрозділ 1.2.8.

Означення 1.10.1. $n \times n$-матриця (a_{ij}) над дійсними числами називається *симетричною*, якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх i та j. $n \times n$-матриця (a_{ij}) над комплексними числами називається *ермітовою*, якщо $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ для всіх i та j. Довільна $n \times n$-матриця (a_{ij}) називається *діагональною*, якщо $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq j$.

Сформулюємо більше абстрактне означення визначника квадратної матриці (див. означення 1.2.124).

Означення 1.10.2. Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця. *Визначник матриці* A визначається за формулою

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} (\operatorname{sign}(\sigma)) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

де через $\mathscr{S}_n$ позначено всі всеможливі підстановки множини яка складається з n елементів. Через M_{ij} позначимо $(n-1) \times (n-1)$-матрицю, отриману з матриці A вилученням i-го рядку та j-го стовпця. Детермінант матриці M_{ij} називається *мінором* матриці A. ij-те *алгебраїчне доповнення* A_{ij} визначається так:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

$n \times n$-матриця (A_{ij}), елементами якої є алгебраїчні доповнення, називається *приєднаною матрицею* до матриці A та позначається $\operatorname{adj}(A)$.

Сформулюємо властивості визначника матриці у вигляді теореми без доведення.

Теорема 1.10.3. *Визначник квадратної матриці має такі властивості:*

(1) $\det(A) = \det(A^T)$;

(2) *якщо матриця B отримана з матриці A перестановкою двох рядків (стовпців), то* $\det(B) = -\det(A)$;

(3) *якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то* $\det(A) = 0$;

(4) *якщо матриця A має нульовий рядок (стовпчик), то* $\det(A) = 0$;

(5) *якщо матриці A, A' та A'' однакові, за винятком i-х рядків (стовпців) A_i, A'_i та A''_i, відповідно, і якщо $A_i = aA'_i + bA''_i$, то*

$$\det(A) = a \cdot \det(A') + b \cdot \det(A'');$$

(6) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$;

(7) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$;

(8) *визначник матриці можна розкласти через елементи матриці та її мінори так:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij};$$

(9) обернена матриця A^{-1} *до матриці A визначається з рівняння*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

і вона обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A);$$

(10) *Матриця яка має обернену, і в цьому випадку називається* ***неособливою****, тоді і тільки тоді, коли вона має ненульовий визначник. Матриця, для якої не існує оберненої називається* ***особливою****.*

Означення 1.10.4. Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця. *Слід матриці A* позначається через $\mathrm{tr}(A)$ і визначається за формулою

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Виконується така теорема:

Теорема 1.10.5. *Слід матриці має такі властивості:*

(1) $\mathrm{tr}(a\,A + b\,B) = a\ \mathrm{tr}(A) + b\ \mathrm{tr}(B)$*;*
(2) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*;*
(3) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P)$ *для довільної невиродженої матриці P.*

Означення 1.10.6. Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times m$-матриця. Рядки матриці A можна розглядати як вектори в просторі $\mathbb{R}^m$. *Рядковий ранг матриці A* — це вимір підпростору в $\mathbb{R}^m$, який породжують ці вектори. Подібним чином стовпці матриці A можна розглядати як вектори в просторі $\mathbb{R}^n$. *Стовпцевий ранг матриці A* — це вимір підпростору в $\mathbb{R}^n$, який породжують ці вектори.

Можна довести, що рядковий ранг і стовпцевий ранг матриці збігаються.

Означення 1.10.7. *Ранг матриці* — це спільне значення рядкового рангу або стовпцевого рангу матриці. Матриця $n \times m$ має *максимальний ранг*, якщо її ранг менший за n або m.

Також справджується така теорема.

Теорема 1.10.8. *Ранг матриці — це вимір її найбільшої неособливої квадратної підматриці. Матриця виміру $n \times n$ є неособливою тоді і лише тоді, коли вона має ранг n.*

Передбачається, що читачеві відомо, як матриці використовуються для розв'язування систем лінійних рівнянь вигляду

$$A\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{b}^T,$$

зокрема методом Гусса[5]. Ми не будемо описувати метод Гусса тут, але є певна термінологія, з якою ми стикаємось, коли обговорюється метод, яку ми хочемо записати

[5] Нам потрібно транспонувати вектори, оскільки в цьому курсі лекцій вектори в $\mathbb{R}^n$ трактуються як $1 \times n$-матриці.

задля повноти. Нагадаємо, якщо метод Гауса, застосований до матриці A для отримання верхньотрикутної матриці U, не передбачає перестановки рядків, то матрицю A можна записати у вигляді

$$A = LU,$$

де L — нижньотрикутна матриця, а U — верхньотрикутна матриця. Це зводить нашу систему рівнянь до двох систем

$$L\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{b}^T$$

і

$$U\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{y}^T,$$

які легко розв'язуються. Якщо задіяні перестановки рядків, то вступає в дію ще один множник, і матрицю A можна записати у вигляді

$$A = PLU,$$

де P — матриця перестановок, тобто матриця, отримана з одиничної матриці послідовністю перестановки стовпців та/або рядків.

Означення 1.10.9. Зображення $A = LU$ або $A = PLU$ називаються *LU-розкладами* матриці A.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір, $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення та припустимо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис в $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j.$$

З того, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ утворюють базис у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ випливає, що коефіцієнти a_{ij} визначаються однозначно.

Означення 1.10.10. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею лінійного перетворення* $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ стосовно базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$.

Очевидно, що матриця лінійного перетворення залежить від базису векторного простору, який використовується в означенні матриці. Описати цю залежність достатньо легко.

Означення 1.10.11. Дві $n \times n$-матриці A і B називаються *подібними*, якщо існує невироджена матриця P така, що

$$B = P^{-1}{\cdot}A{\cdot}P.$$

Подібність матриць — це відношення еквівалентності.

Виконується така теорема:

Теорема 1.10.12. *Нехай A — матриця для лінійного перетворення T стосовно фіксованого базису. Матриця B представляє лінійне перетворення T стосовно іншого базису тоді і тільки тоді матриці A і B подібні.*

Однією з причин визначення матриці для лінійного перетворення є те, що вона дозволяє обчислити це перетворення за допомогою множення матриць. Дуже важливо, щоб використовувавати правильну матрицю, а не її транспоновану. З нашим вибором і тим фактом, що наші вектори в $\mathbb{R}^n$ є векторами рядків ($1 \times n$-матрицями), отримавши лінійне перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{1.44}$$

то

$$T(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}A. \tag{1.45}$$

Якби ми вибрали транспоновану матрицю матриці A, то

$$T(\boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{p}^T)^T.$$

Тому різниця між вибором матриці A або її транспонованої полягає в тому, чи хочемо ми попередньо або потім помножити вектори на матриці. Немає значення, що з них вибирати, головне, щоб було все сумісним. Щоб добуток матриць узгоджувався з дією перетворення, ми повинні взяти до уваги таке:

> **Наш вибір матриць такий, що завжди потрібно попередньо перемножувати вектори!**

Таким чином ми уникаємо надмірних операцій транспонування при написанні формул. Вони були б потрібні, оскільки існує різниця між вектором-рядком і вектором-стовпцем. Наші вектори є векторами-рядками.

Важливе зауваження! Якщо не вказано інше, матриця для лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ завжди буде визначатися щодо стандартної бази. Крім того, з цим припущенням можна потім використовувати рівняння (1.45), щоб визначити бієктивну відповідність між матрицями та такими лінійними перетвореннями. Ця відповідність, яку ми матимемо на увазі, нам буде потрібна для переходу від матриць до перетворень і навпаки.

Безпосередньо з означення матриці лінійного перетворення випливає така теорема:

Теорема 1.10.13. *Нехай $T, T_1, T_2\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ лінійні перетворення та припустимо, що A, A_1, A_2 — матриці для лінійних перетворень T, T_1, T_2, відповідно, стосовно деякого фіксованого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Тоді:*

(1) *A^{-1} — матриця для перетворення T^{-1};*
(2) *A_2A_1 — матриця для перетворення T_1T_2.*

Означення 1.10.14. Нехай A — матриця лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$. Тоді:

- детермінант матриці A називається *детермінантом перетворення* T і позначається $\det(T)$;
- слід матриці A називається *слідом перетворення* T і позначається $\mathrm{tr}(T)$;
- ранг матриці A називається *рангом перетворення* T і позначається $\mathrm{rank}(T)$.

Доведення наступних двох теорем нескладне, однак ми їх опускаємо.

Теорема 1.10.15. *Детермінант, слід і ранг лінійного перетворення* $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *залежить лише від відображення* T *і не залежить від вибору базису лінійного простору* $\boldsymbol{V}$.

Теорема 1.10.16. *Лінійне перетворення* $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *є невиродженим тоді і лише тоді, коли* $\det(T) \neq 0$.[6]

[6]Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо матриця, яка йому відповідає невироджена (вироджена).

1.11 Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1. Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1.46}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1.46) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathsf{k}^n \to \mathsf{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2. *Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.*

Означення 1.11.3. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим* або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4. *Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.*

Теорема 1.11.5. *Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні.*

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{1.47}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (1.47), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \\ &= T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m.\end{aligned} \tag{1.48}$$

З рівності (1.47) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (1.48), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}\end{aligned}$$

За припущенням індукції вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ є лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (1.47) випливає, що $a_m = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. □

Наслідок 1.11.6. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.*

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачою для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7. *Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.*

Означення 1.11.8. Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{1.49}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9. *Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.*

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10. *Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.*

Приклад 1.11.11. Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ 3x - 3y &= 0, \end{aligned}$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$\begin{aligned} 3x + y &= 0, \\ 3x + y &= 0, \end{aligned}$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12. *Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$*;*
(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$*;*
(3) *якщо* $n = 2$*, то*
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$

є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (1.49). Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). $\square$

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13. *Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли*

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

1.12 Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S,T\in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a\in\mathsf{k}$, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a\cdot(S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

Теорема 1.12.1. *Відображення*

$$S+T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W} \qquad \textit{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

Означення 1.12.2. Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V}\to\mathsf{k}$ називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*\colon \boldsymbol{V}\to\mathsf{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i=j;\\ 0, & \text{якщо } i\neq j.\end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

Теорема 1.12.3. *Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$ є ізоморфізмом лінійних просторів.*

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.12.4. Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, i-й елемент дуального базису просто виділяє i-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

Теорема 1.12.5. *Нехай* $\boldsymbol{V}$ *і* $\boldsymbol{W}$ *— векторні простори над полем* $\boldsymbol{k}$ *і* $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *— лінійне перетворення. Відображення*

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \textit{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

Означення 1.12.6. Відображення T^*, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення T.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

Теорема 1.12.7. *Відображення* $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ *є ізоморфізмом векторних просторів.*

Означення 1.12.8. Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $\boldsymbol{V}$ та його двічі дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$ залежав від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$, однак ізоморфізм між лінійними простором $\boldsymbol{V}$ та його другим дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

1.13 Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цього підрозділу — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Лема 1.13.1. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем $\boldsymbol{k}$. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{k}$ — ненульовий лінійний функціонал, то*

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. □

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Теорема 1.13.2. *Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем $\boldsymbol{k}$ з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що*

$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\vec{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n - 1$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\vec{\boldsymbol{u}}_0)}\,\vec{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[7]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, ми отримуємо, що

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. □

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3. Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Лема 1.13.4. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова*

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. □

Лема 1.13.5. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.*

[7] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\vec{\boldsymbol{v}} + b\,\vec{\boldsymbol{w}}) &= T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\vec{\boldsymbol{v}} + b\,\vec{\boldsymbol{w}}) = \\ &= a\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}} + b\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) + b\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}}) = \\ &= \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}})) + \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\vec{\boldsymbol{v}} + b\,\vec{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. □

Означення 1.13.6. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову*

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема 1.13.8. *Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.*

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. □

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9. *Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.*

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10. *Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.*

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}).$$

Позаяк $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq 0$ і $\lambda = \overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. □

Лема 1.13.11. *Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді*

(1) *характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;*

(2) *власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.*

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \mu\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \mu\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mu(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ ортогональні. □

Теорема 1.13.12 (**теорема про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду**). *Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$,*

$n \geqslant 1$. *Тоді в просторі* $\boldsymbol{V}$ *існує ортонормований базис* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, *складений з власних векторів лінійного перетворення* T *таких, що*

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n-1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^\perp$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^\perp$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^\perp}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^\perp$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^\perp$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. □

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13. *Якщо* A *— дійсна симетрична* $n \times n$*-матриця, то існує ортогональна матриця* P *така, що* $D = P^{-1}AP$ *є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.*

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. □

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r - s$ від'ємні елементи, а потім $n - r$ — нулів.

Приклад 1.13.14. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (1,1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (1,-1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Якщо матриця P складена з векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ як із стовпців, то

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad P^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.13.15. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\begin{aligned}\det(tI_3 - A) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \\ &= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) = \\ &= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 = \\ &= (t-1)^2(t-4)\end{aligned}$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y-z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$. Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1,1,1)$. Нехай

$$\vec{\boldsymbol{u}}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Нарешті, якщо стовпцями матриці P є власні вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.13.16. Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Для комплексного випадку справджується така теорема:

Теорема 1.13.17 (теорема про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду). *Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що*

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \vec{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18. *Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.*

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

1.14 Білінійні та квадратичні відображення

У цьому розділі описані деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратними формами. Інші застосування можна знайти у розділах **??** та **??**.

Означення 1.14.1. *Білінійним відображенням* на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\to\mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}',\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}})+b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}',\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$;
(1) $f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},a\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}')=a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}})+b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}',\overrightarrow{\boldsymbol{w}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}}'\in\boldsymbol{V}$ і $a,b\in\mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2. Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3. Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4. Нехай A — $n\times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\cdot A\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5. Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Означення 1.14.6. Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B}=(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij}=f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A=(a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B}=(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i=x_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1+x_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2+\cdots+x_n\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) &= f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j\Big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \end{aligned}$$

тобто,

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Останню рівність перепишемо у вигляді

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7. *Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то*

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j.$$

Доведення. Якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{\boldsymbol{v}}'_i = x'_1 \vec{\boldsymbol{v}}'_1 + x'_2 \vec{\boldsymbol{v}}'_2 + \cdots + x'_n \vec{\boldsymbol{v}}'_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \vec{\boldsymbol{v}}'_i = y'_1 \vec{\boldsymbol{v}}'_1 + y'_2 \vec{\boldsymbol{v}}'_2 + \cdots + y'_n \vec{\boldsymbol{v}}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{\boldsymbol{v}}'_1, \vec{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}'_n)$. Тоді

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C \qquad \text{і} \qquad (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T.$$

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T &= f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. □

Означення 1.14.8. Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9. *Матриця білінійного відображення єдина точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.*

Означення 1.14.10. *Ранг* білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести читачеві як вправу.

Твердження 1.14.11. *Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.*

Означення 1.14.12. *Квадратичним відображенням* на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Приклад 1.14.13. Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2[8] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) - q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - q(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття “симетричне білінійне відображення” і “квадратичне відображення” насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

Вигляд квадратного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14. *d-адичною формою* над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

[8] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ вище описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення".

Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду). *Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд*

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \qquad \text{де} \quad \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратної форми. □

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16. *Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.*

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.

Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.

Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму. □

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17. Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^TF^TG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що
$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили.

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18. *Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.*

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. □

1.15 Ще трішки про векторний добуток

У підрозділі 1.7 ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Теорема 1.15.1. *Нехай $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою*

$$T(\vec{w}) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w}$ для всіх $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Означення 1.15.2. В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$.

Твердження 1.15.3. *Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:*

(1) *узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто*
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma) \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) *узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто*
$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} &= a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \\ \vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}'_i) \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} &= (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ &\quad + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}'_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}); \end{aligned}$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ *для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;*

(4) *якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис*
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Властивості (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\vec{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1.

Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

справджується для всіх векторів $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\vec{w}$ збігається з вектором $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1.50) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8. □

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести читачеві самостійно.

Твердження 1.15.4. *У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою* (1.41)*:*

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)\,, \tag{1.41}$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо читачеві довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5. *Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:*

(1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$, *де θ – кут між векторами $\vec{u}$ та $\vec{v}$;*
(2) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$ *і* $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$*;*
(3) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$*;*
(4) $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_2)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1)$*,*

де $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Одна з геометричних інтерпретацій рівності (3) у твердженні 1.15.5 полягає в тому, що векторний добуток вимірює відхилення від рівності нерівності Коші–Шварца у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Приклад 1.15.6. Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

1.16 Узагальнені обернені матриці

Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^+\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис. 1.31). Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не

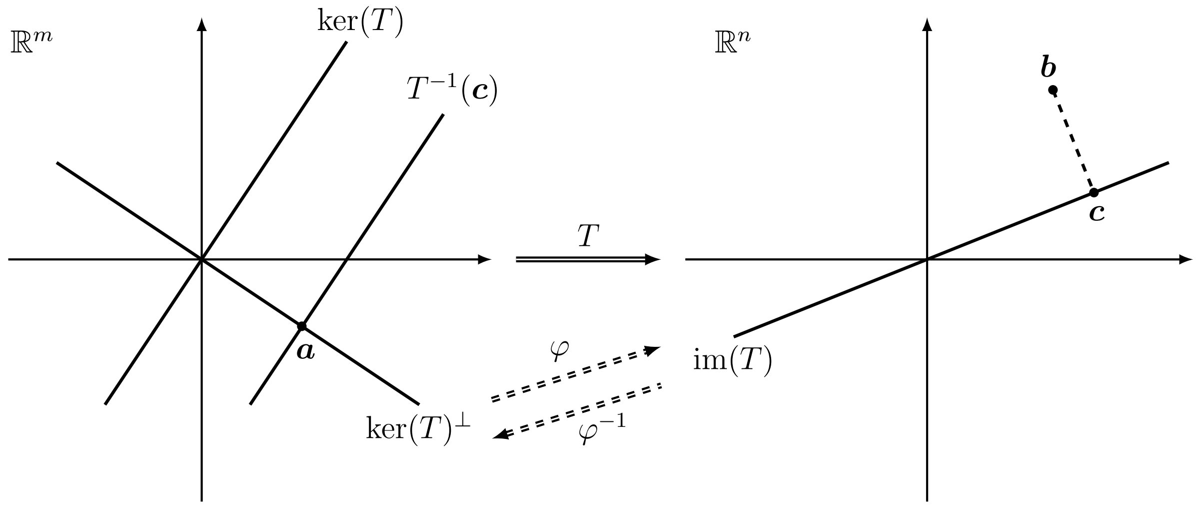


Рис. 1.31: Геометрія узагальненого оберненого відображення

належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T сюр'єктивне, але образ $\operatorname{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$. Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \operatorname{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$ (див. теорему **??**). Якщо лінійне відображення T є сюр'єктивним, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp\colon\ \ker(T)^\perp \to \operatorname{im}(T).$$

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^+(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1. Відображення T^+ називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2. *Відображення T^+ коректно визначене та T^+ є лінійним відображенням.*

Приклад 1.16.3. Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою $T(x, y) = x - y$. Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис. 1.32). Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$,

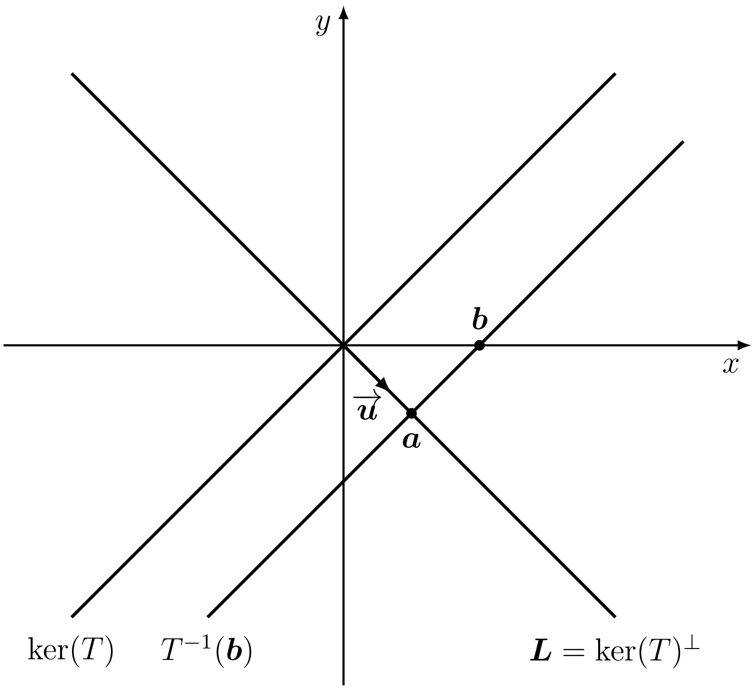


Рис. 1.32: Обчислення узагальненого оберненого відображення в прикладі 1.16.3

яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^+(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$. Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b, 0))\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \frac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ прямої $\boldsymbol{L}$ (див. теореми 1.6.12 і **??**). Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4. $m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереноного відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереноною матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5. (1) *Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:*

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^T = A^+A \quad і \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

(2) *Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови* (1)*, тобто, якщо матриця G задовольняє умови*

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (GA)^T = GA \quad і \quad (AG)^T = AG,$$

то $G = A^+$.

Доведення теореми 1.16.5 можна знати в статті Пенроуза [4] або монографіях [5,6].

Наслідок 1.16.6. (1) *Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то*

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T.$$

(2) *Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то*

$$A^+ = A^T(A^TA)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що A^TA є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^TA)^{-1}A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. □

Приклад 1.16.7. Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3.

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1.51}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1.51), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

Метод найменших квадратів: для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}}A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{1.52}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (1.52) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m - x_{m+1} = 0 \tag{1.53}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8. *Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою*

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. □

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (1.53), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Метод найменших квадратів: для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ та $(1, 3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x = 0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0, 0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (1.53).

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у “більшості” випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (1.53).

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{1.54}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (1.54), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ рівняння (1.54) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (1.54) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1.51), і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8 і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\boldsymbol{a}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Ми завершимо цей підрозділ двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9. *Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рангу r. Тоді існують дійсна ортогональна $m\times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n\times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця*

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{1.55}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в монографіях [2,5].

Означення 1.16.10. Розклад матриці A в рівності (1.55) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці A*.

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \vec{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11. *Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (1.55), то*

$$A^+ = V D^+ U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dfrac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. $\square$

1.17 Вправи

Підрозділ 1.2.5

Вправа 1.17.1. Доведіть властивості комплексних чисел (1) – (6).

Вправа 1.17.2. Дано п'ять комплексних чисел:

$$z_1 = 9, \quad z_2 = -2 - i2, \quad z_3 = -2 + i8, \quad z_4 = -i12, \quad z_5 = 12 + i3.$$

Знайдіть:

(1) $\mathrm{Re}(z_i)$ і $\mathrm{Im}(z_i)$ для кожного $i = 1, \ldots, 5$;

(2) $\overline{z_i}$ і $|z_i|$ для кожного $i = 1, \ldots, 5$;

(3) $z_i + z_j$ для всіх $i, j = 1, \ldots, 5$;

(4) $z_i - z_j$ для всіх $i, j = 1, \ldots, 5$;

(5) $z_i \cdot z_j$ для всіх $i, j = 1, \ldots, 5$;

(6) $\dfrac{z_i}{z_j}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, 5$.

Вправа 1.17.3. Запишіть у тригонометричній формі такі комплексні числа:

(1) 5;
(2) i;
(3) -2;
(4) $-3i$;
(5) $1 - i$;
(6) $-1 - i$;
(7) $1 + i\sqrt{3}$;
(8) $-1 + i\sqrt{3}$;
(9) $\sqrt{3} - i$;
(10) $1 - (2 + \sqrt{3})i$;
(11) $\cos\alpha - i\sin\alpha$;
(12) $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
(13) $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$;
(14) $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 + i}$.

Вправа 1.17.4. Доведіть, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2));$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Вправа 1.17.5. Обчисліть:

(1) $(1+i)^{100}$;
(2) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{150}$;
(3) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{30}$;
(4) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$;
(5) $(-8+12i)^3$;
(6) $(1-i)^{17}$;
(7) $(-1-i)^{-5}$;
(8) $(1+i)^8$;
(9) $\sqrt[3]{i}$;
(10) $\sqrt[6]{1}$;
(11) $\sqrt[4]{-1}$;
(12) $\sqrt[6]{64}$;
(13) $\sqrt[3]{2-2i}$;
(14) $\sqrt[3]{1+i}$;
(15) $\sqrt[6]{-i}$;
(16) $\sqrt[5]{-32i}$.

Підрозділ 1.2.6

Вправа 1.17.6. Методом Гаусса розв'яжіть системи лінійних рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Вправа 1.17.7. Методом Йордана–Гаусса розв'яжіть системи лінійних рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + \ \ x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Підрозділ 1.2.7

Вправа 1.17.8. Доведіть, що для довільного натурального числа n множина $\mathbb{R}^n$ є лінійним простором над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

Вправа 1.17.9. Доведіть, що для довільного натурального числа n множина $\mathbb{C}^n$ є лінійним простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Вправа 1.17.10. Доведіть, що для довільного натурального числа n множина $\mathbb{C}^n$ є лінійним простором над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

Вправа 1.17.11. Поясніть чому множина $\mathbb{C}^n$ над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не є лінійним підпростором в $\mathbb{C}^n$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, де n — довільне натуральне число.

Вправа 1.17.12. Нехай $\boldsymbol{F}[\mathbb{R}]$ — множина всіх функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ операціями поточкового додавання функцій та множення їх на скаляр $c \in \mathbb{R}$:

$$f + g, c \cdot f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

за формулами

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{і} \qquad (c \cdot f)(x) = c \cdot (f(x)).$$

Позначимо:

(*a*) $\boldsymbol{C}[\mathbb{R}]$ — множина всіх неперервних функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$;

(*b*) $\boldsymbol{F}_0[\mathbb{R}]$ — множина всіх функцій $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $f(0) = 0$;

(*c*) $\boldsymbol{C}_0[\mathbb{R}]$ — множина всіх неперервних функцій $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $f(0) = 0$;

(*d*) $\boldsymbol{F}_2[\mathbb{R}]$ — множина всіх функцій $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $f(2) = 0$;

(*e*) $\boldsymbol{C}_2[\mathbb{R}]$ — множина всіх неперервних функцій $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $f(2) = 0$;

(*f*) $\mathbf{Const}[\mathbb{R}]$ — множина всіх функцій $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, що $f(x) = C = \text{const}$ — стала функція, $C \in \mathbb{R}$.

Доведіть такі твердження:

(1) $\boldsymbol{F}[\mathbb{R}]$ — векторний простір над полем $\mathbb{R}$;

(2) $\boldsymbol{C}[\mathbb{R}]$, $\boldsymbol{F}_0[\mathbb{R}]$, $\boldsymbol{C}_0[\mathbb{R}]$, $\boldsymbol{F}_2[\mathbb{R}]$, $\boldsymbol{C}_2[\mathbb{R}]$, $\mathbf{Const}[\mathbb{R}]$ — векторні підпростори в $\boldsymbol{F}[\mathbb{R}]$ над полем $\mathbb{R}$;

(3) $\boldsymbol{C}_0[\mathbb{R}]$, $\boldsymbol{C}_2[\mathbb{R}]$, $\mathbf{Const}[\mathbb{R}]$ — векторні підпростори в $\boldsymbol{C}[\mathbb{R}]$ над полем $\mathbb{R}$;

(4) для довільного дійсного числа a відображення $F\colon \boldsymbol{F}[\mathbb{R}]\to\mathbb{R}$, означене за формулою $F(f) = f(a)$ є лінійним оператором;

(5) для довільного дійсного числа a відображення $F\colon \boldsymbol{C}[\mathbb{R}]\to\mathbb{R}$, означене за формулою $F(f) = f(a)$ є лінійним оператором;

(6) для довільного дійсного числа a відображення $F\colon \mathbf{Const}[\mathbb{R}]\to\mathbb{R}$, означене за формулою $F(f) = f(a)$ є ізоморфізмом лінійних просторів $\mathbf{Const}[\mathbb{R}]$ і $\mathbb{R}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Вправа 1.17.13. Доведіть, що два вектори $(1, 2)$ і $(2, 1)$ є лінійно незалежними в просторі $\mathbb{R}^2$ (над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$), а отже є базою в ньому.

Вправа 1.17.14. Доведіть, що два вектори $(1, 2)$ і $(-1, -1)$ є лінійно незалежними в просторі $\mathbb{R}^2$ (над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$), а отже є базою в ньому.

Вправа 1.17.15. Опишіть лінійну оболонку вектора $(1, 2)$ в просторі $\mathbb{R}^2$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Вправа 1.17.16. Опишіть лінійну оболонку векторів $(1, 2)$ і $(-5, -10)$ в просторі $\mathbb{R}^2$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Перевірити ці вектори на лінійну залежність.

Підрозділ 1.2.8

Вправа 1.17.17. Знайдіть ранг матриці

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Вправа 1.17.18. Знайдіть методом Йордана-Гуасса обернену матрицю до матриці

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вправа 1.17.19. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} \ \ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Підрозділ 1.2.10

Вправа 1.17.20. Розв'язати методом Крамера систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Вправа 1.17.21. Обчислити визначник, використовуючи тільки означення та розкладання за елементами рядка або стовпчика.

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \qquad 2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ a & 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & a & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Підрозділ 1.4

Вправа 1.17.22. Припустимо, що рівняння

$$ax + by = c \qquad \text{і} \qquad a'x + b'y = c'$$

визначають одну і ту ж пряму $\boldsymbol{L}$. Доведіть, що $a' = sa$, $b' = sb$ і $c' = sc$ для деякого ненульового дійсного числа s.

Вправа 1.17.23. Доведіть, що рівняння прямої через точку та напрямний вектор і звичайне рівняння прямої на площині узгоджуються.

Вправа 1.17.24. Запишіть рівняння прямої, яка відтинає відрізок $b = 3$ і має кутовий коефіцієнт:

1) $k = 1$;
2) $k = -1$.

Вправа 1.17.25. Запишіть рівняння прямої, яка відтинає відрізок $b = -13$ і має кутовий коефіцієнт:

1) $k = \frac{1}{4}$;
2) $k = -\frac{1}{5}$.

Вправа 1.17.26. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт:

1) $k = 1$;
2) $k = -1$;
3) $k = \frac{1}{4}$;
4) $k = -\frac{1}{5}$.

Вправа 1.17.27. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $\boldsymbol{p} = (-2, 3)$.

Вправа 1.17.28. Запишіть рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок таких прямих:

1) $2x - 3y = 6$;
2) $2x + 3y = 0$;
3) $y = -3$;
4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Вправа 1.17.29. Запишіть рівняння всіх прямих на площині, які проходять через точку $\boldsymbol{p} = (2, 3)$.

Вправа 1.17.30. Запишіть параметричне рівняння прямої на площині, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2)$ і $\boldsymbol{q} = (-11, -1)$.

Вправа 1.17.31. Запишіть параметричне рівняння прямої в $\mathbb{R}^3$, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 1, 2)$ і $\boldsymbol{q} = (-1, -1, -1)$.

Вправа 1.17.32. Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -1-t \end{array} \qquad \boldsymbol{L}_2: \begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = -2-t. \end{array}$$

Вправа 1.17.33. Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \begin{array}{l} x = 5-4t \\ y = 6+8t \\ z = -6+2t \end{array} \qquad \boldsymbol{L}_2: \begin{array}{l} x = -33+6t \\ y = 12+2t \\ z = 3-t. \end{array}$$

Вправа 1.17.34. Доведіть, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$ для довільних $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$.

Вправа 1.17.35. Нехай $a, b \in \mathbb{R}$ з $a \leqslant b$. Доведіть, що інтервал $[a, b]$ складається з тих ж самих чисел, як і відрізок $[a, b]$, де a і b розглядаються як вектори. Різниця між відрізком і інтервалом в $\mathbb{R}$ полягає в тому, що інтервал $[a, b]$ за означенням є порожнім, якщо $b < a$, у той же час це не так у випадку для відрізка. Зокрема, для відрізка (в $\mathbb{R}^1$) маємо $[a, b] = [b, a]$.

Вправа 1.17.36. Розглянемо лінію $\boldsymbol{L}$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}(1, -1, 0)$ з напрямним вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (-1, -1, 2)$. Знайдіть дві точки на прямій $\boldsymbol{L}$, які розташовані на відстані 2 від точки $\boldsymbol{q}(0, -2, 2)$.

Підрозділ 1.5

Вправа 1.17.37. Знайдіть косинуси кутів між наступними парами векторів. Які пари векторів є перпендикулярними? і які є паралельними?

(a) $(3, 1), (1, 3)$; (b) $(1, 2), (-4, 2)$; (c) $(1, 2), (-4, -8)$;
(d) $(-3, 0), (2, 1)$.

Вправа 1.17.38. Перевірити чи пари векторів є ортогональними.

(a) $(2, 3, 1), (3, 1, -9)$; (b) $(1, 2, 0), (2, -1, 10)$.

Вправа 1.17.39. Знайти значення числа a при якому вектори $(2, 4, 1)$ і $(a, 1, -8)$ будуть ортогональними.

Вправа 1.17.40. У $\mathbb{R}^4$ дано базис:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \vec{\boldsymbol{e}}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \vec{\boldsymbol{e}}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Знайдіть напрямні косинуси векторів: $\vec{\boldsymbol{a}} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (2, -2, 3, -50)$.

Підрозділ 1.6

Вправа 1.17.41. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів:

(1) $\vec{\boldsymbol{b}}_1 = (1,1,0,0)$, $\vec{\boldsymbol{b}}_2 = (0,1,1,0)$, $\vec{\boldsymbol{b}}_3 = (0,0,1,1)$;

(2) $\vec{\boldsymbol{b}}_1 = (1,1,1,0)$, $\vec{\boldsymbol{b}}_2 = (0,1,1,0)$, $\vec{\boldsymbol{b}}_3 = (0,-1,-1,-1)$;

(3) $\vec{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,1,0)$, $\vec{\boldsymbol{b}}_2 = (1,2,3,4)$, $\vec{\boldsymbol{b}}_3 = (0,1,1,1)$.

Вправа 1.17.42. Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів $\vec{\boldsymbol{b}}_1$, $\vec{\boldsymbol{b}}_2$, $\vec{\boldsymbol{b}}_3$ в $\mathbb{R}^4$ з вправи 1.17.41 і $\vec{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(i) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(ii) Знайдіть ортогональну проекцію $\vec{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\vec{\boldsymbol{b}}_i}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\vec{\boldsymbol{b}}_i$ для всіх $i = 1,2,3$.

(iii) Знайдіть ортогональна доповнення $\vec{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\vec{\boldsymbol{b}}_i}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\vec{\boldsymbol{b}}_i$ для всіх $i = 1,2,3$.

(iv) Знайдіть ортогональну проекцію $\vec{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(v) Знайдіть ортогональна доповнення $\vec{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\vec{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Завдання стосується всіх випадків (1), (2) і (3) вправи 1.17.41.

Вправа 1.17.43. Знайдіть ортогональну проекцію вектора $(1,2,-3)$ на вектор $(3,3,-1)$.

Вправа 1.17.44. Знайдіть ортогональна доповнення вектора $(1,2,-3)$ стосовно вектора $(3,3,-1)$.

Вправа 1.17.45. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, знайдіть ортонормовану базу для підпростору, який є лінійною оболонкою векторів: $(1,2-3)$, $(1.-2.-1)$, $(3,3,-1)$.

Вправа 1.17.46. Покажіть, що у рівності (1.31) теореми 1.6.12 не можна ортонормовану базу $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ замінити на базу, яка складається з одиничних векторів, чи з ортогональних векторів. Для цього розгляньте вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Його ортогональна проекція на підпростір $\mathbb{R}^2$ породжений векторами

(1) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = (1,0,0)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; чи

(2) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = (2,0,0)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = (0,4,0)$.

дорівнює $(1,2,0)$, але формула

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\mathbb{R}^2} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$$

не виконується.

Підрозділ 1.7

Вправа 1.17.47. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ і

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} = \{\boldsymbol{q} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\},$$

де $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ та $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — k-вимірні векторні підпростори в $\mathbb{R}^n$. Доведіть, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$.

Вправа 1.17.48. Доведіть, що дві прямі в $\mathbb{R}^2$ є паралельними тоді і тільки тоді, коли вони мають паралельні напрямні вектори.

Вправа 1.17.49. Нехай $\boldsymbol{L}$ і $\boldsymbol{L}'$ — прямі в $\mathbb{R}^2$, які визначаються рівняннями

$$ax + by = c \qquad \text{і} \qquad a'x + b'y = c',$$

відповідно. Доведіть, що прямі $\boldsymbol{L}$ і $\boldsymbol{L}'$ паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$a' = ka \qquad \text{і} \qquad b' = kb$$

для деякої ненульового числа k.

Вправа 1.17.50. Знайдіть базу для площини $x + y + z = 12$ в $\mathbb{R}^3$.

Вправа 1.17.51. Знайдіть рівняння всіх площин у $\mathbb{R}^3$, які ортогональні до вектора $(-1,-2,-3)$.

Вправа 1.17.52. Знайдіть рівняння площини у $\mathbb{R}^3$, яка містить точки $(-1,-2,-3)$, $(1,2,0)$ і $(1,1,1)$.

Вправа 1.17.53. Знайдіть рівняння площини у $\mathbb{R}^3$, яка містить точку $(-1,-2,-1)$ і паралельна до площини, яка визначається рівнянням

$$x + z = 7.$$

Вправа 1.17.54. Знайдіть рівняння площин у $\mathbb{R}^3$, які містить точку $(-1, -2, -1)$ і ортогональні до площини, яка визначається рівнянням

$$x + z = 7.$$

Вправа 1.17.55. Знайдіть ортонормований базис для площини $x+z = 2$.

Вправа 1.17.56. Нехай $\boldsymbol{X}$ — площина, визначена рівнянням

$$x + 2y + z = 4.$$

Нехай $v = (2, 1, 9)$ вектор. Знайдіть:

(*a*) ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на $\boldsymbol{X}$;

(*b*) ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$.

Вправа 1.17.57. Знайдіть точково-нормальне рівняння для для прямої

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3; \\ y &= 4t; \\ z &= 2 + t. \end{aligned}$$

Вправа 1.17.58. Перевірте, чи півплощини $3x - 2y \leqslant 0$, $2x - y - 2 \leqslant 0$ і $x - 2y + 2 \leqslant 0$ мають непорожній перетин, чи ні.

Підрозділ 1.8

Вправа 1.17.59. Доведіть лему 1.8.3.

Вправа 1.17.60. Доведіть лему 1.8.8.

Вправа 1.17.61. Визначте, чи такі пари впорядкованих базисів $\mathbb{R}^2$ визначають однакову орієнтацію:

(*a*) $((1, -2), (-3, 2))$ і $((1, 0), (-2, 3))$;

(*b*) $((-1, 1), (1, 2))$ і $((1, -2), (1, -4))$.

Розв'яжіть цю вправу двома способами: спочатку використовуйте лише визначення орієнтації, а потім перевірте свою відповідь, використовуючи матричний підхід леми 1.8.8.

Вправа 1.17.62. Чому “Чи $((1, -2), (-2, 4))$ індукує стандартну орієнтацію площини?” безглузде питання?

Вправа 1.17.63. (a) Знайдіть такий вектор (a, b), щоб базис $((-2, -3), (a, b))$ визначав стандартну орієнтацію площини.

(b) Знайдіть вектор (a,b,c) так, щоб базис $((2, -1,0), (-2, -1,0), (a,b,c))$ визначав стандартну орієнтацію 3-х вимірного простору.

Вправа 1.17.64. Доведіть, що кут між орієнтованими гіперплощинами $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ і $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau})$ коректно визначений. Зокрема, доведіть, що це не залежить від вибору нормальних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n$ для $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ в означенні.

Вправа 1.17.65. Нехай $\boldsymbol{L}$ — орієнтована пряма і нехай $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ — дві точки на прямій $\boldsymbol{L}$.. Доведіть, що

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}\| = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}; \\ |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|, & \text{якщо вектор } \boldsymbol{pq} \text{ індукує ту ж саму ірієнтацію на } \boldsymbol{L}; \\ -|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|, & \text{якщо вектор } \boldsymbol{pq} \text{ індукує протилежну ірієнтацію на } \boldsymbol{L}. \end{cases}$$

Вправа 1.17.66. Нехай $((\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\sigma})$ і $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\tau})$ — два орієнтовані n-вимірні векторні простори і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — невироджене лінійне відображення. Доведіть, що T зберігає орієнтацію, якщо

$$\boldsymbol{\tau} = [T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1), T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2), \ldots, T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)]$$

для довільного одного впорядкованого базису $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ з властивістю $\boldsymbol{\sigma} = [\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n]$.

Підрозділ 1.9

Вправа 1.17.67. Доведіть, що кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ є опукла множина.

Вправа 1.17.68. Доведіть, що перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ є опукла множина.

Вправа 1.17.69. Доведіть, якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Вправа 1.17.70. Доведіть, що $\operatorname{conv}([\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_1]) = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_1]$.

Вправа 1.17.71. Нехай $\boldsymbol{\sigma}$ — двовимірний симплекс, визначений вершинами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_0 = (-2, -1)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (3, 0)$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (0, 2)$. Точки симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ можна описати як декартовими, так і барицентричними координатами (відносно вершин, перелічених у наведеному вище порядку).

(a) Знайдіть декартові координати точки $\boldsymbol{p}$, баріцентричні координати якої є $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}\right)$.

(b) Знайдіть барицентричні координати точки $\boldsymbol{q}$, декартові координати якої $(0,0)$.

Вправа 1.17.72. Доведіть, що симпліциальне відображення з 1-симплексу $[2,5]$ до 1-симплексу $[3,7]$, що відображає 2 в 3 і 5 у 7, узгоджується зі "стандартним" лінійним відображення між інтервалами, а саме:

$$g(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Вправа 1.17.73. Узагальніть вправу 1.17.72 і доведіть, що симпліциальне відображення з $[a,b]$ в $[c,d]$ узгоджується зі стандартним лінійним відображенням.

Підрозділ 1.13

Вправа 1.17.74. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Вправа 1.17.75. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Підрозділ 1.14

Вправа 1.17.76. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть невироджену матрицю P таку, щоб PAP^T була діагональною матрицею.

Підрозділ 1.15

Вправа 1.17.77. Доведіть твердження 1.15.4.

Підказка. Спочатку доведіть, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3$ — стандартний базис в просторі $\mathbb{R}^3$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3$, $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3 = -\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2 \times \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3 = \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1$.

Вправа 1.17.78. Доведіть твердження 1.15.5.

Примітка: Властивості буде важко довести, якщо використати означення та основні властивості детермінантів. Це ще раз демонструє, наскільки цінним є гарне означення, оскільки деякі підручники, особливо з фізичних наук, мають дуже безладні стосунки з векторними добутками. Незважаючи на те, що наша інтуїція підводить нас до корисних концепцій, як правило, це гарна ідея не зупинятись на початковому розумінні, а вимагає досліджувати трохи далі та реально фіксувати їхню сутність.

Вправа 1.17.79. Доведіть, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3$ — ортогональні одиничні вектори, то

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}.$$

Вправа 1.17.80. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$. Доведіть такі рівності:[9]

(a) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix}$;

(b) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

[9] Рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ називається *мішаним добутком* векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$.

Розділ 2

Афінна геометрія

2.1 Огляд

Наступні два розділи стосуються аналітичних та геометричних властивостей деяких важливих перетворень n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. У цьому розділі розглядається група афінних перетворень і дві її важливі підгрупи, група подібностей та група рухів. Аффінні перетворення — це перетворення, що зберігають паралельність. Схожими є афінні перетворення, що зберігають кути. Рухи є подібностями, що зберігає відстань, і їх вивчення еквівалентно вивченню метричних властивостей евклідового простору. Як історичне зауваження, це зведення геометричних задач до алгебричних (а саме дослідження певних груп у нашому випадку) було ініційоване німецьким математиком Феліксом Кляйном у Ерлангенській програмі наприкінці XIX-го століття.

За винятком деяких означень і кількох основних фактів, перша частина розділу (підрозділи 2.2–2.4) зосереджена на важливому окремому випадку площини $\mathbb{R}^2$. Зображення великої кількості деталей представлено у площинному випадку, де легше малювати зображення, повинно полегшити розуміння того, що відбувається у вищих вимірах, оскільки узагальнення, за великим рахунком, прості.

2.2 Рух

Означення 2.2.1. Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.2.2. (1) *Рухи зберігають відношення "між".*[1]

(2) *Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.*

(3) *Рухи відображають прямі в прямі.*

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C'}$ розташована між точками $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$. Тоді маємо, що

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right| &= \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \\ &= \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}\right| = \\ &= \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C'B'}}\right|.\end{aligned}$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) теореми випливають безпосередньо з твердження (1). □

Лема 2.2.3. *Нехай M — рух. Якщо*

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

[1] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$

Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Випадок 2. $1 < t$.
Випадок 3. $t < 0$.

У випадку **1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A'} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A'} - t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$$

є розв'язками рівняння

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'X'}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$

З них лише точка $\boldsymbol{X'}$ лежить між точками $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C'} = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. □

Лема 2.2.4. *Нехай $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.*

Доведення. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ — напрямні вектори прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно (див. рис. 2.1). Ці вектори лінійно незалежні, оскільки прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ не є паралельними. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{C}} + a\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}_1$ з $a > 0$ і нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{A}$. Для того, щоб знати точку перетину прямих $\boldsymbol{L}$ і $\boldsymbol{L}_2$ необхідно розв'язати рівняння

$$\boldsymbol{P} + s\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} = \boldsymbol{C} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 - t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (1-s)\overrightarrow{\boldsymbol{PC}}. \tag{2.1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (2.1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P} + s\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}$. □

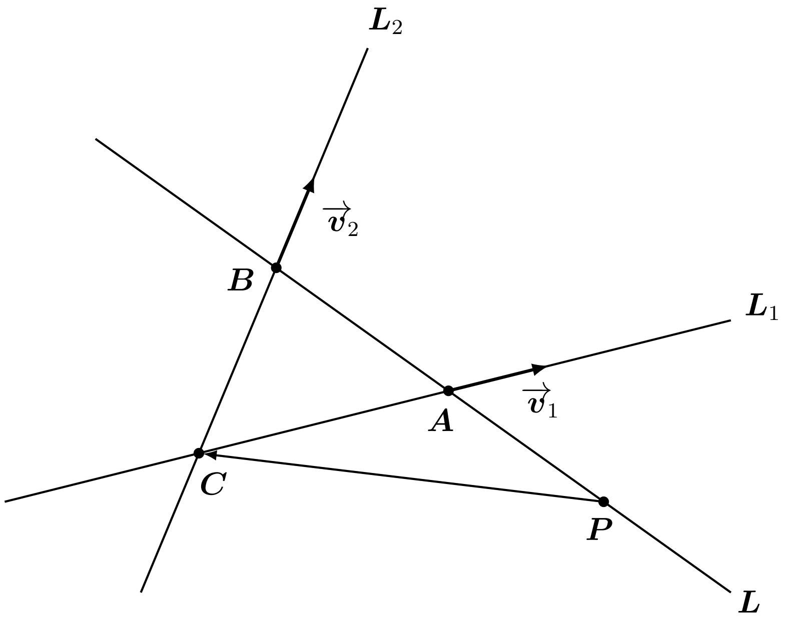


Рис. 2.1: Доведення леми 2.2.4

Лема 2.2.5. *Рух M є бієктивним відображенням.*

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення викладено в монографії [3]. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L'}$. Нехай $\boldsymbol{C'}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L'}$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C'}$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C'} = \boldsymbol{A'} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C'} = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}})$ і наше твердження доведено.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай $\boldsymbol{P'}$ довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис. 2.2). Ми дове-

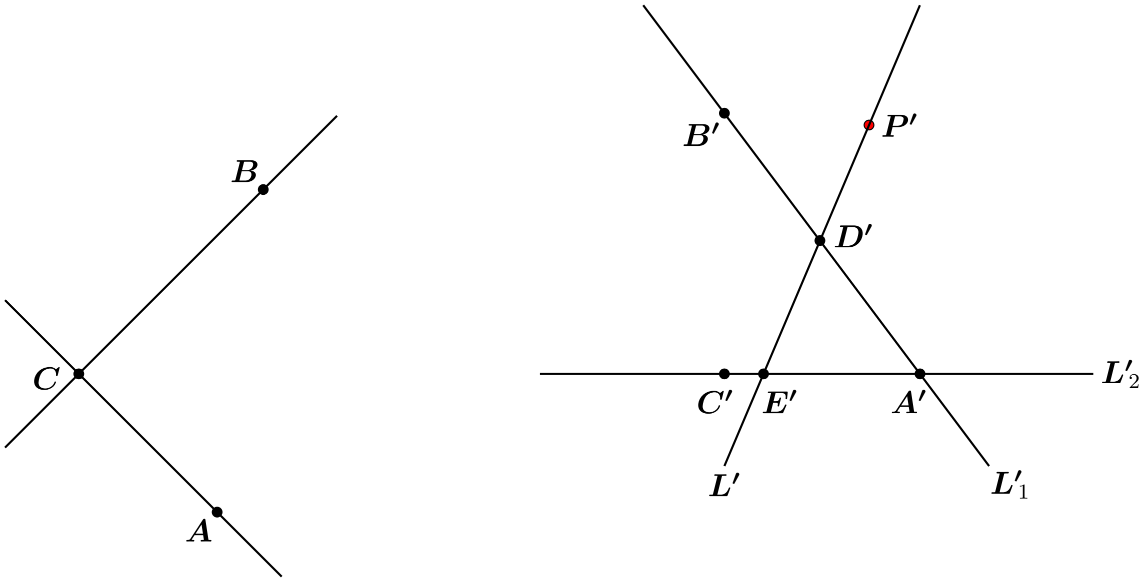


Рис. 2.2: Доведення факту, що рухи є сюр'єктивними відображеннями

демо, що $\boldsymbol{P'} = M(\boldsymbol{P})$ для деякої точки $\boldsymbol{P}$. Візьмемо три неколінепрні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ і нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}, \boldsymbol{C'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{L'}_1$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$, і нехай $\boldsymbol{L'}_2$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{C'}$. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M. Припустимо, що $\boldsymbol{P'}$ — точка, яка не належить жодній з прямих $\boldsymbol{L'}_1$ і $\boldsymbol{L'}_2$. За лемою 2.2.4 існують дві точки $\boldsymbol{D'}$ і $\boldsymbol{E'}$ на прямих $\boldsymbol{L'}_1$ і $\boldsymbol{L'}_2$, відповідно, такі, що точка $\boldsymbol{P'}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L'}$, яка визначається точками $\boldsymbol{D'}$ і $\boldsymbol{E'}$, а отже належить образу відображення M. Плоский випадок леми 2.2.5 доведено. □

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи (див. підрозділ 1.2.4) випливає така теорема:

Теорема 2.2.7. *Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.*

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

2.2.1 Паралельні перенесення

Найпростішим випадком рухів є паралельні перенесення.

Означення 2.2.8. Довільне відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вигляду

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \tag{2.2}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований вектор, називається *паралельним перенесенням* простору $\mathbb{R}^n$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *вектором паралельного перенесення* відображення T.

Виписуючи в термінах координат, легко побачити, що це відображення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

є паралельним перенесенням тоді і лише тоді, коли це відображення визначається рівностями вигляду

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + c_1; \\ x'_2 &= x_2 + c_2; \\ &\ldots\ \ldots \\ x'_n &= x_n + c_n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — фіксовані дійсні числа. Очевидно, що $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ є вектором паралельного перенесення відображення T у цьому випадку.

Наступна теорема є очевидною, і ми пропонуємо читачеві довести її самостійно.

Теорема 2.2.9. *Паралельні перенесення є рухами.*

Ось декілька простих цікавих властивостей паралельних перенесень.

Твердження 2.2.10. *Паралельне перенесення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ з ненульовим вектором паралельного перенесення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ задовольняє такі властивості:*

(1) *Відображення T не має нерухомих точок.*
(2) *T відображає прямі в прямі з однаковим вектором напрямку (або нахилом, у випадку площини).*
(3) *Єдині лінії, які фіксуються відображенням T, — це ті з напрямним вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. У випадку площини єдиними лініями, фіксованими відображенням T, є ті, нахил яких такий самий, як нахил одного з їхніх векторів напрямку.*

Доведення. Доведення тверджень (1) і (2) залишаємо читачам як вправи.

Для доведення твердження (3) розглянемо пряму $\boldsymbol{L}$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0$ з напрямним вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$. Якщо пряма $\boldsymbol{L}$ є інваріантною (нерухомою) стосовно відображення T, то T відображає точку $\boldsymbol{p}_0 + t\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ в іншу точку на прямій $\boldsymbol{L}$, яка буде мати вигляд $\boldsymbol{p}_0 + s\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$. Отже, маємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_0 + s\overrightarrow{\boldsymbol{w}} &= T(\boldsymbol{p}_0 + t\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \\ &= \boldsymbol{p}_0 + t\overrightarrow{\boldsymbol{w}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}},\end{aligned}$$

а тому вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Обернене твердження доводиться так само легко.

У випадку площини припустимо, що пряма $\boldsymbol{L}$, яка інваріантна (нерухома) стосовно відображення T визначається рівнянням

$$ax + by = c. \tag{2.4}$$

Пряма $\boldsymbol{L}$ має кутовий коефіцієнт $-\dfrac{a}{b}$.[2] Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (h, k)$, то тангенс кута вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ дорівнює $\dfrac{k}{h}$. Виберемо точку (x, y) на прямій $\boldsymbol{L}$. Оскільки за

[2] Випадок, коли пряма $\boldsymbol{L}$ вертикальна, тобто $b = 0$, ми опускаємо, і його доведення залишаємо читачеві як вправу.

припущенням точка $T(x, y) = (x + h, y + k)$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто ця точка також задовольняє рівняння (2.4), а отже виконується рівність

$$a(x + h) + b(y + k) = c.$$

Скориставшись рівністю (2.4) в останньому рівнянні, отримуємо, що

$$ah + bk = 0.$$

Звідси випливає рівність $\dfrac{k}{h} = -\dfrac{a}{b}$, що і завершує доведення. $\square$

2.2.2 Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11. Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут θ.*

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис. 2.3). Щоб вивести рівняння для обертання R в де-

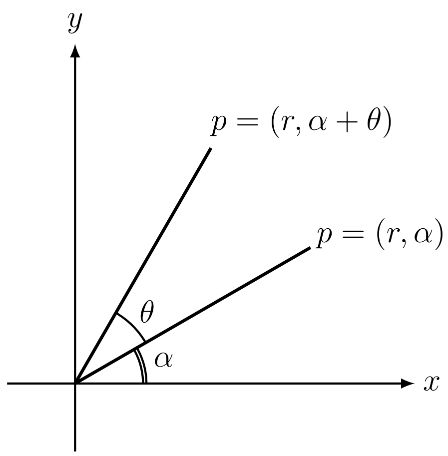


Рис. 2.3: Визначення обертання полярними координатами

картових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \\ y' &= r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Зробивши заміну (2.5) у формулі (2.6), отримуємо

Теорема 2.2.12. *Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд*

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13. *Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.*

Приклад 2.2.14. Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y; \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y. \end{aligned}$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'; \\ y &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{aligned}$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.15. Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням

$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:

$$-3\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) = 2.$$

Спростивши вирази та опустивши символ "$'$" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$

$$\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$

Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи.

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16. Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17. Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3, -1)$ на кут $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3, -1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T:\ \begin{aligned} x' &= x - 3; \\ y' &= y - 1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}:\ \begin{aligned} x' &= x + 3; \\ y' &= y + 1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3; \\
y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1.
\end{aligned}
$$

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести читачеві самостійно.

Теорема 2.2.18. *Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд*

$$
\begin{aligned}
x' &= (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta + a; \\
y' &= (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta + b.
\end{aligned}
$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19. (1) *Лише нерухома точка обертання, яка не є тотожним відображенням, є його центр.*

(2) *Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.*

(3) *Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.*

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо читачеві як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L'} = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$
a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c
$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L'}$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L'}$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його читачеві як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L'}$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. $\square$

2.2.3 Відбиття в площині

Ще один важливий вид руху — це відбиття. Такий рух можна визначити декількома способами. Сформулювавши наше означення, ми обговоримо деякі інші характеристики відбиття.

Означення 2.2.20. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Означимо відображення $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке називається *відбиттям стосовно прямої* $\boldsymbol{L}$, наступним чином. Виберемо точку $\boldsymbol{A}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ і одиничний нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ — довільна точка в $\mathbb{R}^2$, то

$$S(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P'} = \boldsymbol{P} + 2(\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}})\overrightarrow{\boldsymbol{N}}. \tag{2.9}$$

Пряма $\boldsymbol{L}$ називається *віссю* (для) відбиття S.

Читачеві буде корисним (див. рис. 2.4), коли ми обговорюємо геометрію за відбиттями. Спочатку, зауважимо, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{W}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}})\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ є саме ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$. Визначимо точку $\boldsymbol{Q}$ так, щоб вона задовольняла рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \overrightarrow{\boldsymbol{W}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}})\overrightarrow{\boldsymbol{N}}.$$

Інтуїтивно повинно бути зрозуміло, що $\boldsymbol{Q}$ є точкою на прямій $\boldsymbol{L}$, як показано на рис. 2.4. Однак це не випливає з означення та має бути доведено. З наступного рядка рівностей

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{AQ}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}} &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\right) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}} = \\
&= \Big((\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}})\overrightarrow{\boldsymbol{N}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\Big) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}} = \\
&= \overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

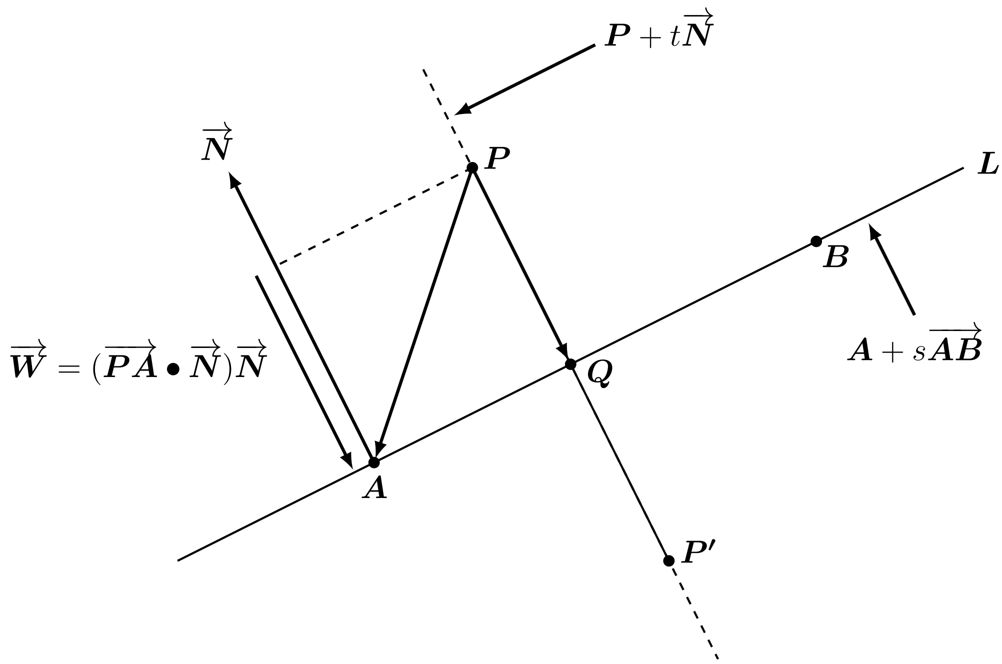


Рис. 2.4: Визначення відбиття на площині

випливає, що точка $\boldsymbol{Q}$ задовольняє точково-нормальну форму рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{AX}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}} = 0$ для точок $\boldsymbol{X}$ на прямій (або гіперплощині) $\boldsymbol{L}$, а отже, точка $\boldsymbol{Q}$ насправді лежить на прямій (або гіперплощині) $\boldsymbol{L}$. Крім того, легко перевірити, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AQ}}$ є ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ на пряму $\boldsymbol{L}$. Це означає, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}$ — одиничний напрямний вектор прямої $\boldsymbol{L}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{AQ}} = \big(\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{V}}\big)\overrightarrow{\boldsymbol{V}}$, і ми могли б визначити відбиття S за формулою

$$S(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + 2\big(\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AQ}}\big). \tag{2.10}$$

Це означення має перевагу в тому, що не потрібно знати вектор нормалі для прямої (тільки вектор напрямку або другу точку $\boldsymbol{B}$ на прямій). Звичайно, знайти вектор нормалі до прямої на площині тривіально. З іншого боку, наше звичайне векторне означення відбиття буде узагальнено на вищі виміри пізніше.

Нарешті, оскільки

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} + \big(\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{N}}\big)\overrightarrow{\boldsymbol{N}},$$

то ми бачимо, що $\boldsymbol{Q}$ — це точка, де пряма, яка ортогональна до прямої $\boldsymbol{L}$ і проходить через точку $\boldsymbol{P}$, перетинається з прямою $\boldsymbol{L}$. Отже, інше визначення образу відбиття $S(\boldsymbol{P})$ полягає в тому, що ми визначаємо цю точку $\boldsymbol{Q}$, а потім визначаємо

$$S(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}. \tag{2.11}$$

Іншими словами, відрізок $\boldsymbol{PP'}$ перпендикулярний до прямої $\boldsymbol{L}$ і перетинає пряму в його середині $\boldsymbol{Q}$.

Теорему 2.2.21 ми пропонуємо довести читачам як вправу.

Теорема 2.2.21. *Нехай S — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$.*

(1) *Визначення відбиття S залежить тільки від прямої $\boldsymbol{L}$, а не від точки $\boldsymbol{A}$ та вектора нормалі $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ цієї прямої, які вибрано в означенні. Три означення відбиття, визначені рівностями (2.9), (2.10) і (2.11), еквівалентні.*

(2) *Якщо параметр t вибрано так, що $\boldsymbol{P}+t\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ є точкою, де пряма проходить через точку $\boldsymbol{P}$ з напрямним вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ перетинається з прямою $\boldsymbol{L}$, то $S(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + 2t\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$.*

(3) *Нерухомими точками відбиття S є саме точки на її осі $\boldsymbol{L}$.*

(4) *Якщо $\boldsymbol{L}$ — вісь відбиття S і $\boldsymbol{L}'$ — ортогональна пряма до прямої $\boldsymbol{L}$, то $S(\boldsymbol{L}') = \boldsymbol{L}'$.*

(5) *Відбиття є рухом.*

Приклад 2.2.22. Знайдіть відбиття S_x стосовно x-осі.

Розв'язок. Якщо виберемо $\boldsymbol{A} = (0,0)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{L}} = (0,1)$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{P}}$ і

$$S_x(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + 2\Big[\big(-\overrightarrow{\boldsymbol{P}}\big) \bullet (0,1)\Big](0,1),$$

або

$$S_x(x,y) = (x,-y).$$

Іншими словами, відбиття S_x має рівняння

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Приклад 2.2.23. Знайдіть відбиття S стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $2x - y + 2 = 0$.

Развʼязок. Нехай $\boldsymbol{A} = (-1,0)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{N}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ і нехай $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ і $\boldsymbol{P'}$ — точки, як це зображено на рис. 2.5. Тоді $\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} = (-x-1,-y)$. Використавши

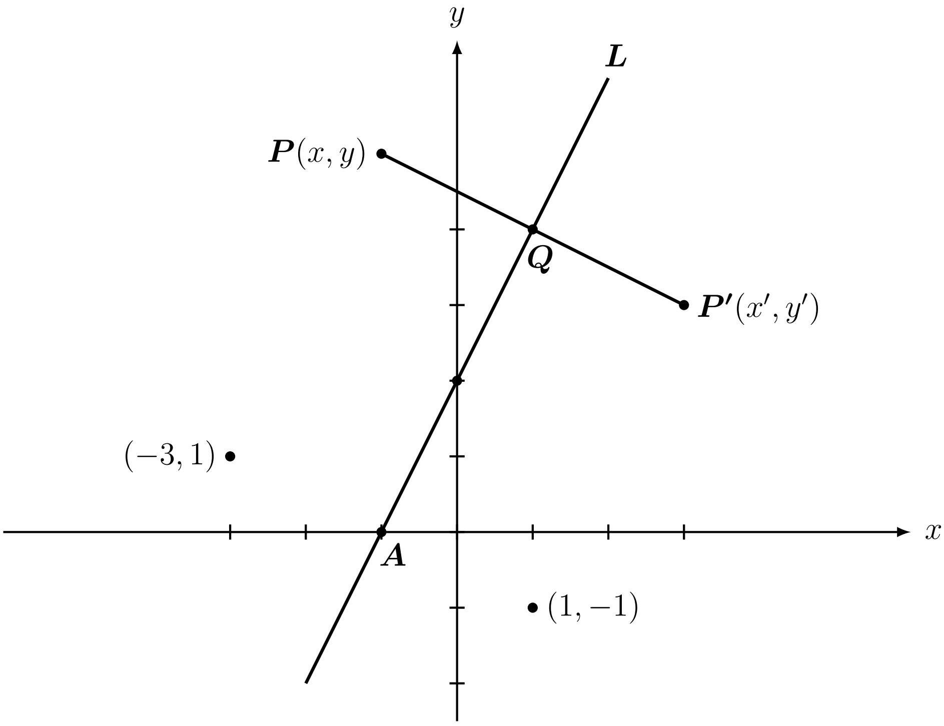


Рис. 2.5: Приклад 2.2.23

формули в означенні відбиття, отримуємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \left[(-x-1, -y) \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)\right] \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) = \\ = \left(-\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{4}{5}, \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}\right).$$

Оскільки $S(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$, то отримуємо, що відбиття S визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}; \\ y' &= \quad \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Щоб перевірити нашу відповідь, звернемо увагу на те, що образ відбиття $S(-3, 1)$ обчислюється як $(1, -1)$, що і має бути (знову див. рис. 2.5). Наші рівності також стверджують, що $S(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ і $S(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}$.

Твердження 2.2.24. *Якщо S — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $ax + by + c = 0$, то*

$$S(x, y) = (x, y) + 2\frac{-ax - by - c}{a^2 + b^2}(a, b). \tag{2.14}$$

Доведення. Ми скористаємося теоремою 2.2.21(2). Відомо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{N}} = (a, b)$ — нормальний вектор прямої $\boldsymbol{L}$, хоча він може не бути одиничним вектором. Отже, якщо $\boldsymbol{P} = (x, y)$, то щоб знайти точку $\boldsymbol{Q}$, показану на рис. 2.4, нам потрібно знайти параметр t так, щоб точка $\boldsymbol{P} + t\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ лежала на прямій $\boldsymbol{L}$. Однак з рівності

$$a(x + ta) + b(y + tb) + c = 0$$

випливає, що

$$t = \frac{-ax - by - c}{a^2 + b^2}.$$

Підставивши значення t у формулу

$$S(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \boldsymbol{P} + 2t\overrightarrow{\boldsymbol{N}},$$

отримуємо рівність (2.14). □

Приклад 2.2.25. Повторимо приклад 2.2.23, використовуючи рівність (2.14).

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що

$$t = \frac{-2x + y - 2}{5},$$

а отже,

$$S(x, y) = (x, y) + 2\frac{-2x + y - 2}{5}(2, 1).$$

Ця рівність спрощується до того самого рівняння для відбиття S, що й раніше.

Остаточний і більш систематичний спосіб обчислення відбить, який легше запам'ятати концептуально (з огляду на те, що людина розуміє паралельне перенесення, обертання навколо початку координат і відбиття стосовно осі x), заснований на часто корисному загальному принципі, що складні проблеми слід розв'язувати шляхом послідовного зведення їх до простіших, поки не дійдеш до примітивної задачі, розв'язок якої відомий.

Випадок 1 (Примітивна задача)**.** Рівняння для відбиття S_x стосовно осі x.

Ця задача була розв'язана в прикладі 2.2.22 вище і ми отримали рівняння (2.12).

Випадок 2. Рівняння для відбиття стосовно прямої, що проходить через початок координат.

Цей випадок можна звести до **випадку 1**, спочатку паралельно перенести пряму до осі x, а потім використати рівняння з **випадку 1** і, нарешті, паралельно перенести пряму назад.

Випадок 3 (Загальний випадок)**.** Рівняння для відбиття стосовно довільної прямої.

Паралельно перенісши пряму в пряму, яка проходить через початок координат, ми можемо звести цей випадок до **випадку 2**, знайти рівняння для цього випадку, а потім паралельно перенести назад.

Кроки, описані у **випадках 1–3**, призводять до наступної характеристики відбиття, яку ми пропонуємо довести читачеві самостійно:

Теорема 2.2.26. *Кожне відбиття S на площині можна виразити у вигляді*

$$S = T^{-1}R^{-1}S_xRT,$$

де T — паралельне перенесення, R — обертання навколо початку координат і S_x — відбиття стосовно осі x.

Приклад 2.2.27. Знайдіть рівняння для відбиття S стосовно прямої в прикладі 2.2.23 з використанням вище викладеного підходу.

Разв'язок. Спочатку паралельно перенесемо пряму $\boldsymbol{L}$ у пряму $\boldsymbol{L'}$, яка проходить через початок координат за формулами:

$$\begin{aligned} T:\ \ x' &= x+1;\\ y' &= y. \end{aligned}$$

Далі, нехай R — обертання навколо початку координат на кут $-\theta$, яке визначається так:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Обертання R поверне пряму $\boldsymbol{L'}$ на вісь x, оскільки θ – це кут, який пряма $\boldsymbol{L}$ складає з віссю x. Рівняння для обертань R і R^{-1} мають вигляд:

$$\begin{aligned} R:\ \ x' &= \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y; & \qquad R^{-1}:\ \ x' &= \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y;\\ y' &= -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y, & y' &= \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y. \end{aligned}$$

Нарешті, якщо S_x є відбиттям навколо осі x, то відбиття S є лише композицією $T^{-1}R^{-1}S_xRT$. Оскільки рівняння для всіх відображень відомі, то тепер легко визначити рівняння для відбиття S, і вони знову виявляться такими ж, як рівняння (2.13).

Читач може задатися питанням, чому ми потрудилися описати розв'язок у прикладі 2.2.27, оскільки він складніший, ніж у прикладі 2.2.23. У цьому випадку метод прикладу 2.2.27 слід просто розглядати як спробу дати читачеві більше уявлення про те, як розв'язувати геометричну задачу. Цей підхід може бути неефективним тут, але буде ефективним в інших ситуаціях. Важливо усвідомлювати, що є два типи складності: перший, коли ми маємо справу з чимось, що є інтелектуально складним, і інший, який може зайняти багато часу, але включає лише прості інтелектуальні кроки. Це стосується розв'язку прикладу 2.2.27. Насправді, питання такого типу, ймовірно, знову з'являться пізніше в цьому розділі, оскільки зазвичай існує багато способів розв'язку задачі. Будь-яка конкретна задача цілком може мати надзвичайно елегантний розв'язок, який може знайти людина. З іншого боку, комп'ютер не в змозі розв'язувати задачі від випадку до випадку і потребує системного підходу.

2.2.4 Рухи зберігають точковий добуток векторів

Теорема 2.2.28. *Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що*

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \tag{2.15}$$

Рівність (2.15) можна переписати так (див. рис. 2.6)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \tag{2.16}$$

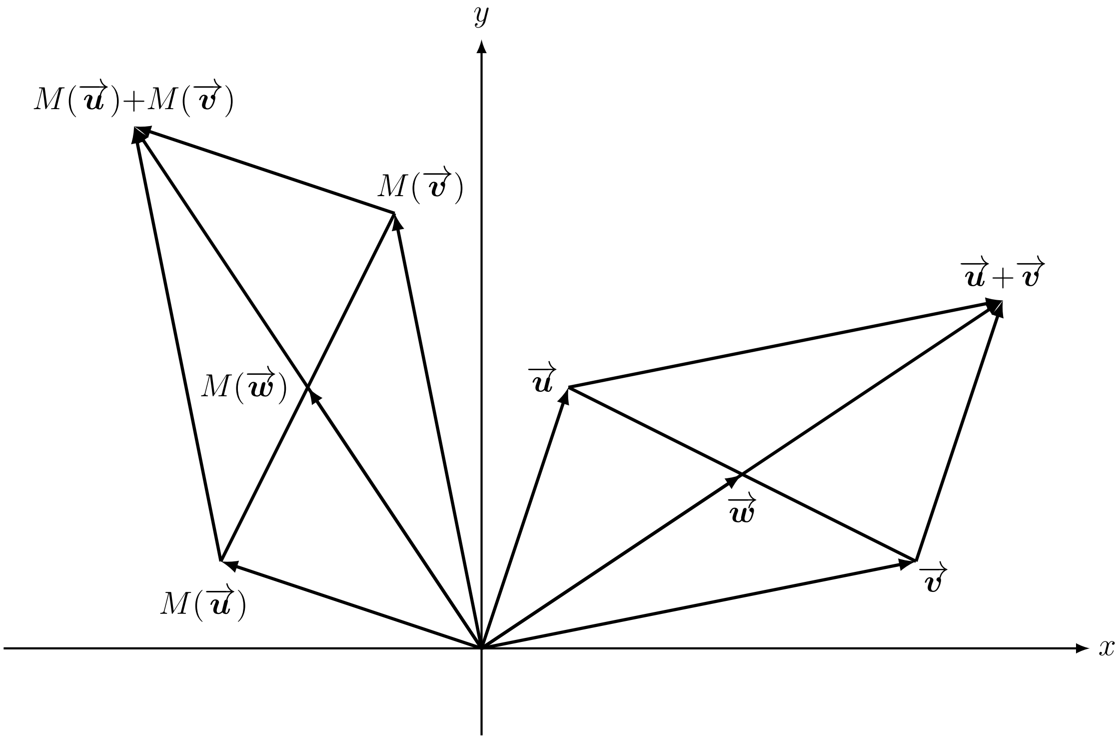


Рис. 2.6: Доведення, що рухи є лінійними перетвореннями

Оскільки $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, а звідси випливає, що $\left|M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right|$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$, то використавши рівність (2.15) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = 2M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}). \tag{2.17}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2.16) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + \frac{1}{2}(M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})). \tag{2.18}$$

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (2.18) у рівність (2.17) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3, що і завершує доведення теореми. □

Теорема 2.2.29. *Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1M_0 = M_0T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.*

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2T_2$. Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а, отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1M_0 = M_0T_2$ руху M доводиться аналогічно. □

Лема 2.2.30. *Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді*

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+2\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}} &= (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \\ &= M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \\ &= M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})+2M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+2M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. □

Теорема 2.2.31. *Якщо M — рух, то*

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. □

Наслідок 2.2.32. *Рухи зберігають кути.*

Див. рис. 2.7.

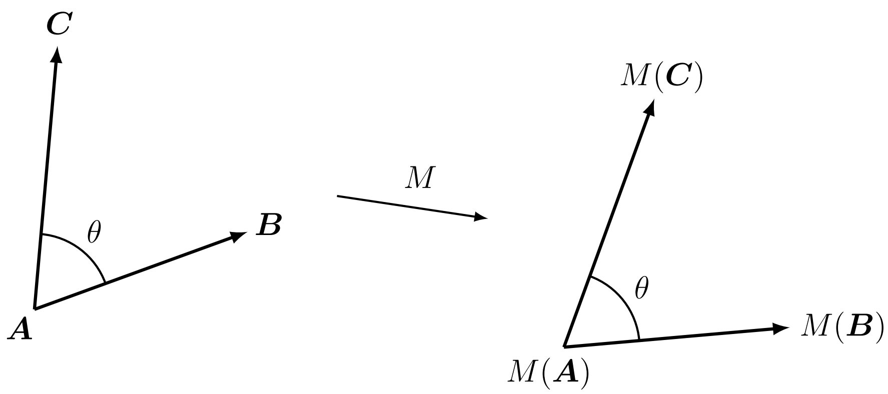


Рис. 2.7: Рухи зберігають кути

Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

Теорема 2.2.33. *Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.*

2.2.5 Деякі результати існування та єдиності

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для всіх $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}\right|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$ і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис. 2.8). Легко довести, що рух $M =$

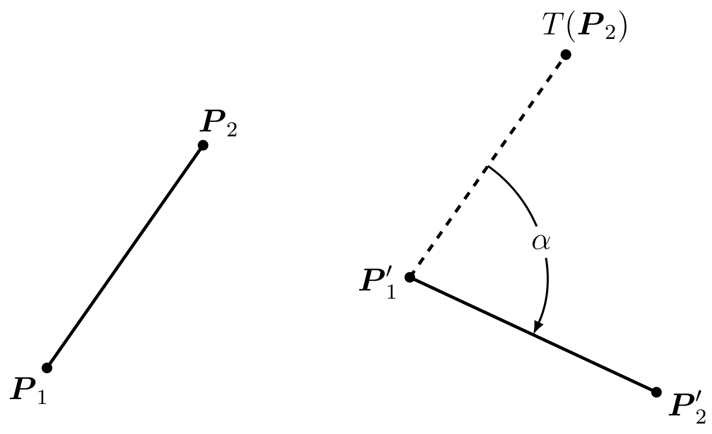


Рис. 2.8: Переміщення двох точок на інші дві точки

RT виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_3}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 \boldsymbol{P}'_3}|$. Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34. *Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.*

Доведення. Припустимо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{X}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{C}}$.

Твердження. Середина $\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{C}} + \overrightarrow{\boldsymbol{X}})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{X}} = \overrightarrow{\boldsymbol{C}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис. 2.9). Розглянемо такі рівності:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AD}} &= \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \overrightarrow{\boldsymbol{X}}) - \boldsymbol{C}\right) \bullet \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \overrightarrow{\boldsymbol{X}}) + \boldsymbol{C}\right) = \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{AX}} - \overrightarrow{\boldsymbol{CC}}) \bullet \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AX}}) = \\
&= \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}|^2\right) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{BD}} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$ паралельні, а отже, точка $\boldsymbol{D}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему. □

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати

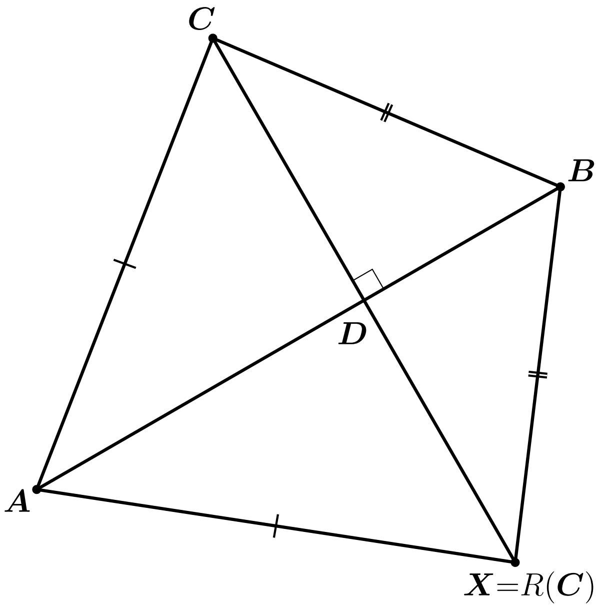


Рис. 2.9: Доведення леми 2.2.34

всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. 2.10 показує як цей аргумент працює. На рис. 2.10(a) зображено три кола з центрами $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$, які мають радіуси $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_i$ і $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_i$, відповідно. Точка $\boldsymbol{P}_i$ лежить на перетині цих кіл. На рис. 2.10(b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка $\boldsymbol{P}_i$ відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою $\boldsymbol{P}'_i$.

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

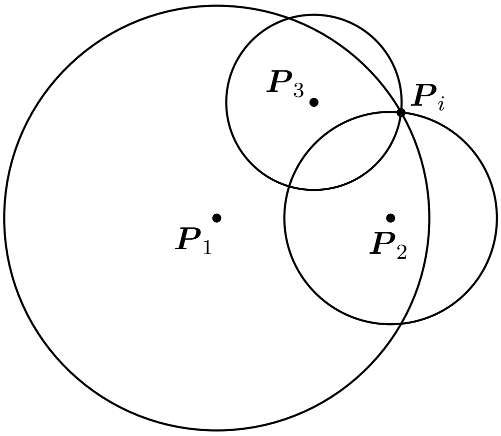
Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів). *Нехай* $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ *і* $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ *— точки з властивістю* $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ *для всіх* $i, j = 1, 2, \ldots, k$. *Тоді існує рух* M *такий, що* $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ *для всіх* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доведення теореми 2.2.35 можна знайти в монографії [3], щоб отримати детальну інформацію в обговореній вище конструкції.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36. *Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.*

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками



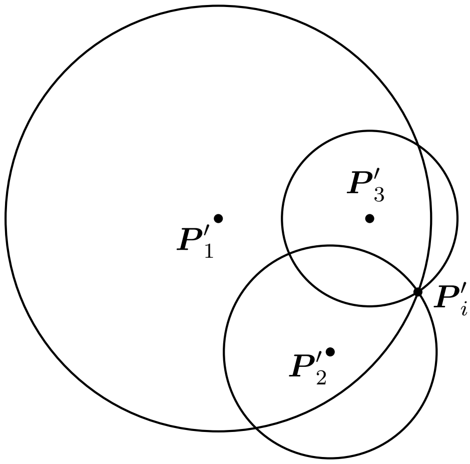


Рис. 2.10: Випадок 4 теореми існування

$\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. □

Теорема 2.2.37. *Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох прямих, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. □

Наслідок 2.2.38. *Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.*

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. □

Наслідок 2.2.39. *Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.*

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. □

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, яке має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40. *Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.*

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. □

2.2.6 Жорсткі рухи на площині

Лема 2.2.41. *Кожне обертання R площини можна виразити у вигляді $R = R_0T_1 = T_2R_0$, де R_0 — обертання навколо початку координат і T_1 та T_2 — паралельні перенесення. Навпаки, якщо R_0 — довільне обертання навколо початку координат на відмінний від нуля кут і T — паралельне перенесення площини, то обидві композиції R_0T і TR_0 є рухами.*

Доведення. Припустимо, що $R = TR_0T^{-1}$, де R_0 — обертання навколо початку координат і T — паралельне перенесення. За теоремою 2.2.29 ми можемо перемістити паралельне перенесення в будь-який бік стосовно обертання R_0, що доводить перше твердження леми. Друге твердження можна довести, показавши, що деякі рівняння мають єдині розв'язки. Наприклад, щоб довести, що TR_0 є обертанням, припускають, що це обертання навколо деякої точки (a, b), і намагаються розв'язати рівняння

$$(x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a = x\cos\theta - y\sin\theta + c;$$
$$(x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b = x\sin\theta + y\cos\theta + d$$

для a та b. Деталі доведення залишаємо читачеві як вправу. □

Теорема 2.2.42. *Множина всіх паралельних перенесень і обертань площини є підгрупою групи всіх рухів. Множина всіх обертань сама по собі не є групою.*

Доведення. Для доведення теореми скористаємося лемою 2.2.41, щоб показати, що композиції паралельних перенесень і обертань навколо довільної точки знову є або паралельним перенесенням, або обертанням. □

Означення 2.2.43. Рух площини, що є композицією паралельних перенесень і/або обертань, називається *жорстким рухом* або *переміщенням*.

Жорсткі рухи тісно пов'язані з відображеннями, що зберігають орієнтацію. Ми визначили це поняття в підрозділі 1.8 для лінійних перетворень, і тепер ми хотіли б поширити це означення на рухи. Рухи не є лінійними перетвореннями, але за теоремою 2.2.29 вони відрізняються від них, зокрема паралельними перенесеннями. Інтуїтивно ми хотіли б сказати, що рух M площини "зберігає орієнтацію", якщо для довільних трьох неколінеарних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ упорядковані пари базисних векторів $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right)$ і $\left(\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}, \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})}\right)$ визначають однакову орієнтацію простору $\mathbb{R}^2$ (див. рис. 2.11). Працювати з цим означенням було

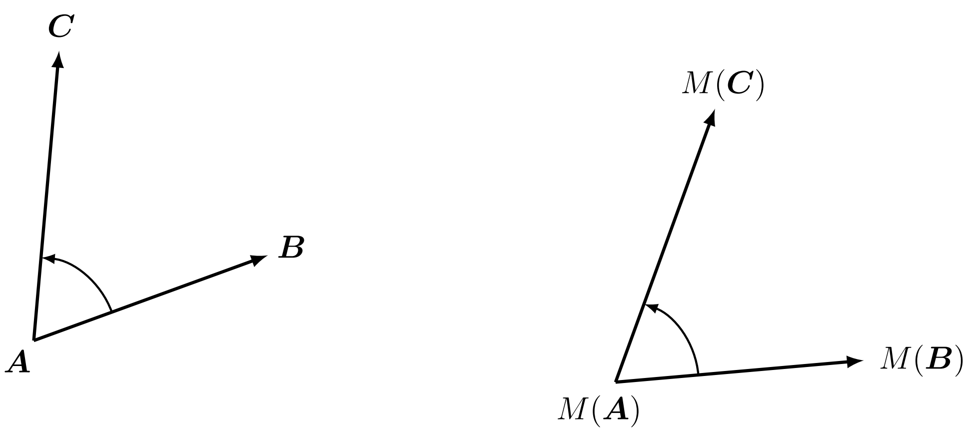


Рис. 2.11: Рух, який зберігає орієнтацію

б непросто, а тому ми використовуємо інший підхід.

Нехай M — рух у лінійному просторі $\mathbb{R}^n$. За теоремою 2.2.29 ми можемо записати рух M єдиним чином у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух, для якого початок координат є його нерухомою точкою. З теореми 2.2.28 випливає, що рух M_0 — лінійне перетворення.

Означення 2.2.44. Будемо говорити, що рух M, який має зображенням $M = TM_0$, *зберігає орієнтацію*, якщо рух M_0 зберігає орієнтацію, а в протилежному випадку будемо говорити, що рух M *розвертає* (*змінює*) *орієнтацію*.

Теорема 2.2.45. (1) *Рух M зберігає орієнтацію тоді і лише тоді, коли обернене до нього відображення M^{-1} — рух, що зберігає орієнтацію.*

(2) *Композиція MM' двох рухів M і M' зберігає орієнтацію тоді і тільки тоді, коли одночасно обидва з них зберігають орієнтацію, або обидва змінюють орієнтацію.*

(3) *Композиція $M_1M_2 \dots M_k$ рухів M_i зберігає орієнтацію тоді і тільки тоді, коли кількість рухів M_i, що змінюють орієнтацію, парна.*

Доведення теореми 2.2.45 залишено читачам як вправу. Воно інтенсивно використовує теорему 2.2.29 для перемикання паралельних перенесень з одного боку руху, який фіксує початок координат, на інший.

Теорема 2.2.46. (1) *Паралельні перенесення й обертання площини — це рухи, що зберігають орієнтацію.*

(2) *Відбиття — це рухи, що змінюють орієнтацію.*

Доведення. (1) Той факт, що паралельні перенесення є рухами, що зберігають орієнтацію, безпосередньо випливає з означення, оскільки тотожне відображення, безумовно, зберігає орієнтацію. Щоб довести, що обертання зберігають орієнтацію, достатньо показати за теоремою 2.2.45, що кожне обертання R навколо початку координат зберігає орієнтацію, оскільки довільне обертання є композицією паралельного перенесення та обертання навколо початку координат. Те, що такий рух (обертання) R зберігає орієнтацію, випливає з теорем 1.8.11 і 2.2.12 і того факту, що матриця для лінійного перетворення R має визначник, який дорівнює $+1$. Це доводить твердження (1).

(2) Для доведення твердження (2) зауважимо, що відбиття S_x стосовно осі x — це лінійне перетворення з рівнянням (2.12)

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= -y, \end{aligned} \tag{2.12}$$

що, очевидно, має детермінант -1, а отже, змінює орієнтацію. Далі, теорема 2.2.26 стверджує, що довільне відбиття можна записати у вигляді

$T^{-1}R^{-1}S_xRT$, де T — паралельне перенесення, а R — обертання навколо початку координат. Тепер властивість (2) випливає з твердження (1) та теореми 2.2.45. $\square$

Ми також можемо геометрично обґрунтувати теорему 2.2.46(2) на основі інтуїтивної ідеї, згаданої раніше, що рух площини, який змінює орієнтацією, якщо для деяких трьох неколінеарних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ впорядковані пари базисних векторів $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right)$ і $\left(\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}, \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})}\right)$ визначають протилежні орієнтації лінійного простору $\mathbb{R}^2$. Щоб побачити це, ми скористаємося тими самими позначеннями, що й у означенні відбиття в підрозділі 2.2.3. Якщо $\boldsymbol{P}$ — точка, що не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, то, очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{AQ}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}$ утворюють базис в лінійному просторі $\mathbb{R}^2$ і

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T(\boldsymbol{A})T(\boldsymbol{Q})} &= \overrightarrow{\boldsymbol{AQ}} = 1 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AQ}} + \qquad 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{QP}};\\
\overrightarrow{T(\boldsymbol{Q})T(\boldsymbol{P})} &= \overrightarrow{\boldsymbol{QP}'} = 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AQ}} + (-1) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{QP}}.
\end{aligned}$$

Визначник матриці коефіцієнтів, що пов'язує вихідний базис із перетвореним, дорівнює -1. Це означає, що дві бази знаходяться в протилежних класах орієнтації.

Доведення теореми 2.2.47 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.2.47. *Рух площини зберігає орієнтацію тоді і тільки тоді, коли він жорсткий рух.*

Хоча для визначення загального руху площини потрібні три точки, однак у окремому випадку жорстких рухів достатньо дві точки.

Теорема 2.2.48 є безпосереднім наслідком теорем 2.2.40 і 2.2.46.

Теорема 2.2.48. *Нехай M — жорсткий рух площини. Якщо M має дві різні нерухомі точки, то M — тотожне відображення.*

Доведення наслідку 2.2.49 подібне до доведення наслідку 2.2.38.

Наслідок 2.2.49. *Два жорстких рухи площини, що узгоджуються в двох різних точках, збігаються.*

Наслідок 2.2.50. *Два рухи, які зберігають орієнтацію площини й узгоджуються в двох різних точках, збігаються.*

Доведення. Якщо M і M' — два рухи, які зберігають орієнтацію, то композиція $M'M^{-1}$ — жорсткий рух, який має дві різні нерухомі точки , а отже, є тотожним відображенням. Звідси випливає, що $M = M'$. $\square$

Доведення теореми 2.2.51 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.2.51. *Жорсткий рух площини, що має одну нерухому точку* $\boldsymbol{p}$, *є обертанням навколо точки* $\boldsymbol{p}$.

2.2.7 Резюме щодо рухів на площині

Ми визначили рухи і показали, що рух площини повністю визначається тим, що він робить з трьома неколінеарними точками, і що його можна описати в термінах трьох дуже простих рухів, а саме, паралельного перенесення, обертання навколо точки та відбиття стосовно прямої. Щоб зрозуміти такі рухи, достатньо добре зрозуміти ці три примітивні типи рухів.

Рухи на площині є такими, що або зберігають орієнтацію, або розвертають орієнтацію, причому жорсткі рухи є рухами, що зберігають орієнтацію. Відбиття змінюють орієнтацію. Інший спосіб описати рух на площині — це жорсткий рух або композиція жорсткого руху та одного відбиття. Насправді ми можемо припустити, що відбиття, якщо це необхідно, це просто відбиття стосовно осі x.

Об'єднавши різні відомі нам факти, тепер дуже легко описати рівняння довільного руху площини.

Теорема 2.2.52. *Кожен рух* M *на площині визначається рівняннями вигляду*

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c; \\ y' &= \pm(-bx + ay) + d, \end{aligned} \tag{2.19}$$

де $a^2 + b^2 = 1$. *Навпаки, кожна така пара рівнянь визначає рух на площині.*

Доведення. Нехай $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = (c, d)$ і визначимо паралельне перенесення T за формулою $T(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} + (c, d)$. Нехай $M' = T^{-1}M$. Тоді $M = TM'$ і нерухомою точкою руху M' є початок координат.

Випадок 1. Рух M зберігає орієнтацію.

У цьому випадку рух M' зберігає орієнтацію та за теоремою 2.2.51 має бути обертанням навколо початку координат на деякий кут θ. Нехай $a = \cos\theta$ і $b = -\sin\theta$. Очевидно, рівняння для руху M має бажаний вигляд.

Випадок 2. Рух M розвертає (змінює) орієнтацію.

Нехай S — відбиття стосовно осі x, тобто $S(x, y) = (x, -y)$. Оскільки рух M' розвертає (змінює) орієнтацію, то звідси випливає, що рух $R = SM'$ зберігає орієнтацію, але відображення R має початок координат як нерухому точку. Отже, R має бути обертанням навколо початку координат на деякий кут θ. Зауважимо, що $SR = SSM' = M'$. Визначимо числа a та b аналогічно, як і у **випадку 1**: $a = \cos\theta$ і $b = -\sin\theta$. Знову легко бачити, що рівняння для руху $M = TM' = TSR$ має бажаний вигляд.

Це завершує доведення першої частини теореми. Другу частину залишаємо читачеві в якості вправи (див. вправу 2.5.17). □

Приклад 2.2.53 ілюструє друге твердження теореми 2.2.52.

Приклад 2.2.53. Покажемо безпосередньо, не використовуючи теорему 2.2.52, що перетворення M площини, визначене рівняннями

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 5;$$

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 7$$

є рухом.

Розв'язок. Визначимо паралельне перенесення T за формулою

$$T(x, y) = (x, y) + (5, 7).$$

Нехай R — обертання навколо початку координат на кут $-\dfrac{\pi}{6}$ і нехай S — відбиття стосовно осі x. Легко бачити, що $M = TSR$, а отже, відображення M є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Теорема 2.2.52 стверджує, що рухи можуть бути зображені п'ятьма дійсними числами (a, b, c, d і ± 1 залежно від знаку). Жорсткі рухи можна зобразити чотирма дійсними числами. Розділ 20 в монографії [1] описує дуже компактний спосіб зображення рухів у термінах кватерніонів. Той факт, що рух визначається п'ятьма числами, веде до іншого способу розв'язання руху, коли він визначений деякими точки та їхніми образами. Для невідомих коефіцієнтів просто розв'язується рівняння в теоремі 2.2.52. Розв'язування п'яти невідомих виявляється не таким складним, як може здатися в даному випадку.

Далі ми хотіли б дати більш повну геометричну характеристику рухів, ніж наведена в наслідку 2.2.39.

Лема 2.2.54. *Кожен рух M площини, який змінює орієнтацію та для якого початок координат є нерухомою точкою — це відбиття стосовно прямої, що проходить через початок координат.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{p}$ — ненульова точка площини. Якщо $\boldsymbol{p}$ — нерухома точка відображення M, то з теореми 2.2.40 випливає, що M — це відбиття стосовно прямої, яка проходить через початок координат і точку $\boldsymbol{p}$, і ми завершили доведення. Тому припустимо, що $\boldsymbol{p}' = M(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{p}$. Нехай $\boldsymbol{q}$ — середина відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}']$, а S — відбиття стосовно прямої, яка проходить через початок координат і точку $\boldsymbol{q}$. Очевидно, що значення відображень S і M збігаються в початку координат і точці $\boldsymbol{p}$. За наслідком 2.2.50, S і M — це одне й те саме відображення. □

Означення 2.2.55. *Відбиття ковзання*, чи *ковзне відбиття*, — це композиція відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, за яким слідує паралельне перенесення з ненульовим вектором паралельного перенесення, яке паралельне прямій $\boldsymbol{L}$ (див. рис. 2.12).

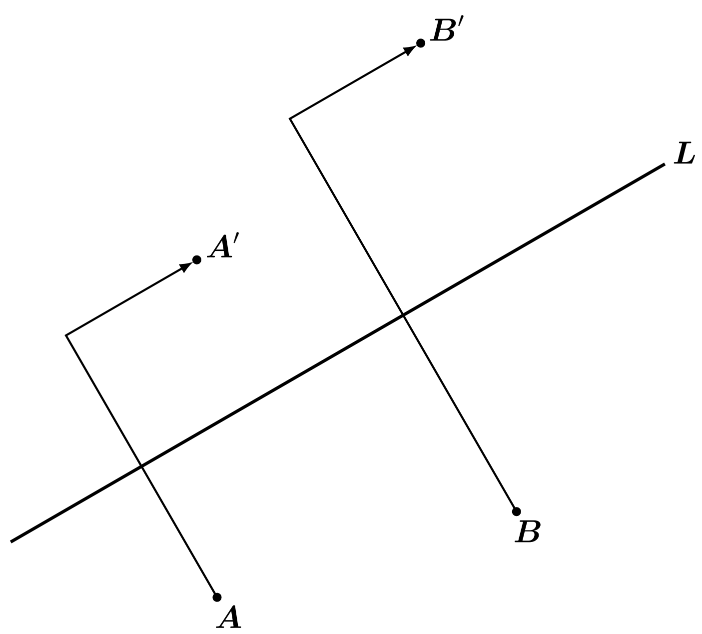


Рис. 2.12: Відбиття ковзання

Теорема 2.2.56. *Кожен рух M площини, що розвертає орієнтацію, є або відбиттям, або відбиттям ковзання.*

Доведення. Якщо початок координат є нерухомою точкою руху M, то твердження теореми випливає з леми 2.2.54. Припустимо, що точка $M(\mathbf{0}) = \boldsymbol{p}$ відрізняється від початку координат і нехай T — паралельне перенесення, яке відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$. Нехай $M' = T^{-1}M$. Тоді M' — рух, який розвертає орієнтацію та початок координат є його нерухомою точкою. Отже, за лемою 2.2.54, M' є відбиттям. Оскільки $M = TM'$, то рух M є відбиттям ковзання. $\square$

Теорема 2.2.57. *Кожен рух M площини є або паралельним перенесенням, або обертанням, або відбиттям, або відбиттям ковзання.*

Доведення. Якщо M — жорсткий рух, то M є паралельним перенесенням або обертанням за теоремою 2.2.42. Якщо M не є жорстким рухом, тобто, якщо M розвертає орієнтацію, то рух M є відбиттям, або відбиттям ковзання за теоремою 2.2.56. $\square$

І, нарешті, останнє слово про те, чому термін "конгруентне перетворення" іноді використовується замість терміна "рух". Читач може пригадати поняття "конгруентні фігури" з його/її курсу евклідової геометрії в середній школі, в якому, швидше за все, ніколи не було дано насправді точного означення. Ну, ми можемо це зробити зараз.

Означення 2.2.58. Дві фігури називають *конгруентними* (*рівними*), якщо існує рух, який відображає одну фігуру в іншу.

2.2.8 Репери на площині

Перш ніж залишити тему рухів у площині, ми хочемо обговорити інший підхід до їх визначення — той, який буде особливо потужним у вищих вимірах.

Означення 2.2.59.

2.3 Подібність

2.4 Аффінні перетворення

2.5 Вправи

Підрозділ 2.2

Вправа 2.5.1. Доведіть твердження (2) та (3) теореми 2.2.2.

Вправа 2.5.2. Доведіть, що рух відображає трикутники на трикутники.

Вправа 2.5.3. Доведіть, що рух відображає промені в промені.

Підрозділ 2.2.1

Вправа 2.5.4. Доведіть теорему 2.2.9.

Вправа 2.5.5. Доведіть твердження 2.2.10(2).

Підрозділ 2.2.2

Вправа 2.5.6. Доведіть твердження 2.2.19(1).

Вправа 2.5.7. Знайдіть обертання навколо точки $(1, 2)$ на кут $\dfrac{\pi}{6}$.

Вправа 2.5.8. Нехай R — обертання навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, що визначається двома точками $(2, 4)$ і $\left(4, 4 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Доведіть безпосередньо обчисленнями, що кути між прямими $\boldsymbol{L}$ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$ з віссю x відрізняються на $\dfrac{\pi}{3}$.

Вправа 2.5.9. Знайдіть обертання R навколо точки $(2, 3)$, що відображає точку $(6, 3)$ в точку $\left(4, 3 + \sqrt{3}\right)$.

Вправа 2.5.10. Нехай R — обертання навколо точки $(-1, 2)$ на кут $-\dfrac{\pi}{6}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, що визначається двома точками $(2, 4)$ і $(5, 1)$. Запишіть рівняння прямої $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$.

Вправа 2.5.11. Нехай R — обертання навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ і T — паралельне перенесення з вектором перенесення $(-1, 2)$. Знайдіть рівняння для RT і опишіть відображення в геометричних термінах якомога точніше.

Підрозділ 2.2.3

Вправа 2.5.12. Доведіть теорему 2.2.21.

Вправа 2.5.13. Знайдіть відбиття S стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $2x + y = 2$. Знайдіть $S(-5, 0)$ і $S(0, 4)$.

(a) Розв'яжіть задачу, використовуючи означення, як у прикладах 2.2.22 і 2.2.23, але перевірте свою відповідь за допомогою твердження 2.2.24.

(b) Розв'яжіть задачу, використовуючи редукційний метод reductive як це запропоновано в прикладі 2.2.27.

Вправа 2.5.14. Знайдіть відбиття S стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $(2, 3)$ і $(4, 1)$. Знайдіть рівняння для відбиття S як вас просили зробити у вправі 2.5.13.

Вправа 2.5.15. Припустимо, що R_1 і R_2 — відбиття стосовно прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно. Нехай $R = R_2R_1$.

(a) Нехай прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці A. Доведіть, що рух R є обертанням навколо точки A. Знайдіть залежність між кутом цього обертання та кутом між двома прямими.

(b) Доведіть, якщо прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ паралельні, то R є паралельним перенесенням.

Підрозділ 2.2.4

Вправа 2.5.16. Доведіть теорему 2.2.33.

Підрозділ 2.2.7

Вправа 2.5.17. Доведіть другу частину теореми 2.2.52.

Вправа 2.5.18. Які з наведених нижче перетворень M є рухами? Поясніть свої відповіді. Зокрема, виразіть ті, які є у вигляді композиції паралельного перенесення, обертання та/або відбиття:

$$(a) \quad M\colon \quad \begin{aligned} x' &= \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6; \\ y' &= -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1, \end{aligned}$$

$$(b) \quad M\colon \quad \begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1; \\ y' &= \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}}{2}y + 3, \end{aligned}$$

$$(c)\quad M\colon\quad x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y;$$

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 2,$$

$$(d)\quad M\colon\quad x' = \frac{\sqrt{8}}{3}x + \quad \frac{1}{3}y + 7;$$

$$y' = \quad \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{8}}{3}y.$$

Вправа 2.5.19. (a) Знайдіть рівняння жорсткого руху M, який відображає точки $\boldsymbol{A}(2,-1)$ і $\boldsymbol{B}(4,1)$ у точки $\boldsymbol{A}'(-3,3)$ і $\boldsymbol{B}'(-1,1)$, відповідно. Використайте лише паралельні перенесення, обертання навколо точок і/або відбиття стосовно прямих.

(b) Знайдіть рівняння іншого руху, який відображає точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ у точки $\boldsymbol{A}'$ і $\boldsymbol{B}'$, відповідно.

Вправа 2.5.20. Знайдіть рівняння руху M, який відображає точки $\boldsymbol{A}(-2,1)$, $\boldsymbol{B}(0,2)$ і $\boldsymbol{C}(-2,4)$ у точки $\boldsymbol{A}'(4,0)$, $\boldsymbol{B}'(6,-1)$ і $\boldsymbol{C}'(4,-3)$, відповідно. Використайте лише паралельні перенесення, обертання навколо точок і/або відбиття стосовно прямих.

Вправа 2.5.21. Доведіть, що будь-який рух вигляду

$$\begin{aligned} M\colon\quad & x' = ax + by;\\ & y' = bx - ay, \quad \text{де} \quad a^2 + b^2 = 1, \end{aligned}$$

є відбиттям стосовно прямої, яка проходить через початок координат.

Вправа 2.5.22. Поясніть чому

$$M\colon\quad x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1;$$

$$y' = \quad \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1$$

є рухом, який змінює орієнтацію, однак не є відбиттям. З іншого боку, M має інваріантну пряму. Знайдіть її.

Вправа 2.5.23. Доведіть, що кожен рух, що змінює орієнтацію, є композицією жорсткого руху та одного відбиття.

Вправа 2.5.24. Доведіть такі твердження:

(a) Кожен рух можна виразити як композицію щонайбільше з трьох відбить.

(b) Будь-який рух з однією нерухомою точкою є композицію не більше двох відбить.

Бібліоґрафія

[1] M. K. Agoston, *Computer graphics and geometric modeling*, Springer, London, 2005.

[2] G. E. Forsythe and C. B. Moler, *Computer solution of linear algebraic systems*, Prentice-Hall, Inc., 1967.

[3] D. Gans, *Transformations and geometries*, Appleton-Century-Crofts, 1969.

[4] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **51** (1955), 406–413.

[5] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized inverse of matrices and its applications*, John Wiley & Sons, 1971.

[6] H. Yanai, K. Takeuchi, and Y. Takane, *Projection matrices, generalized inverse matrices, and singular value decomposition*, Springer, New York, 2011.

Предметний покажчик

Словник-мінімум англо-українських термінів

A

abelian ~ абелевий
abelian group ~ абелева група
above ~ згаданий вище, написаний вище, розташований вище
actually ~ насправді, фактично
additive ~ адитивний
additive group of integers ~ адитивна група цілих чисел
adjoint ~ приєднаний, спряжений
adjoint transformation ~ спряжене перетворення
affine ~ афінний
affine closure ~ афінне замикання
affine hull ~ афінна оболонка
algorithm ~ алгоритм
allow ~ дозволяти
along ~ вздовж, разом з
alternative ~ альтернативний
although ~ хоча
angle ~ кут
another ~ інший
answer ~ відповідь
antisymmetric ~ антисиметричний
antisymmetric relation ~ антисиметричне відношення
approach ~ підхід, подача
arbitrary ~ довільний, довільно вибраний
associativity ~ асоціативність
axis ~ вісь
axis for the reflection ~ вісь (для) відбиття

B

back ~ зворотний
barycenter ~ барицентр
barycentric ~ барицентричний
base ~ база, базис
between ~ між
betweenness relation ~ відношення "між", проміжність
bias ~ зміщення
bilinear ~ білінійний
binary relation ~ бінарне відношення

C

can ~ могти
cancel ~ анулювати, викреслити, викреслювати, скоротити, скорочувати
carry ~ переносити
center of s rotation ~ центр обертання
certain ~ деякий
certainly ~ безумовно
characteristic ~ характеристика, характеристичний
characteristic of a field ~ характеристика поля
characteristic polynomial ~ характеристичний многочлен
characterization ~ характеристика
check ~ перевірити
circle ~ коло
circle of latitude ~ коло широти, паралель (поверхні обертання)
clockwise ~ за годинниковою стрілкою
cofactor ~ алгебраїчне доповнення (матриці)
collinear ~ колінеарний
collinear points ~ колінеарні точки
collinear vectors ~ колінеарні вектори
collinearity ~ колінеарність
column ~ стовпець
column rank ~ стовпцевий ранг (матриці)
combination ~ комбінація
common divisor ~ спільний дільник
common multiple ~ спільне кратне
commutative ~ комутативний
commutative group ~ комутативна група
commutativity ~ комутативність
compact ~ компактний
compare ~ порівнювати
compatible ~ сумісний
complement ~ доповнення

complete ∼ повний
complex ∼ комплекс
composite ∼ складений
composite function ∼ складена функція
composite map ∼ складене відображення
composition ∼ композиція
composition of maps ∼ композиція відображень
congruence ∼ конгруентність (подібність матриць)
congruence relation ∼ відношення конгруентності
congruent ∼ конгруентний
congruent figures ∼ конгруентні фігури
congruent matrices ∼ конгруентні (подібні) матриці
congruent transformation ∼ конгруентне перетворення
consistent ∼ сумісний, узгоджений
constructive ∼ конструктивний
constructive proof ∼ конструктивне доведення
contain ∼ містити
convert ∼ конвертувати, перетворювати
convex ∼ опуклий
convex set ∼ опукла множина
correct ∼ правильний, виправляти
correct result ∼ правильний результат
countable ∼ зліченний
countable set ∼ зліченна множина
counter-clockwise ∼ проти годинникової стрілки
cross product ∼ векторний добуток

D

decomposition ∼ розклад
definition ∼ означення
degenerate ∼ вироджений
degree ∼ степінь, порядок
degree of a polynomial ∼ степінь полінома (многочлена)
denominator ∼ знаменник
denote ∼ позначати
dependent ∼ залежний
derivation ∼ виведення, диференціювання, операція взяття похідної, взяття похідної
derive ∼ виводити, отримувати, брати похідну
derived ∼ похідний, виведений
description ∼ опис, описання
deserve ∼ заслуговувати
desire ∼ бажати, зичити
desired ∼ бажаний
determinant ∼ визначник, детермінант
deviation ∼ відхилення
diagonal ∼ діагональ, діагональний
diagonal map ∼ діагональне відображення
diagonalizable ∼ діагоналізовний
diagonalized ∼ діагоналізований, зведений до діагонального вигляду
difference ∼ відмінність, різниця
different ∼ інший, різний
dimension ∼ вимір
dimensional ∼ вимірний
directed ∼ напрямлений
direction ∼ напрямок
direction cosine ∼ напрямний косинус
direction vector ∼ напрямний вектор (прямої)
discriminant ∼ дискримінант
discuss ∼ дискутувати, обговорювати
disjoint ∼ диз'юнктний
displacement ∼ переміщення
distance ∼ відстань
distance-preserving map ∼ відображення, яке зберігає відстань
distinguish ∼ розрізняти, характеризувати, розпізнати
divide ∼ ділити
divisor ∼ дільник
domain ∼ область визначення
dot ∼ крапка, точка
dot product ∼ точковий добуток
dual ∼ дуальний
dual space ∼ дуальний простір

E

eigenspace ∼ власний простір
eigenvalue ∼ власне значення
eigenvector ∼ власний вектор
entirely ∼ повністю, цілком
equality ∼ рівність
equation ∼ рівняння
equivalence ∼ еквівалентність, еквіваленція
equivalence class ∼ клас еквівалентністі
equivalence relation ∼ відношення еквівалентності
equivalent ∼ еквівалентний
erase ∼ викреслити, викреслювати, стирати
especially ∼ особливо, надто
establish ∼ стверджувати
even ∼ парний
even permutation ∼ парна підстановка
evidently ∼ очевидно
example ∼ приклад
except ∼ окрім, за винятком, виключати
existence ∼ існування
existence theorem ∼ теорема існування
explain ∼ пояснювати, тлумачити
explicit ∼ явний, точний
exponent ∼ показник, показник степені, степінь, порядок, експонента

express ~ виражати
expression ~ вираз, зображення

F

face ~ грань (симплекса)
factor ~ множник, розкладати на множники
family ~ сім'я
fixed ~ нерухомий, фіксований
fixed point of a map ~ нерухома точка відображення
fixed set ~ нерухома множина
flat ~ плоский
formal ~ формальний
function ~ функція (відображення)
functional ~ функціональний
functional form ~ функціональний вигляд (функціональна форма)
furthermore ~ крім того

G

gap ~ діра, пробіл, прогалина,
Gauss elimination ~ метод Гаусса
gcd ~ найбільший спільний дільник
general rotation about $\boldsymbol{p}$ through an angle θ ~ узагальнене обертання навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ
generalized ~ загальний, узагальнений
generalized cross product ~ узагальнений векторний добуток
geometric ~ геометричний
glide reflection ~ відбиття ковзання (ковзне відбиття)
graph ~ граф, графік
graph of a map ~ графік відображення
the Gram-Schmidt algorithm ~ алгоритм Грама-Шмідта
greatest common divisor ~ найбільший спільний дільник
group ~ група
group of integers modulo n ~ група лишків за модулем n

H

halfplane ~ півлощина
height ~ висота
Hermitian ~ ермітовий
homogeneous ~ однорідний
homomorphism ~ гомоморфізм
horizontal ~ горизонтальний
however ~ все-таки, однак, проте
hyperplane ~ гіперплощина

I

identity ~ одиниця, рівність, тотожність
identity element ~ одиничний елемент, одиниця
identity map ~ тотожне відображення
identity relation ~ відношення рівності
implement ~ реалізовувати
implementation ~ реалізація
implicit ~ неявний
implicitly ~ неявно, не прямо
important ~ важливий
incomparable ~ непорівняльний
independent ~ незалежний
index ~ індекс
induce ~ індукувати
induced ~ індукований
induced equivalence relation ~ індуковане відношення еквівалентності
induction ~ індукція
inductive hypothesis ~ припущення індукції
inequality ~ нерівність
infinite ~ нескінченний
initial ~ початковий
injection ~ ін'єкція
injective ~ ін'єктивний
injective function ~ ін'єктивна функція
injective map ~ ін'єктивне відображення
inner ~ внутрішній
inner product ~ внутрішній (скалярний) добуток
instead ~ замість (цього)
integer ~ ціле число
intersection ~ перетин
invariant ~ інваріант, інваріантний
invariant set ~ інваріантна множина
inverse ~ обернений, інверсний
inverse image ~ повний прообраз
inverse map ~ обернене відображення
invertible ~ оборотний
invertible matrix ~ оборотна матриця
isometry ~ ізометрія
isomorphic ~ ізоморфний
isomorphism ~ ізоморфізм

J

just ~ щойно

K

kernel ~ ядро

L

label ~ мітка, мітити
lcm ~ найменше спільне кратне
lead ~ вести, керувати
least common multiple ~ найменше спільне кратне
left ~ лівий
length ~ довжина
line ~ пряма

line segment ~ відрізок
linear ~ лінійний
linear group ~ лінійна група
linear order ~ лінійний порядок
linearly ~ лінійно
linearly dependent ~ лінійно залежні
linearly dependent vectors ~ лінійно залежні вектори
lower-triangular matrix ~ нижньотрикутна матриця

M

make ~ робити
map ~ відображення, відображати
mapping ~ відображення
matrices ~ матриці
matrix ~ матриця
maximal ~ максимальний
measure ~ вимірювати, міра
meet ~ перетин, перетинати, зустрічати
meridian ~ мередіан
messy ~ безладний, брудним
method ~ метод
midpoint ~ середня точка, середина, центр
minimal ~ мінімальний
minor ~ мінор (матриці)
modulus ~ модуль
Moebius strip ~ стрічка Мьобіуса
motion ~ рух
move ~ рухати, переміщати
moving ~ переміщення
Möbius strip ~ стрічка Мьобіуса
multilinear map ~ полілінійне відображення
multiple ~ кратне, кратне число
multiplication ~ множення
multiplicative ~ мультиплікативний
mutually orthogonal vectors ~ попарно ортогональні вектори
mutually prime integers ~ взаємно первинні цілі числа

N

namely ~ а саме
nearby ~ близький
nearby points ~ близькі точки
natural number ~ натуральне число
necessarily ~ неминуче, неодмінно, обов'язково
neutral element ~ нейтральний елемент, одиниця
noncollinear ~ неколінеарні
noncollinear points ~ неколінеарні точки
noncollinear vectors ~ неколінеарні вектори
noncollinearity ~ неколінеарність
nondegenerate ~ невироджений
nonnegative ~ невід'ємний
nonsingular ~ невироджений, неособливий
nonvertical ~ невертикальний
nonzero vector ~ ненульовий вектор
non-collinear points ~ неколінійні точки
normal ~ нормальний
normal subgroup ~ нормальна підгрупа
notation ~ позначення
number ~ число, кількість

O

occurrence ~ входження, екземпляр, поява, виникнення
odd ~ непарний
often ~ часто
one-to-one ~ взаємно однозначний
one-to-one relation ~ взаємно однозначне відношення
operation ~ операція
operator ~ оператор
opposite ~ протилежний
opposite orientation ~ протилежна орієнтація
order ~ порядок
ordinary ~ звичайний, ординарний
orient ~ орієнтація, орієнтувати
orientability ~ орієнтованість
orientable ~ орієнтований
orientation ~ орієнтація
orientation preserving motion ~ рух, що зберігає орієнтацію
orientation reversing motion ~ рух, що розвертає (змінює) орієнтацію
oriented vector space ~ орієнтований векторний простір
origin ~ початок, джерело
orthogonal ~ ортогональний
orthogonal basis ~ ортогональна база
orthogonal complement ~ ортогональне доповнення
orthogonal group ~ ортогональна група
orthonormal basis ~ ортонормована база
outline ~ ескіз, схема

P

pair ~ пара
paper ~ папір
parallel ~ паралельний
parametric ~ параметричний
parameterization ~ параметризація
parity ~ парність
partial ~ частковий
partial order ~ частковий порядок
path ~ шлях
permutation ~ підстановка

permutation group ~ група підстановок
perpendicular ~ перпендикуляр, перпендикулярний, вертикальний
plane ~ площина
point ~ точка
polar coordinates ~ полярні координати
polyhedron ~ многогранник
position ~ позиція, розташування, місце, розряд
positive definite ~ додатно визначений
positive integer ~ натуральне число відмінне від нуля
possibly ~ можливо
preliminary ~ попередній
prime ~ первинний
prime number ~ первинне (просте) число
Principal Axes Theorem ~ теорема про зведення до діагонального вигляду
product ~ добуток
product map ~ добуток відображень
projection ~ проєкція
proof ~ доведення
proper ~ власний
prove ~ доводити

Q

quadratic ~ квадратичний
quadratic map ~ квадратичне відображення (квадратична форма)
quadratic residue modulo ~ квадратично залишковий за модулем
quotient group ~ фактор-група
quotient set ~ фактор-множина
quotient space ~ фактор-простір

R

radius ~ радіус
raise ~ висувати, ставити
raise a question ~ ставити запитання
range ~ область значень
rank ~ ранг
rather ~ краще
rational ~ раціональний
rational number ~ раціональне число
ray ~ промінь
real ~ дійсний
real number ~ дійсне число
reason ~ причина
reductive ~ редукційний
reflection about a line ~ відбиттям стосовно прямої
reflexive ~ рефлексивний
reflexive relation ~ рефлексивне відношення
relation ~ відношення
relationship ~ взаємовідношення, залежність, зв'язок
relatively prime integers ~ взаємно первинні (прості) цілі числа
remainder ~ залишок, лишок, остача, наріст
represent ~ зображати, зображувати, представляти
representative ~ представник
residual ~ частка
resulting ~ отриманий
reversible ~ оборотний
revolution ~ обертання, поворот
right ~ правий
rigid ~ жорсткий
rigid motion ~ жорсткий рух
root ~ корінь
rotation ~ обертання
rotation about the origin through an angle ~ обертання навколо початку координат на кут
row ~ рядок
row of a matrix ~ рядок матриці
row rank ~ рядковий ранг (матриці)

S

satisfactory ~ задовільний
scalar ~ скалярний
scalar product ~ скалярний добуток
segment ~ відрізок, сегмент
self-adjoint ~ самоспряжений
separately ~ нарізно, окремо
sequence ~ послідовність
set ~ множина, прийняти, ставити
sign ~ знак
sign of a permutation ~ знак підстановки
signature ~ сигнатура
simplex ~ симплекс
similar ~ подібний
similarity ~ подібність
simplices ~ симплекси
simplicial ~ симпліціальний
simplicial complex ~ симпліціальний комплекс
simplicity ~ простота
simplify ~ спростити, спрощувати
singular ~ вироджений, особливий, сингулярний
singular value ~ сингулярне значення (матриці)
singular value decomposition ~ сингулярний розклад (матриці)
slope ~ кутовий коефіцієнт прямої, нахил
smallest ~ найменший
smallest element ~ найменший еоемент
smooth ~ гладкий

smooth surface ~ гладка поверхня
solid ~ суцільний
solid triangle ~ суцільний трикутник
solution ~ розв'язок
solve ~ розв'язувати
span ~ лінійна оболонка, породжувати, оточувати
special orthogonal matrix ~ спеціальна ортогональна матриця
special orthogonal group ~ спеціальна ортогональна група
square ~ квадрат
standard ~ стандартний
standard orientation ~ стандартна орієнтація
step ~ крок
strict ~ строгий
string ~ рядок, слово, стрічка
strip ~ смужка, стрічка
strong ~ сильний
stronger ~ сильніший
subgroup ~ підгрупа
subset ~ підмножина
subspace ~ підпростір
substitute ~ підставити, підставляти
substituting ~ підстановка
summarize ~ підсумовувати, резюмувати
surface ~ поверхня
surface of revolution ~ поверхня обертання
surjection ~ сюр'єкція
surjective ~ сюр'єктивний
surjective function ~ сюр'єктивна функція
surjective map ~ сюр'єктивне відображення
symmetric ~ симетричний
symmetric group ~ симетрична група
symmetric relation ~ симетричне відношення

T

tangent ~ дотичний
tangent plane ~ дотична площина
target ~ мета
term ~ вираз, терм, термін
tetrahedron ~ тетраедр
theorem ~ теорема
through ~ через, крізь
torus ~ тор
total order ~ лінійний порядок
trace ~ слід (матриці)
transformation ~ перетворення
transitive ~ транзитивний
transitive relation ~ транзитивне відношення
translation ~ паралельне перенесення, зсув
translation vector ~ вектор паралельного перенесення
transpose ~ транспонована, транспонування
transpose matrix ~ транспонована матриця
transposition ~ транспозиція
transverse ~ поперечний, розташовуватися впоперек
transverse plane ~ поперечна площина, осьова площина
triangle ~ трикутник
triple product ~ мішаний добуток (векторів)
trivial ~ тривіальний
trivial group ~ тривіальна група
tuple ~ кортеж, впорядкований набір
two ~ два

U

unambiguity ~ однозначність
unambiguous ~ однозначний
unfortunately ~ на жаль
unique ~ єдиний (у своєму роді), неповторний
uniqueness ~ єдиність
unit ~ одиничний
unit vector ~ одиничний вектор
unitary ~ унітарний
unitary matrix ~ унітарна матриця
unknown ~ невідомий
upper-triangular matrix ~ верхньотрикутна матриця
use ~ вживання, застосування, користування, вживати, використати, використовувати, користуватися
usually ~ звичайно, зазвичай

V

value ~ значення
variable ~ змінна
vector ~ вектор
vector addition ~ додавання векторів
version ~ варіант, версія
vertex ~ вершина
vertices ~ вершини
vertical ~ ветикальний

W

way ~ дорога, спосіб, шлях
weakly ~ слабко
well defined ~ коректно визначений
well defined relation ~ коректно визначене відношення
well-order ~ повний порядок
well-ordering ~ повне впорядкування
whence ~ звідки
whenever ~ щоразу, як тільки
why ~ чому

worst ~ найгірший
write ~ написати, писати

Z

zero ~ нуль