Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 38: Афінні перетворення

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ∎

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ∎

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ∎

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ∎

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ◻

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ∎

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ∎

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ∎

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Означення 2.4.1

Бієктивне відображення $\boldsymbol{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке відображає прямі в прямі, називається *афінним перетворенням*.

Насправді, афінні перетворення можна охарактеризувати дещо сильніше.

Теорема 2.4.2

Кожна бієктивне відображення лінійного простору $\mathbb{R}^n$ на себе, що зберігає колінеарність, є афінним перетворенням.

Доведення. Єдине, що потрібно довести, це те, що прямі відображаються на прямі. Це доведення аналогічне до того, що було зроблено в доведенні леми 2.2.5 і залишаємо його читачеві в якості вправи. ■

Доведення теореми 2.4.3 залишаємо читачеві в якості вправи.

Теорема 2.4.3

Множина афінних перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ утворює групу стосовно операції композиції відображень, що містить множину перетворень подібності як підгрупу.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad (1)$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad (1)$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ■

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ■

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ■

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ■

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Афінні перетворення, подібно як рухи та перетворення подібності, мають просте аналітичне описання. Перш ніж перейти до основного результату для цих відображень на площині, проаналізуємо перетворення з рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2.4.4

Множина перетворень лінійного простору $\mathbb{R}^n$ визначена рівняннями (1) і (2) утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Доведення. Це просто доводиться. Основне спостереження полягає в тому, що оскільки визначник у (2) відмінний від нуля, перетворення мають обернені до них перетворення. Також легко доводиться, що обернені відображення визначаються рівняннями того самого вигляду. ∎

Перетворення, визначені рівняннями (1) і (2), чітко включають рухи та та відображення подібності. Варто зазначити, що вони є просто композицією лінійного перетворення площини з паралельним перенесенням. Є ще два цікавих особливих випадки.

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Афінні перетворення

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Афінні перетворення

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \quad dy, \qquad \text{де} \;\; ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \quad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Означення 2.4.5

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= ax; \\ y' &= \qquad dy, \qquad \text{де} \quad ad \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

називається (*локальним*) *перетворенням масштабування*. Це відображення називається *глобальним перетворенням масштабування*, якщо $a = d$.

Звернемо увагу, що перетворення масштабування, яке визначається рівняннями (3), змінює орієнтацію, якщо $ad < 0$. Воно буде подібністю, якщо $a = d > 0$. Легко перевірити, що обернене до перетворення масштабування, яке означене вище, є перетворенням масштабування

$$\begin{aligned} x' &= (1/a)x; \\ y' &= \qquad (1/d)y. \end{aligned}$$

Афінні перетворення

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі* x. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі* y.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= \phantom{cx+{}} x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Означення 2.4.6

Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= cx + y \end{aligned} \tag{4}$$

називається *зсувом за напрямком осі x*. Лінійне перетворення площини, яке визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x' &= x + by; \\ y' &= y \end{aligned} \tag{5}$$

називається *зсувом за напрямком осі y*.

Легко доводиться, що обернене відображення до зсуву є зсувом.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\dfrac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини M, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $M_0 = TM$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |M_0(\vec{e}_1)|$ і R — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}M_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $M_1 = TM_0$. Звідси випливає, що перетворення M_1 визначається рівняннями

$$\begin{aligned} M_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ M_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини M, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $M_0 = TM$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |M_0(\vec{e}_1)|$ і R — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r} M_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $M_1 = TM_0$. Звідси випливає, що перетворення M_1 визначається рівняннями

$$\begin{aligned} M_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ M_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини M, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $M_0 = TM$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |M_0(\vec{e}_1)|$ і R — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}M_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $M_1 = TM_0$. Звідси випливає, що перетворення M_1 визначається рівняннями

$$\begin{aligned} M_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ M_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{TM}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{TM}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини M, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $M_0 = TM$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |M_0(\vec{e}_1)|$ і R — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}M_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $M_1 = TM_0$. Звідси випливає, що перетворення M_1 визначається рівняннями

$$\begin{aligned} M_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ M_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1 = r\vec{e}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_2) &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини M, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $M_0 = TM$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |M_0(\vec{e}_1)|$ і R — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}M_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $M_1 = TM_0$. Звідси випливає, що перетворення M_1 визначається рівняннями

$$\begin{aligned} M_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ M_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{e}_1)$ на вектор $\vec{e}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_1) &= \vec{v}_1 = r\vec{e}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{e}_2) &= \vec{v}_2 = s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)$ на вектор $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1 = r\vec{\boldsymbol{e}}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_2) &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 = s\vec{\boldsymbol{e}}_1 + t\vec{\boldsymbol{e}}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{TM}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)$ на вектор $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{TM}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1 = r\vec{\boldsymbol{e}}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_2) &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 = s\vec{\boldsymbol{e}}_1 + t\vec{\boldsymbol{e}}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)$ на вектор $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1 = r\vec{\boldsymbol{e}}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_2) &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 = s\vec{\boldsymbol{e}}_1 + t\vec{\boldsymbol{e}}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{TM}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)$ на вектор $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{TM}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1 = r\vec{\boldsymbol{e}}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_2) &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 = s\vec{\boldsymbol{e}}_1 + t\vec{\boldsymbol{e}}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)$ на вектор $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1 = r\vec{\boldsymbol{e}}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_2) &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 = s\vec{\boldsymbol{e}}_1 + t\vec{\boldsymbol{e}}_2. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.7

Кожне перетворення площини, визначене рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожну композицію таких перетворень можна описати рівняннями вигляду (1).

Доведення. Нехай перетворення площини $\boldsymbol{M}$, яке визначається рівняннями (1) і приймемо $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}$ — паралельне перенесення з вектором паралельного перенесення $(-m, -n)$. Нехай $r = |\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)|$ і $\boldsymbol{R}$ — обертання навколо початку координат, яке повертає одиничний вектор $\frac{1}{r}\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{e}}_1)$ на вектор $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, і нехай $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_0$. Звідси випливає, що перетворення $\boldsymbol{M}_1$ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1 = r\vec{\boldsymbol{e}}_1; \\ \boldsymbol{M}_1(\vec{\boldsymbol{e}}_2) &= \vec{\boldsymbol{v}}_2 = s\vec{\boldsymbol{e}}_1 + t\vec{\boldsymbol{e}}_2. \end{aligned}$$

Афінні перетворення

Визначимо лінійне перетворення S так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Визначимо лінійне перетворення S так

$$S(\vec{v}_1) = \vec{v}_1;$$
$$S(\vec{v}_2) = (\vec{v}_2 \bullet \vec{e}_2)\,\vec{e}_2 = \vec{w}_2 = t\vec{e}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення S коректно визначене. Насправді легко довести, що S є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень R і S.

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Афінні перетворення

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Афінні перетворення

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\, \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = \quad x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Афінні перетворення

Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1;$$
$$\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$x' = x;$$
$$y' = -\frac{s}{t}x + y.$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.

Афінні перетворення

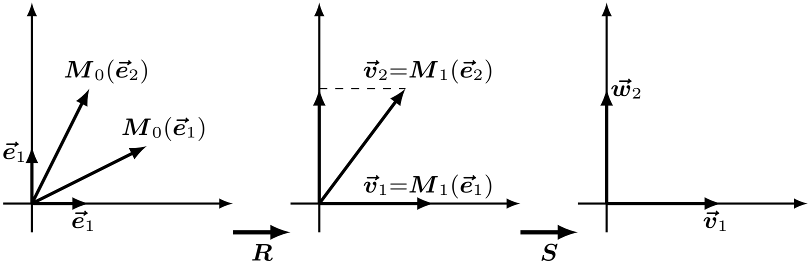
Визначимо лінійне перетворення $\boldsymbol{S}$ так

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_1) &= \vec{\boldsymbol{v}}_1;\\ \boldsymbol{S}(\vec{\boldsymbol{v}}_2) &= (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{e}}_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_2 = t\vec{\boldsymbol{e}}_2.\end{aligned}$$

Оскільки лінійне перетворення є повністю визначеним, коли воно визначено на елементах бази, то відображення $\boldsymbol{S}$ коректно визначене. Насправді легко довести, що $\boldsymbol{S}$ є зсувом у напрямку осі x, який визначається рівняннями

$$\begin{aligned}x' &= \quad x;\\ y' &= -\frac{s}{t}x + y.\end{aligned}$$

На рис. зображено дію відображень $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{S}$.



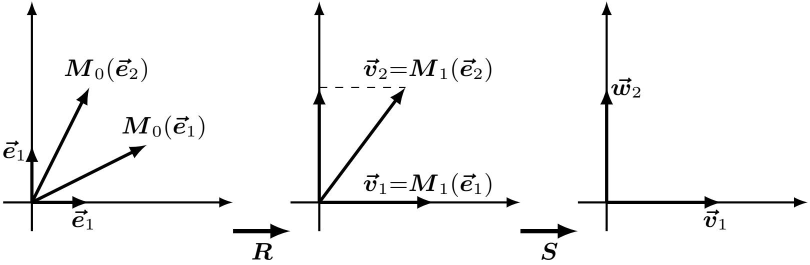
Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$x' = rx;$$
$$y' = \quad sy.$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.



Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

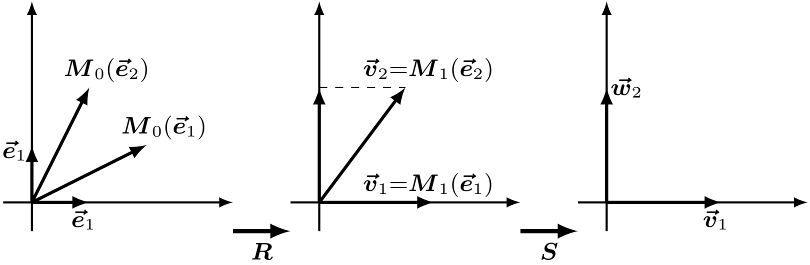
$$\begin{aligned} x' &= rx; \\ y' &= \qquad sy. \end{aligned}$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено. ∎

Афінні перетворення



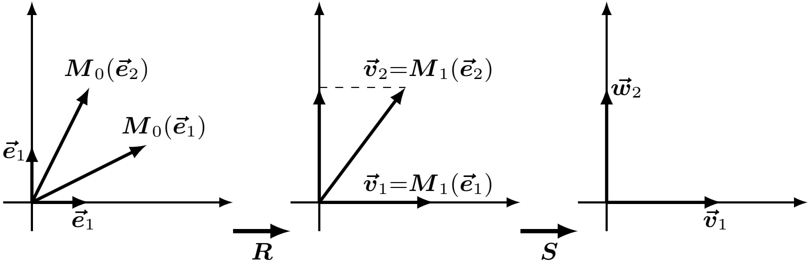
Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$\begin{aligned} x' &= rx; \\ y' &= \qquad sy. \end{aligned}$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.



Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

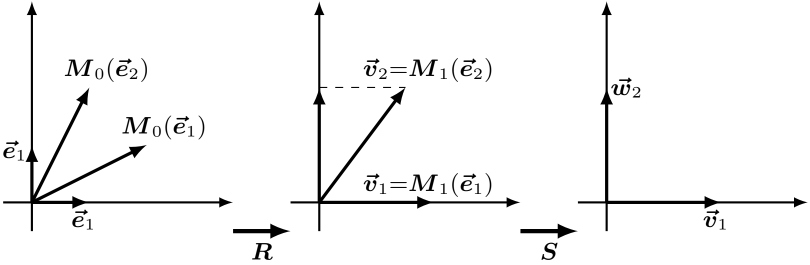
$$x' = rx;$$
$$y' = \qquad sy.$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.

Афінні перетворення



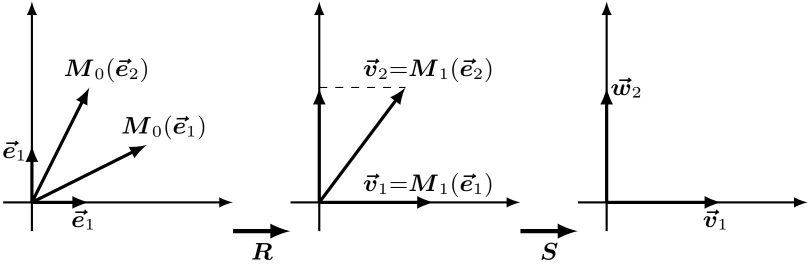
Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$x' = rx;$$
$$y' = \qquad sy.$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.



Відображення $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

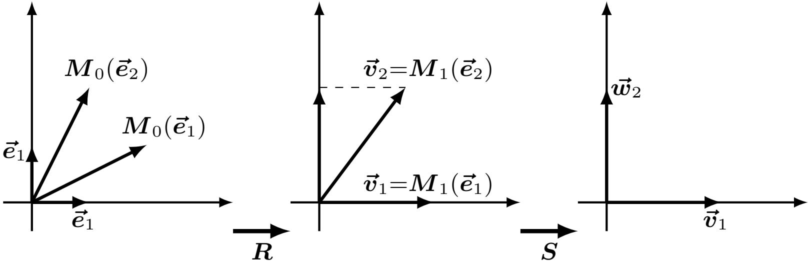
$$\begin{aligned} x' &= rx; \\ y' &= \qquad sy. \end{aligned}$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.

Афінні перетворення



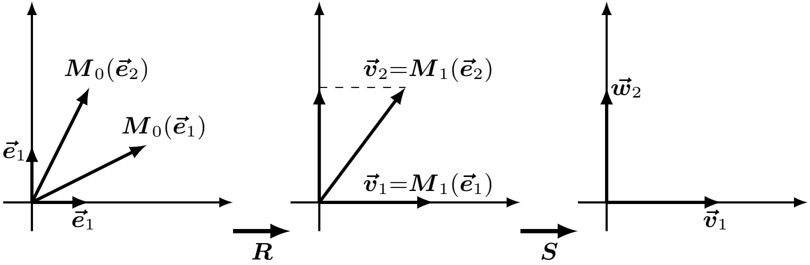
Відображення $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$x' = rx;$$
$$y' = \qquad sy.$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено. ■



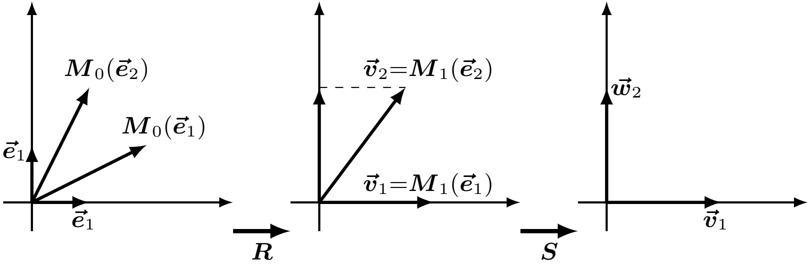
Відображення $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$\begin{aligned} x' &= rx; \\ y' &= \qquad sy. \end{aligned}$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.



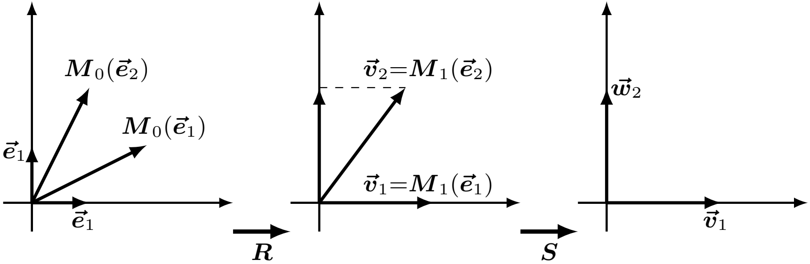
Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$\begin{aligned} x' &= rx; \\ y' &= \qquad sy. \end{aligned}$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1} R^{-1} S^{-1} M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.



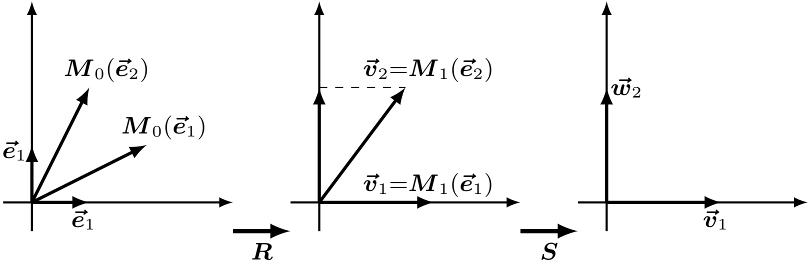
Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$x' = rx;$$
$$y' = \qquad sy.$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено.



Відображння $M_2 = SM_1$ тепер є перетворенням масштабування, яке визначається так

$$x' = rx;$$
$$y' = \quad sy.$$

Підсумовуючи, вище доведене, отримуємо, що

$$M = T^{-1}R^{-1}S^{-1}M_2$$

і першу частину теореми доведено. Оскільки обернене твердження до теореми очевидне, то теорему 2.4.7 доведено. ■

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай (A, B, C) і (A', B', C') — дві трійки неколінеарних точок. Нехай T_1 і T_2 — перетворення, які відображають точки A та A', відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $T_1(A, B, C) = (\mathbf{0}, B_1, C_1)$ і $T_2(A', B', C') = (\mathbf{0}, B_2, C_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівнянннями (1)

$$x' = ax + by + m; \quad y' = cx + dy + n, \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай (A, B, C) і (A', B', C') — дві трійки неколінеарних точок. Нехай T_1 і T_2 — перетворення, які відображають точки A та A', відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $T_1(A, B, C) = (\mathbf{0}, B_1, C_1)$ і $T_2(A', B', C') = (\mathbf{0}, B_2, C_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай (A, B, C) і (A', B', C') — дві трійки неколінеарних точок. Нехай T_1 і T_2 — перетворення, які відображають точки A та A', відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $T_1(A, B, C) = (\mathbf{0}, B_1, C_1)$ і $T_2(A', B', C') = (\mathbf{0}, B_2, C_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ і $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}')$ — дві трійки неколінеарних точок. Нехай $\boldsymbol{T}_1$ і $\boldsymbol{T}_2$ — перетворення, які відображають точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{A}'$, відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$ і $\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}') = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай (A, B, C) і (A', B', C') — дві трійки неколінеарних точок. Нехай T_1 і T_2 — перетворення, які відображають точки A та A', відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $T_1(A, B, C) = (\mathbf{0}, B_1, C_1)$ і $T_2(A', B', C') = (\mathbf{0}, B_2, C_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ і $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}')$ — дві трійки неколінеарних точок. Нехай $\boldsymbol{T}_1$ і $\boldsymbol{T}_2$ — перетворення, які відображають точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{A}'$, відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$ і $\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}') = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ і $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}')$ — дві трійки неколінеарних точок. Нехай $\boldsymbol{T}_1$ і $\boldsymbol{T}_2$ — перетворення, які відображають точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{A}'$, відповідно, у початок координат $\boldsymbol{0}$. Нехай $\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$ і $\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}') = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ і $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}')$ — дві трійки неколінеарних точок. Нехай $\boldsymbol{T}_1$ і $\boldsymbol{T}_2$ — перетворення, які відображають точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{A}'$, відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$ і $\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}') = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$. (див. рис.).

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

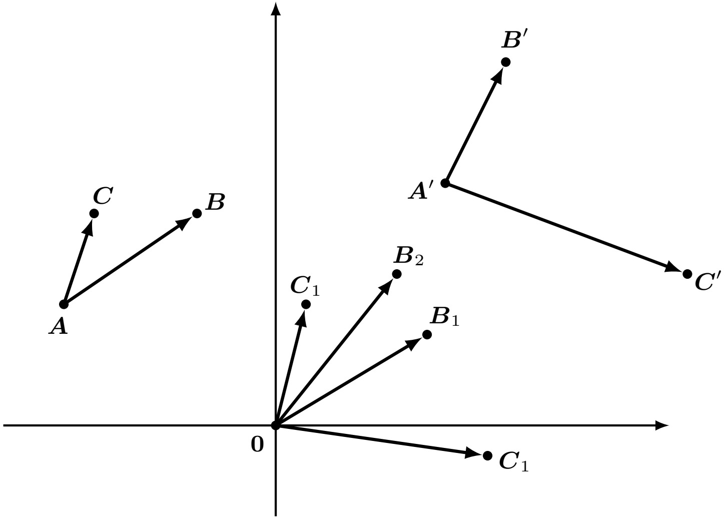
$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ і $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}')$ — дві трійки неколінеарних точок. Нехай $\boldsymbol{T}_1$ і $\boldsymbol{T}_2$ — перетворення, які відображають точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{A}'$, відповідно, у початок координат $\mathbf{0}$. Нехай $\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$ і $\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}') = (\mathbf{0}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$. (див. рис.).

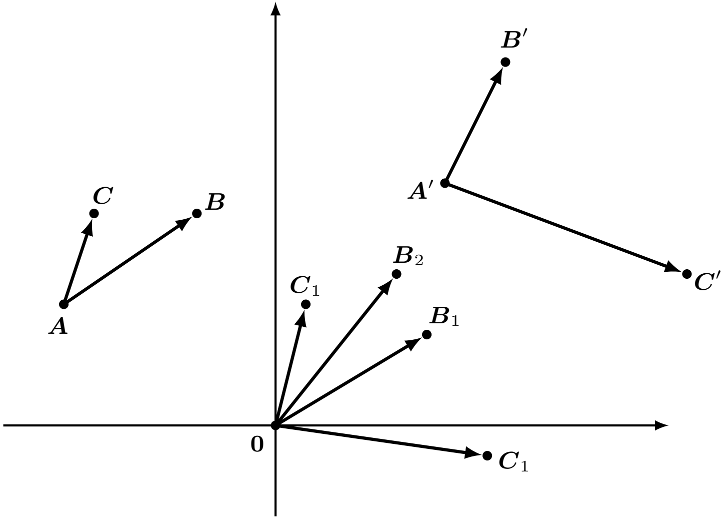
Афінні перетворення

Оскільки вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{C}_1$ і вектори $\vec{B}_2$ і $\vec{C}_2$ є базами для простору $\mathbb{R}^2$, то існує таке лінійне перетворення M_0, що $M_0(\vec{B}_1, \vec{C}_1) = (\vec{B}_2, \vec{C}_2)$. Відображення $M = T_2^{-1} M_0 T_1$ є шуканим.

Афінні перетворення

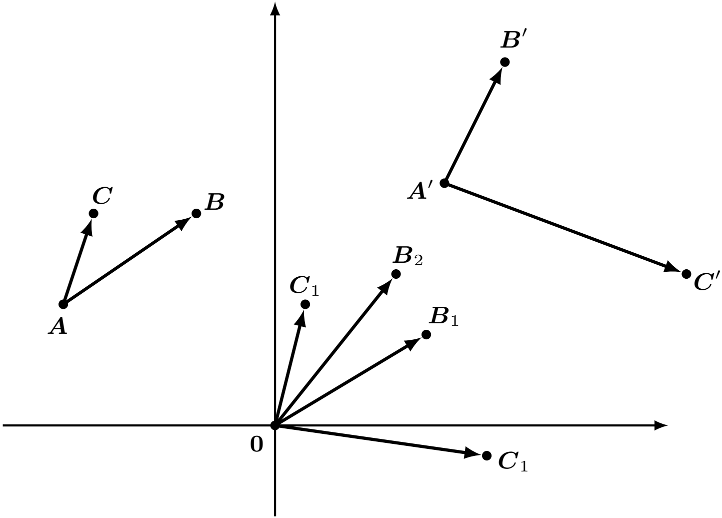


Оскільки вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{C}_1$ і вектори $\vec{B}_2$ і $\vec{C}_2$ є базами для простору $\mathbb{R}^2$, то існує таке лінійне перетворення M_0, що $M_0(\vec{B}_1, \vec{C}_1) = (\vec{B}_2, \vec{C}_2)$. Відображення $M = T_2^{-1} M_0 T_1$ є шуканим.

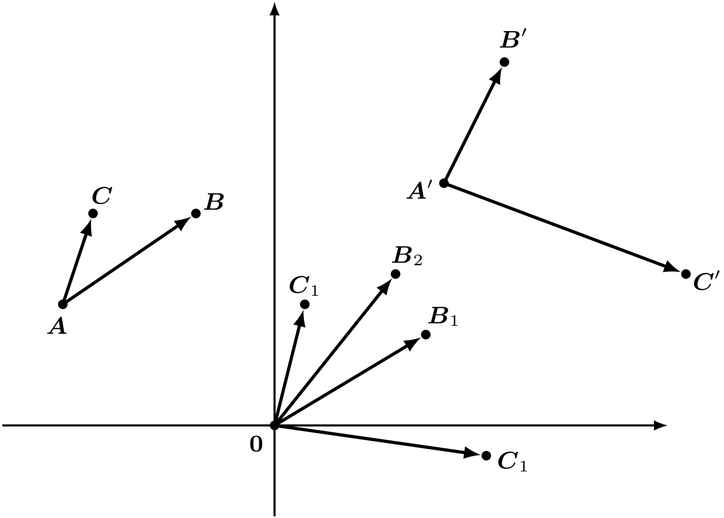


Оскільки вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{C}_1$ і вектори $\vec{B}_2$ і $\vec{C}_2$ є базами для простору $\mathbb{R}^2$, то існує таке лінійне перетворення M_0, що $M_0(\vec{B}_1, \vec{C}_1) = (\vec{B}_2, \vec{C}_2)$. Відображення $M = T_2^{-1} M_0 T_1$ є шуканим.

Афінні перетворення



Оскільки вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{C}_1$ і вектори $\vec{B}_2$ і $\vec{C}_2$ є базами для простору $\mathbb{R}^2$, то існує таке лінійне перетворення M_0, що $M_0(\vec{B}_1, \vec{C}_1) = (\vec{B}_2, \vec{C}_2)$.
Відображення $M = T_2^{-1} M_0 T_1$ є шуканим.



Оскільки вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{C}_1$ і вектори $\vec{B}_2$ і $\vec{C}_2$ є базами для простору $\mathbb{R}^2$, то існує таке лінійне перетворення M_0, що $M_0(\vec{B}_1, \vec{C}_1) = (\vec{B}_2, \vec{C}_2)$.
Відображення $M = T_2^{-1} M_0 T_1$ є шуканим.

Щоб довести єдиність перетворенням M, припустимо, що існує інше таке відображення M', яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$M^{-1}M'(A,B,C) = (A,B,C).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення T, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки A, B і C, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $A = \mathbf{0}$, а тому T є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{B}$ і $\vec{C}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення T визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення T — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Афінні перетворення

Щоб довести єдиність перетворенням M, припустимо, що існує інше таке відображення M', яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$M^{-1}M'(A, B, C) = (A, B, C).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення T, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки A, B і C, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $A = 0$, а тому T є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{B}$ і $\vec{C}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення T визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення T — тотожне. ■

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням M, припустимо, що існує інше таке відображення M', яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$M^{-1}M'(A,B,C) = (A,B,C).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення T, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки A, B і C, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $A = \mathbf{0}$, а тому T є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{B}$ і $\vec{C}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення T визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення T — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням M, припустимо, що існує інше таке відображення M', яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$M^{-1}M'(A, B, C) = (A, B, C).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення T, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки A, B і C, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $A = \mathbf{0}$, а тому T є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{B}$ і $\vec{C}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення T визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення T — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне. ■

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне. ∎

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне. ■

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне. ■

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням M, припустимо, що існує інше таке відображення M', яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$M^{-1}M'(A, B, C) = (A, B, C).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення T, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки A, B і C, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $A = \mathbf{0}$, а тому T є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{B}$ і $\vec{C}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення T визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення T — тотожне. ∎

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням M, припустимо, що існує інше таке відображення M', яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне.

Повернемося до афінних перетворень.

Щоб довести єдиність перетворенням $\boldsymbol{M}$, припустимо, що існує інше таке відображення $\boldsymbol{M}'$, яке задовольняє умови теореми. Тоді

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}).$$

Тому, як зазвичай, достатньо довести, що будь-яке відображення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

яке має три нерухомі неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, є тотожним відображенням. Є багато способів довести це. Наприклад, ми можемо припустити, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, а тому $\boldsymbol{T}$ є лінійним перетворенням. Тоді вектори $\vec{\boldsymbol{B}}$ і $\vec{\boldsymbol{C}}$ є базою для площини, а оскільки лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ визначається образами на елементах бази, то лінійне перетворення $\boldsymbol{T}$ — тотожне. ∎

Повернемося до афінних перетворень.

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення $\boldsymbol{T}$ три неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ нерухомі. Властивість афінного перетворення $\boldsymbol{T}$, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{Q}$ різні точки, то $\boldsymbol{T}$ відображає пряму, яка проходить через точки $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{Q}$, у пряму, що проходить через їхні образи $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P})$ і $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q})$. Нехай $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{B}}$ — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення $\boldsymbol{T}$ три неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ нерухомі. Властивість афінного перетворення $\boldsymbol{T}$, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{Q}$ різні точки, то $\boldsymbol{T}$ відображає пряму, яка проходить через точки $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{Q}$, у пряму, що проходить через їхні образи $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P})$ і $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q})$. Нехай $\boldsymbol{L_B}$ — пряма, яка проходить через точку $\boldsymbol{B}$, паралельна прямій, що проходить через точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{L_C}$ — пряма, яка проходить через точку $\boldsymbol{C}$, паралельна прямій, що проходить через $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Теорема 2.4.9

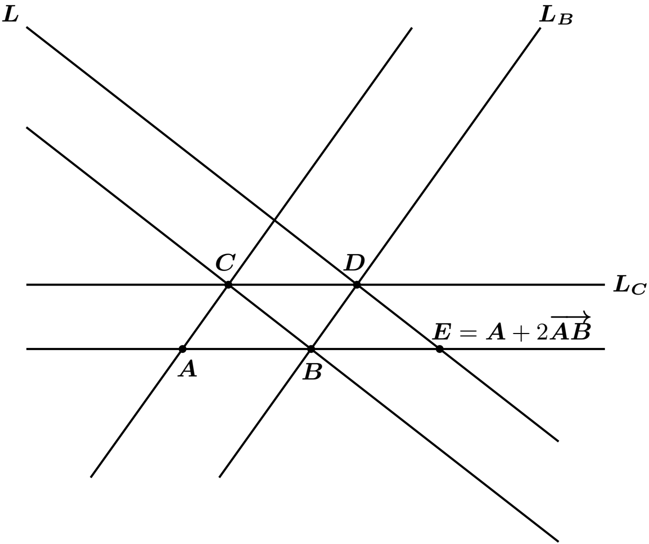
Афінне перетворення площини, яке має три нерухомі неколінеарні точки є тотожним відображенням.

Ескіз доведення. Припустимо, що для афінного перетворення T три неколінеарні точки A, B і C нерухомі. Властивість афінного перетворення T, яку ми будемо використовувати знову і знову, полягає в тому, якщо P і Q різні точки, то T відображає пряму, яка проходить через точки P і Q, у пряму, що проходить через їхні образи $T(P)$ і $T(Q)$. Нехай L_B — пряма, яка проходить через точку B, паралельна прямій, що проходить через точки A і C. Нехай L_C — пряма, яка проходить через точку C, паралельна прямій, що проходить через A та B (див. рис.).

Афінні перетворення

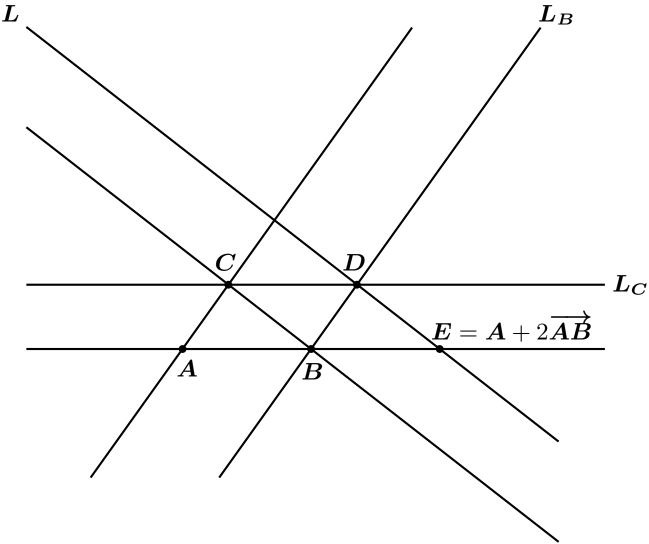
Тоді $T(L_B) \subseteq L_B$ і $T(L_C) \subseteq L_C$, оскільки паралельність зберігається афінними перетвореннями. Звідси випливає, якщо D є точкою перетину прямих L_B і L_C, то $T(D) = D$.

Афінні перетворення

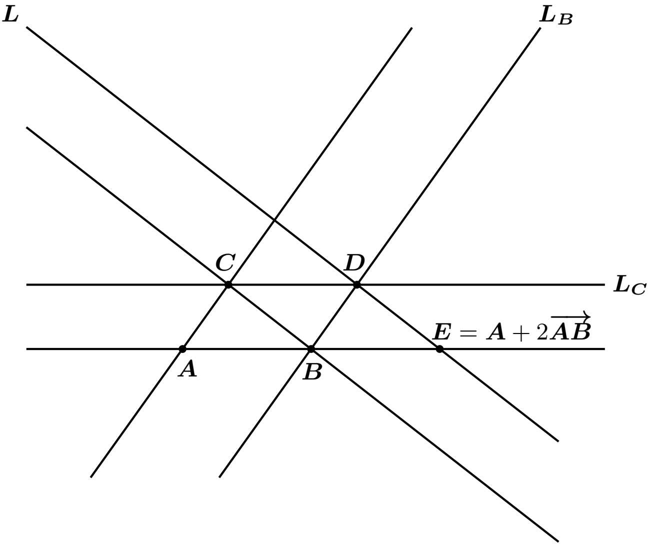


Тоді $T(L_B) \subseteq L_B$ і $T(L_C) \subseteq L_C$, оскільки паралельність зберігається афінними перетвореннями. Звідси випливає, якщо D є точкою перетину прямих L_B і L_C, то $T(D) = D$.

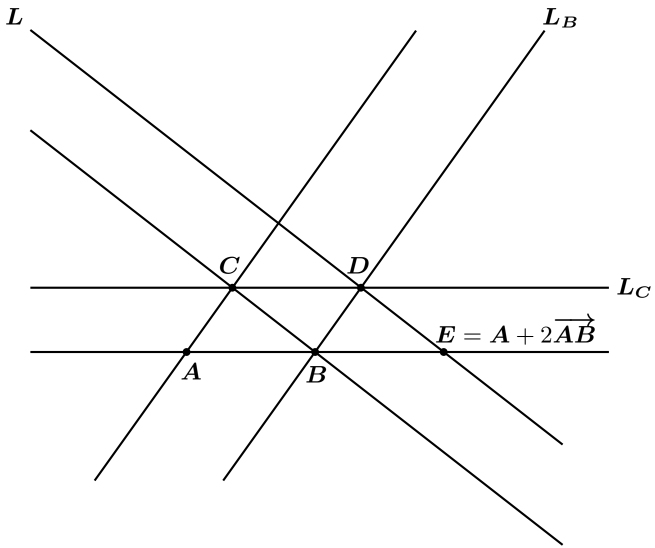
Афінні перетворення



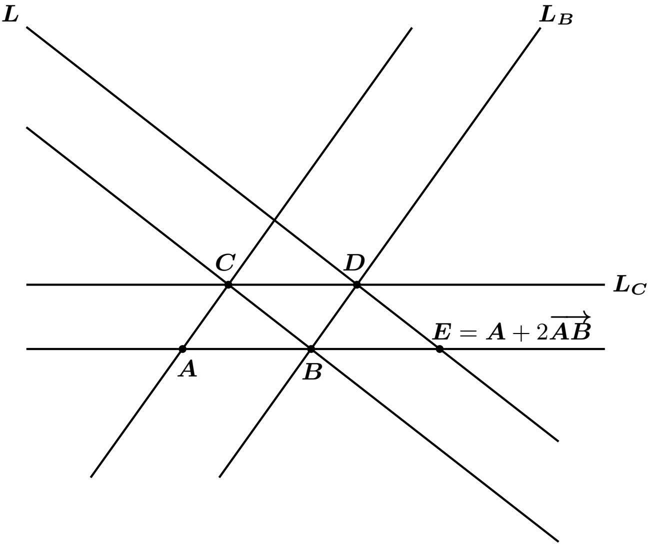
Тоді $T(L_B) \subseteq L_B$ і $T(L_C) \subseteq L_C$, оскільки паралельність зберігається афінними перетвореннями. Звідси випливає, якщо D є точкою перетину прямих L_B і L_C, то $T(D) = D$.



Тоді $T(L_B) \subseteq L_B$ і $T(L_C) \subseteq L_C$, оскільки паралельність зберігається афінними перетвореннями. Звідси випливає, якщо D є точкою перетину прямих L_B і L_C, то $T(D) = D$.



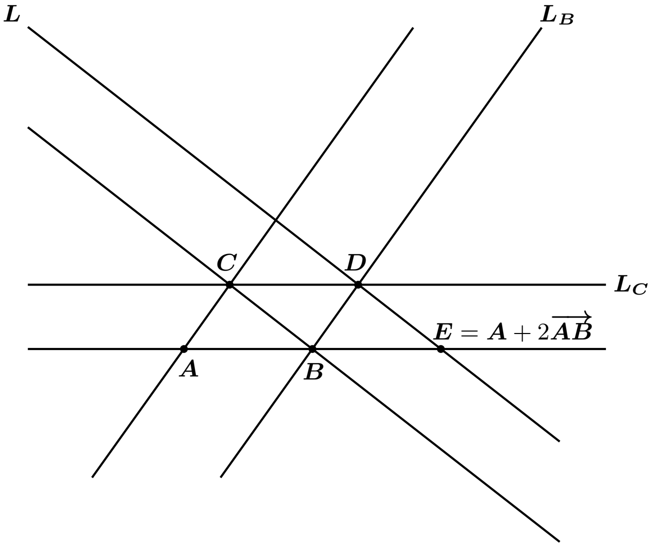
Тоді $T(L_B) \subseteq L_B$ і $T(L_C) \subseteq L_C$, оскільки паралельність зберігається афінними перетвореннями. Звідси випливає, якщо D є точкою перетину прямих L_B і L_C, то $T(D) = D$.



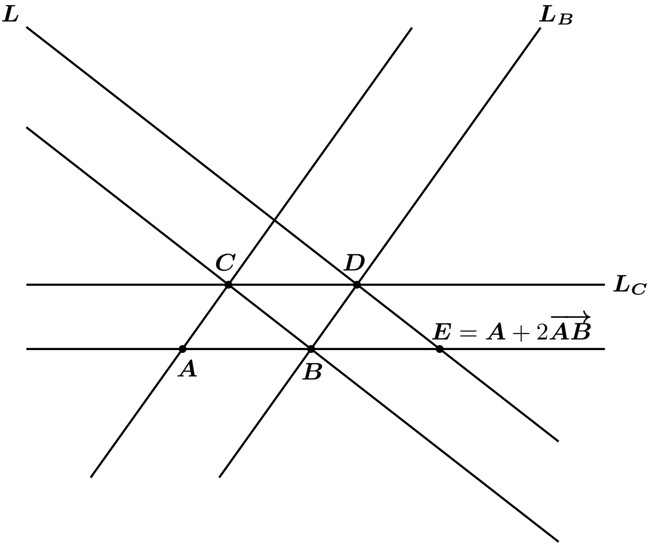
Тоді $T(L_B) \subseteq L_B$ і $T(L_C) \subseteq L_C$, оскільки паралельність зберігається афінними перетвореннями. Звідси випливає, якщо D є точкою перетину прямих L_B і L_C, то $T(D) = D$.

Афінні перетворення

Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.

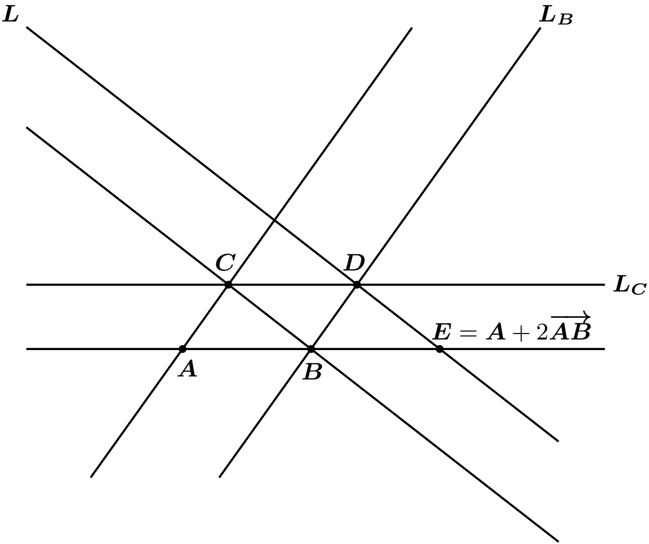


Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.



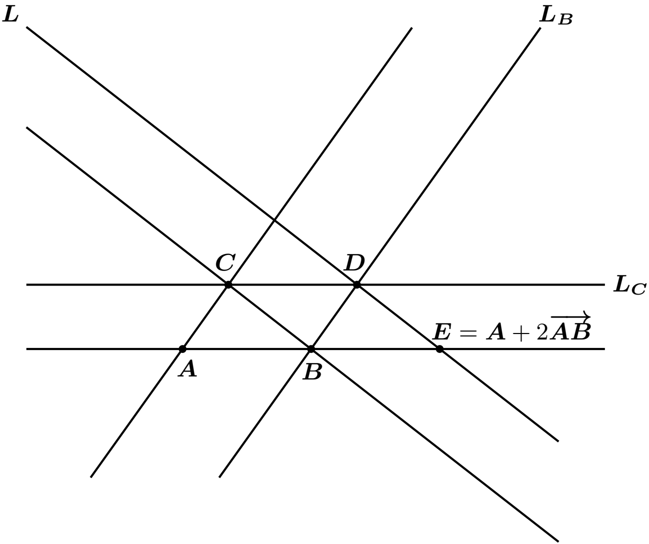
Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.

Афінні перетворення

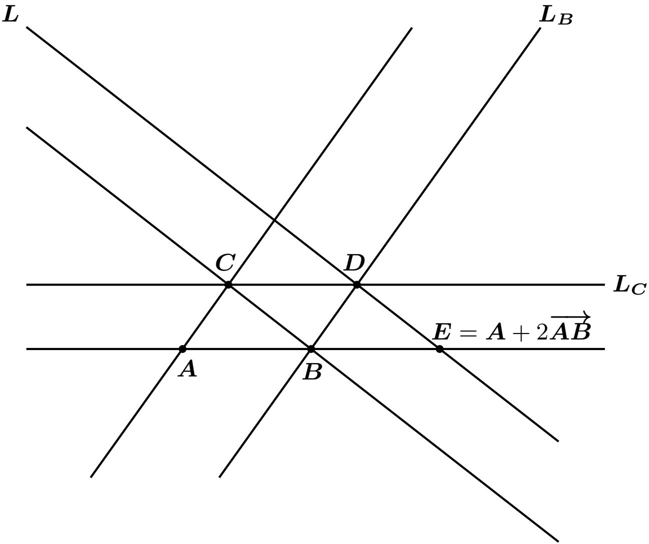


Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.

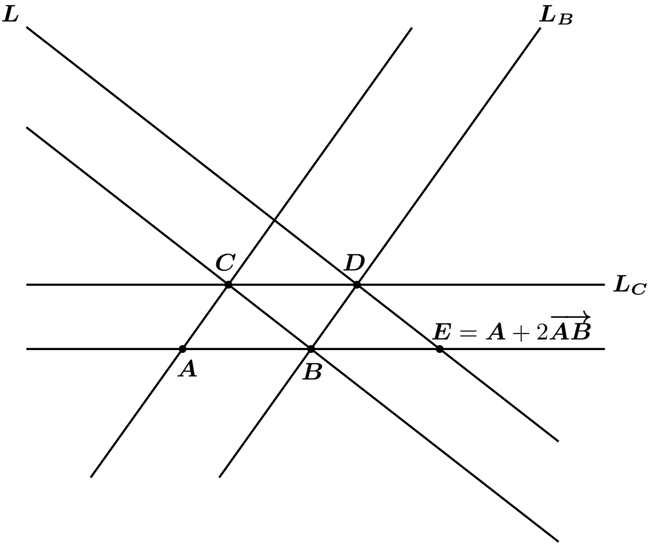
Афінні перетворення



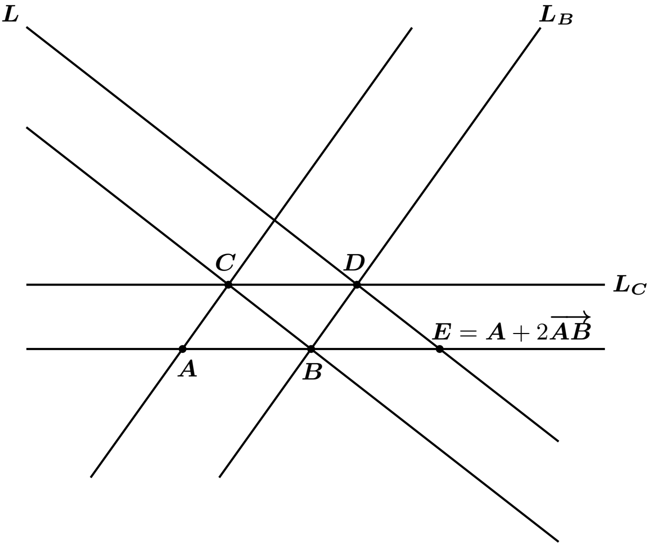
Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.



Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.



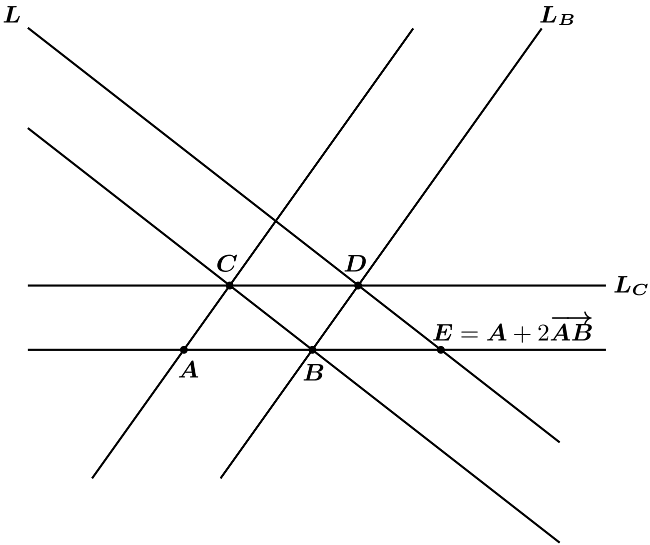
Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.



Далі нехай L — пряма, що проходить через точку D, паралельна прямій, яка проходить через точки B і C, а E — точка перетину прямої L і прямої, яка проходить через точки A і B. Очевидно, що $E = A + 2\overrightarrow{AB}$.

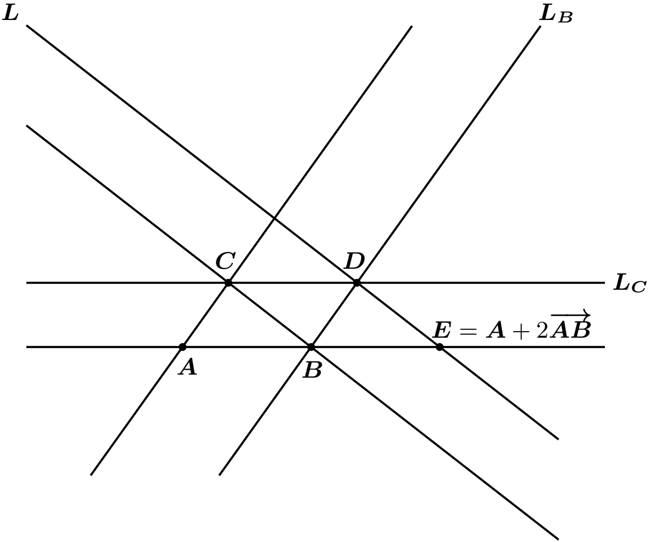
Афінні перетворення

За допомогою аргументу, подібного до того, що ми доводили, що афінне перетворення T має нерухому точку D, отримуємо, що $T(E) = E$.



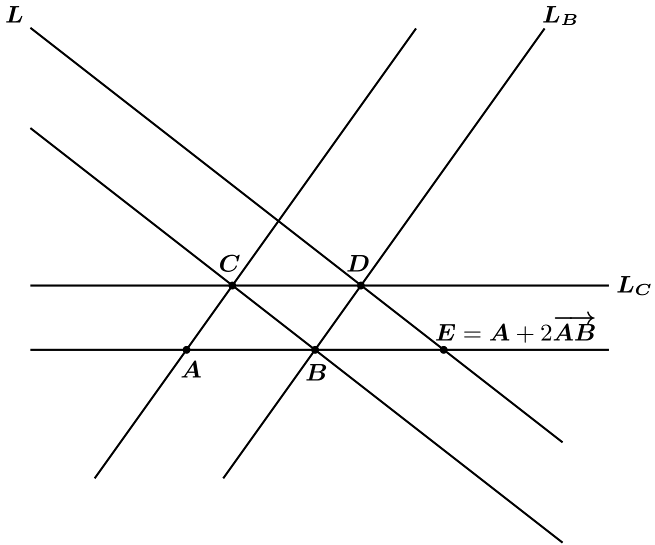
За допомогою аргументу, подібного до того, що ми доводили, що афінне перетворення T має нерухому точку D, отримуємо, що $T(E) = E$.

Афінні перетворення



За допомогою аргументу, подібного до того, що ми доводили, що афінне перетворення T має нерухому точку D, отримуємо, що $T(E) = E$.

Афінні перетворення

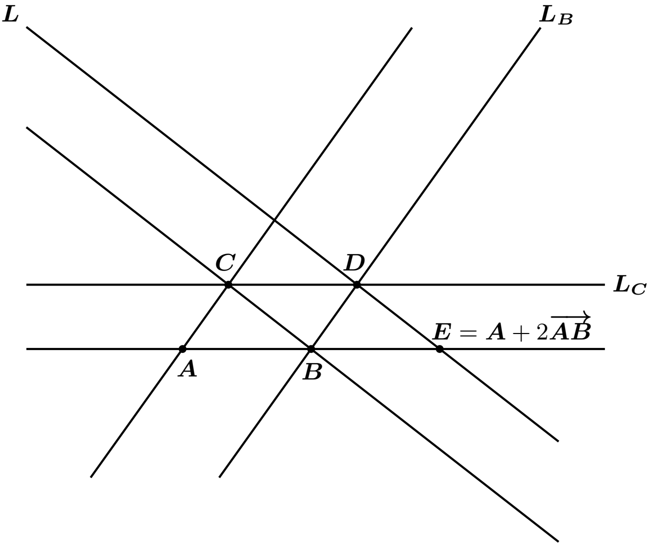


За допомогою аргументу, подібного до того, що ми доводили, що афінне перетворення T має нерухому точку D, отримуємо, що $T(E) = E$.

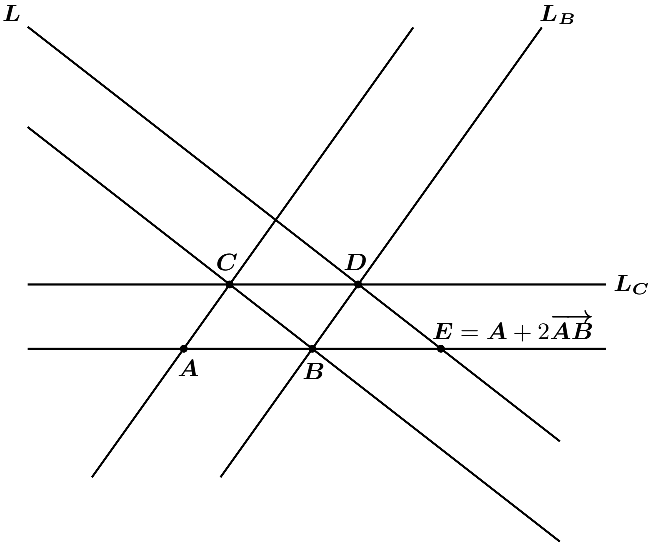
Афінні перетворення

Аналогічно можна продовжити ці аргументи, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$.

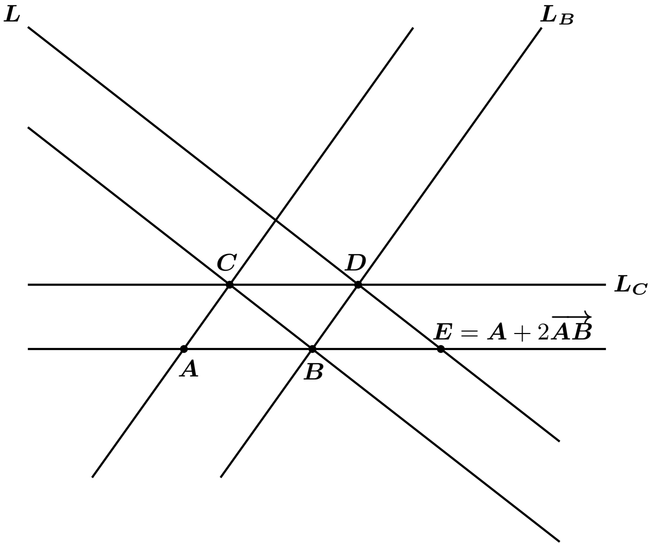
Афінні перетворення



Аналогічно можна продовжити ці аргументи, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$.



Аналогічно можна продовжити ці аргументи, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$.

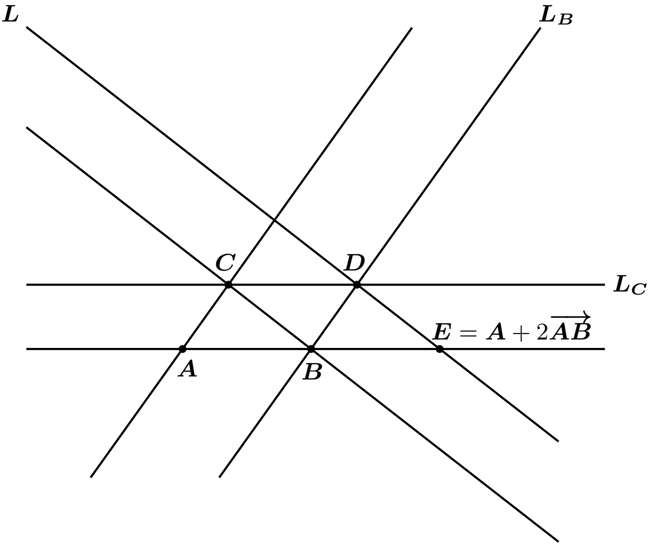


Аналогічно можна продовжити ці аргументи, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$.

Афінні перетворення

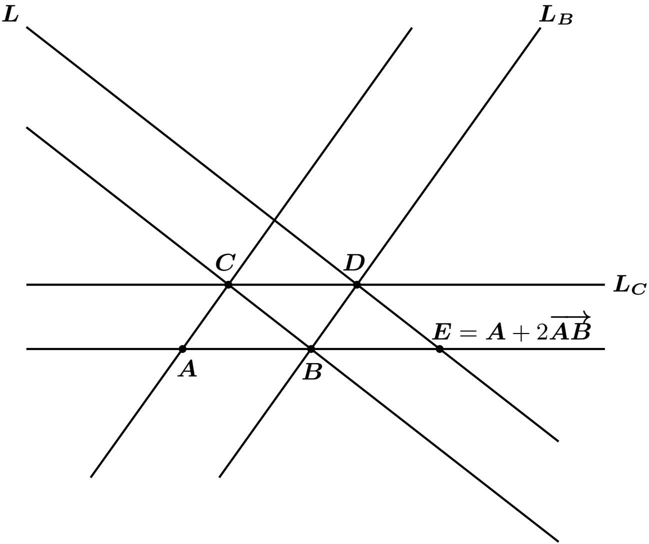
Звідси залишається лише невеликий крок, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних раціональних чисел r і s.

Афінні перетворення



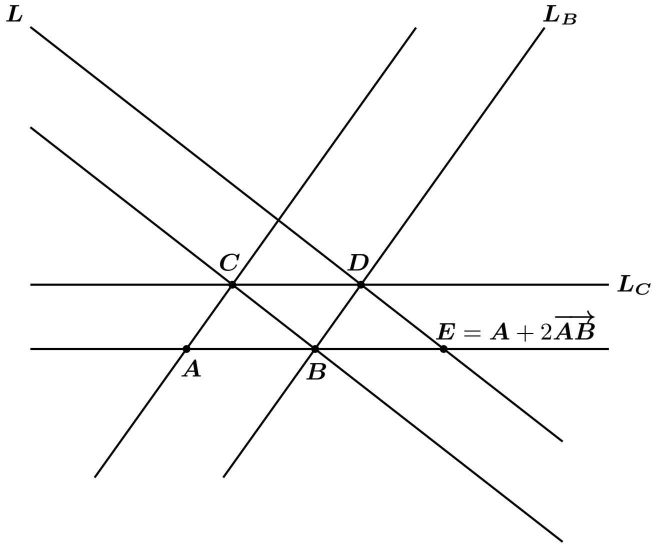
Звідси залишається лише невеликий крок, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних раціональних чисел r і s.

Афінні перетворення



Звідси залишається лише невеликий крок, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних раціональних чисел r і s.

Афінні перетворення

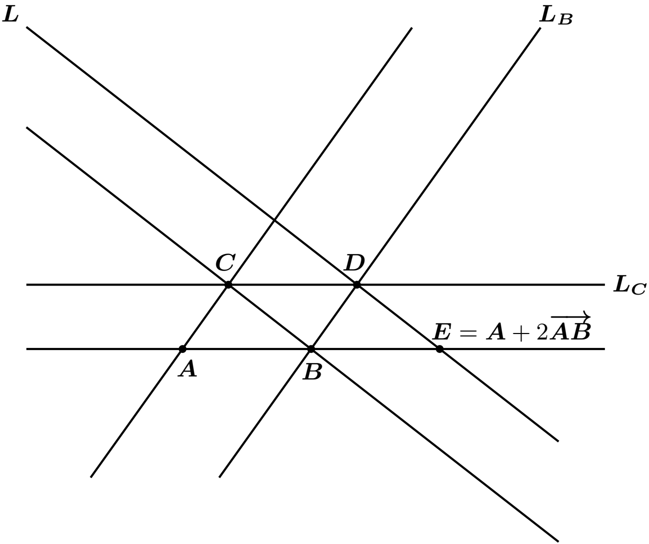


Звідси залишається лише невеликий крок, щоб довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних раціональних чисел r і s.

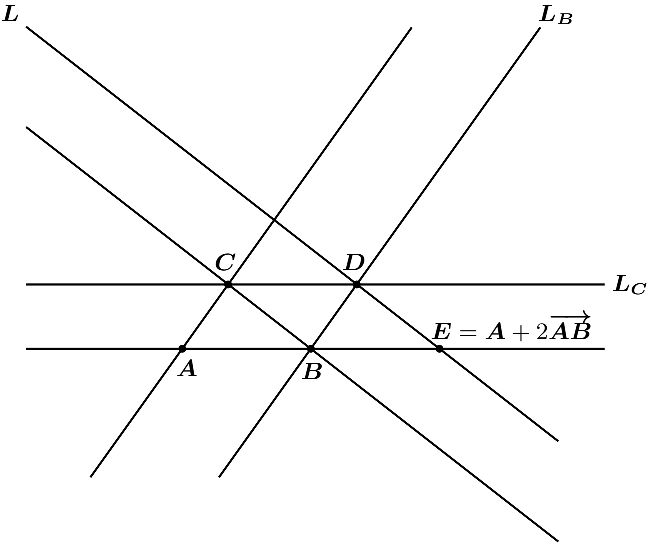
Афінні перетворення

Усі ці точки є щільною множиною точок на площині. На останньому кроці залишається довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних ірраціональних чисел r і s.

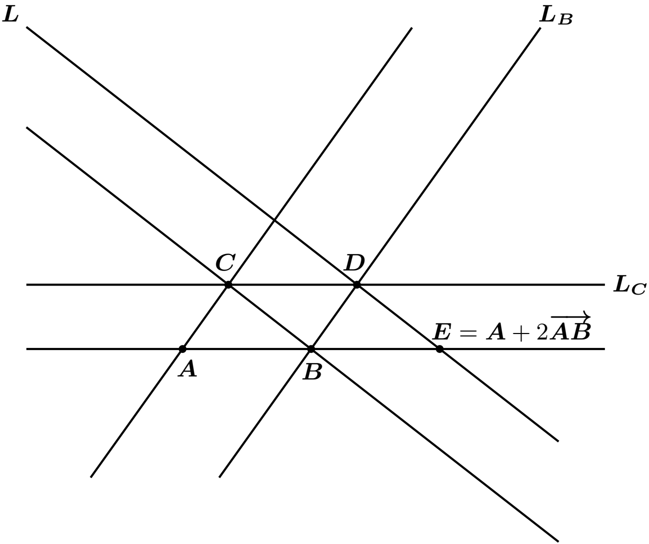
Афінні перетворення



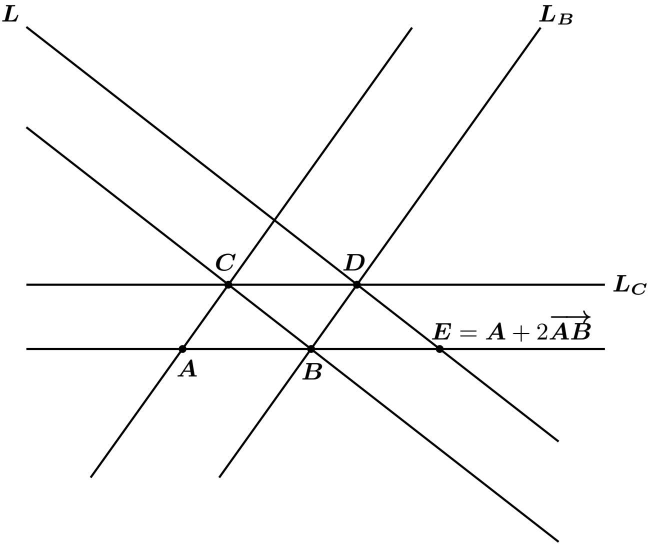
Усі ці точки є щільною множиною точок на площині. На останньому кроці залишається довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних ірраціональних чисел r і s.



Усі ці точки є щільною множиною точок на площині. На останньому кроці залишається довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних ірраціональних чисел r і s.

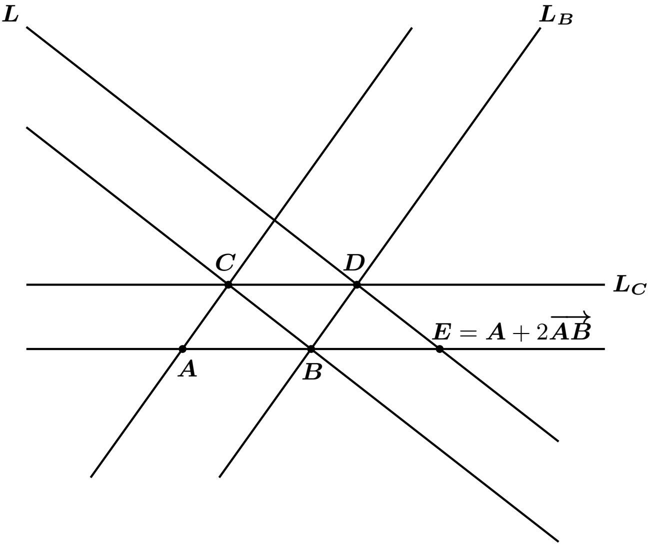


Усі ці точки є щільною множиною точок на площині. На останньому кроці залишається довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних ірраціональних чисел r і s.

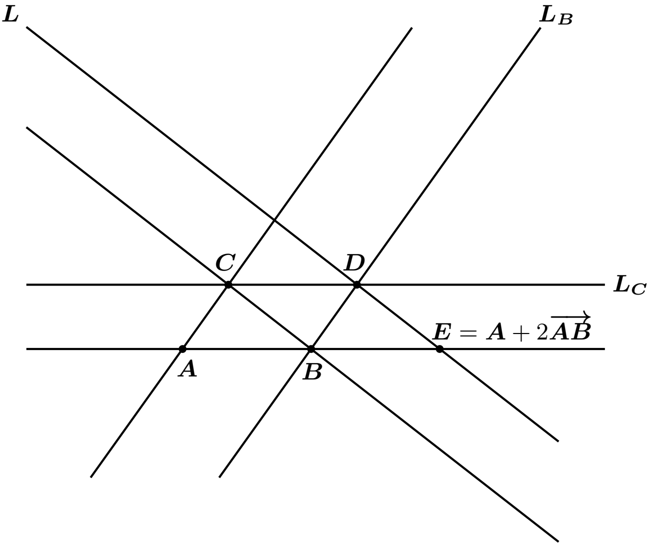


Усі ці точки є щільною множиною точок на площині. На останньому кроці залишається довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних ірраціональних чисел r і s.

Афінні перетворення



Усі ці точки є щільною множиною точок на площині. На останньому кроці залишається довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних ірраціональних чисел r і s.



Усі ці точки є щільною множиною точок на площині. На останньому кроці залишається довести, що для афінного перетворення T точки вигляду $A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ нерухомі для довільних ірраціональних чисел r і s. ■

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Афінні перетворення

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Афінні перетворення

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Афінні перетворення

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Афінні перетворення

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ■

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ■

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ■

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення T, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої L. Тоді множина $L' = T(L)$ визначається рівнянням $f(T^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що L' — пряма, а T — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ■

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$x' = ax + by + m; \qquad y' = cx + dy + n. \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ∎

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ■

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Доведення. Щоб довести, що наслідок випливає з теореми 2.4.9, використовується стандартний аргумент, який залишається для слухачів як вправа. ■

Ми готові сформулювати та довести фундаментальну теорему про афінні відображення.

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Доведення. Почнемо з оберненого твердження. Перетворення $\boldsymbol{T}$, визначене рівняннями (1), має обернене, яке знову визначається лінійними рівняннями тієї самої форми. Нехай $f(x, y) = 0$ — рівняння прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді множина $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L})$ визначається рівнянням $f(\boldsymbol{T}^{-1}(x, y)) = 0$. Це стверджує, що $\boldsymbol{L}'$ — пряма, а $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення.

Афінні перетворення

Далі нехай T — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення M, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

яке узгоджується з T у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що T є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $T = M$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Афінні перетворення

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки.
За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай T — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення M, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

яке узгоджується з T у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що T є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $T = M$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай T — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення M, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m;\\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

яке узгоджується з T у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що T є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $T = M$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення M з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m;\\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Афінні перетворення

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \qquad \text{де} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено.

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Афінні перетворення

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ∎

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено.

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ■

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ■

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Далі нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне відображення та виберемо три неколінеарні точки. За теоремою 2.4.8 існує відображення $\boldsymbol{M}$, визначене рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

яке узгоджується з $\boldsymbol{T}$ у цих точках. Оскільки ми щойно довели, що $\boldsymbol{T}$ є афінним відображенням, то маємо два афінних відображення, які діють однаково на три неколінеарні точки. За наслідком 2.4.10, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$ і теорему доведено. ■

Теорема 2.4.8

Будь-які три неколінеарні точки на площині можуть бути відображені в будь-які інші три неколінеарні точки за допомогою єдиного перетворення $\boldsymbol{M}$ з рівняннями (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n, \end{aligned} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (2)$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Афінні перетворення

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Афінні перетворення

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (2)$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (2)$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Визначник у (2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

називається *визначником афінного перетворення*.

Через теорему 2.4.11 все доведене для відображень, визначених рівняннями (1),

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

виконується і для афінних відображень. Ми повторюємо ці властивості, щоб підкреслити їхню вагомість для афінних відображень.

(1) Кожна афінне відображення на площині є композицією паралельних перенесень, поворотів, зсувів та/або перетворень масштабування. І навпаки, кожна композиція таких відображень є афінним відображенням.

(2) На площині існує єдине афінне перетворення, яке відображає три неколінеарні точки в будь-які інші три неколінеарні точки.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A,B,C) = (A',B',C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'',B'',C'') = (UT)(A,B,C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'',B'',C'') = M(A,B,C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A,B,C)=(A',B',C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}|=r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}|=r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}|=r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r>0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p)=(1/r)p$ і $(A'',B'',C'')=(UT)(A,B,C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'',B'',C'')=M(A,B,C)$. Тепер перетворення $S=U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'', \boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'', \boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right| = r\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}\right|, \qquad \left|\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}\right| = r\left|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}\right| \qquad \text{і} \qquad \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = r\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}\right|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай $\boldsymbol{T}$ — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}|, \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| = r|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай $\boldsymbol{U}$ — радіальне перетворення, визначене за формулою $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{p}) = (1/r)\boldsymbol{p}$ і $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Існує єдиний рух $\boldsymbol{M}$ такий, що $(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{C}'') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Тепер перетворення $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{M}$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням $\boldsymbol{T}$ на точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. За наслідком 2.4.10 перетворення $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{S}$ збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Теорема 2.4.12

Єдиними афінними перетвореннями площини, які зберігають кути, є подібності.

Ескіз доведення. Нехай T — афінне перетворення, яке зберігає кути. Виберемо неколінеарні точки A, B і C. Якщо $T(A, B, C) = (A', B', C')$, то можна довести, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = r|\overrightarrow{AB}|, \qquad |\overrightarrow{B'C'}| = r|\overrightarrow{BC}| \qquad \text{і} \qquad |\overrightarrow{A'C'}| = r|\overrightarrow{AC}|,$$

для деякого дійсного числа $r > 0$. Нехай U — радіальне перетворення, визначене за формулою $U(p) = (1/r)p$ і $(A'', B'', C'') = (UT)(A, B, C)$. Існує єдиний рух M такий, що $(A'', B'', C'') = M(A, B, C)$. Тепер перетворення $S = U^{-1}M$ є подібністю, значення якого збігається перетворенням T на точках A, B і C. За наслідком 2.4.10 перетворення T і S збігаються. ∎

Наслідок 2.4.10

Афінне перетворення площини повністю визначається тим, що воно робить з трьома неколінеарними точками.

Афінні перетворення

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок A, B і P на орієнтованій прямій L в $\mathbb{R}^n$, позначається (AB, P), і визначається

$$(AB, P) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{AP}\|$ і $\|\overrightarrow{PB}\|$ позначається орієнтована відстань на орієнтованій прямій L.

Твердження 2.4.14

Нехай A, B і P — три різні точки на орієнтованій прямій L. Якщо $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB$, то

$$(AB, P) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення (AB, P) не залежить від орієнтації прямої L.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BP} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ (див. рис.). $\square$

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок A, B і P на орієнтованій прямій L в $\mathbb{R}^n$, позначається (AB, P), і визначається

$$(AB, P) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{AP}\|$ і $\|\overrightarrow{PB}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій L.

Твердження 2.4.14

Нехай A, B і P — три різні точки на орієнтованій прямій L. Якщо $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB$, то

$$(AB, P) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення (AB, P) не залежить від орієнтації прямої L.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BP} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ (див. рис.). ∎

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.). ∎

Афінні перетворення

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована відстань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.). ∎

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок A, B і P на орієнтованій прямій L в $\mathbb{R}^n$, позначається (AB, P), і визначається

$$(AB, P) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{AP}\|$ і $\|\overrightarrow{PB}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій L.

Твердження 2.4.14

Нехай A, B і P — три різні точки на орієнтованій прямій L. Якщо $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB$, то

$$(AB, P) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення (AB, P) не залежить від орієнтації прямої L.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BP} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ (див. рис.). ∎

Афінні перетворення

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок A, B і P на орієнтованій прямій L в $\mathbb{R}^n$, позначається (AB, P), і визначається

$$(AB, P) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{AP}\|$ і $\|\overrightarrow{PB}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій L.

Твердження 2.4.14

Нехай A, B і P — три різні точки на орієнтованій прямій L. Якщо $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB$, то

$$(AB, P) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення (AB, P) не залежить від орієнтації прямої L.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BP} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ (див. рис.). ∎

Афінні перетворення

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована відстань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.). ∎

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок A, B і P на орієнтованій прямій L в $\mathbb{R}^n$, позначається (AB, P), і визначається

$$(AB, P) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{AP}\|$ і $\|\overrightarrow{PB}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій L.

Твердження 2.4.14

Нехай A, B і P — три різні точки на орієнтованій прямій L. Якщо $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB$, то

$$(AB, P) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення (AB, P) не залежить від орієнтації прямої L.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BP} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ (див. рис.).

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.). ∎

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.). ∎

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.).

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.).

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.).

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.).

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.).

Афінні перетворення

Означення 2.4.13

Відношення поділу трьох різних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$, позначається $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$, і визначається

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|},$$

де через $\|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|$ і $\|\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}\|$ позначається орієнтована вістань на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.14

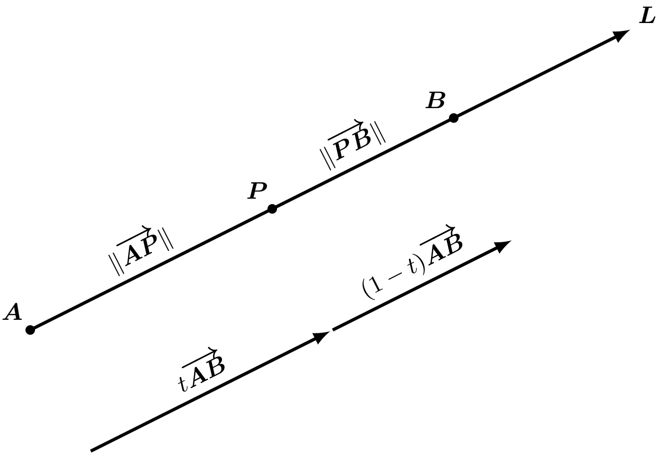
Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

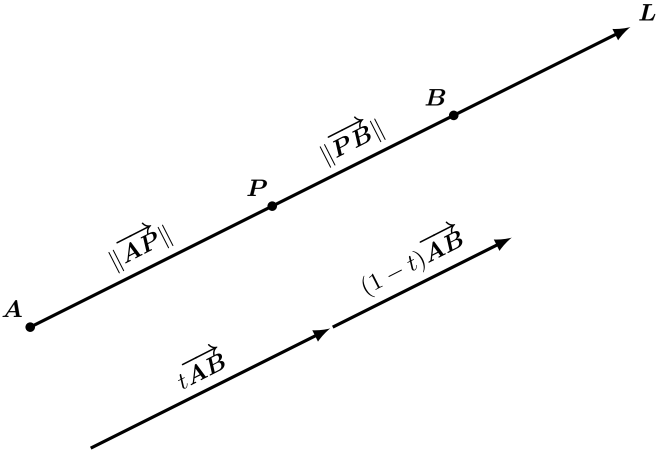
Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком того факту, що $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (див. рис.). ■

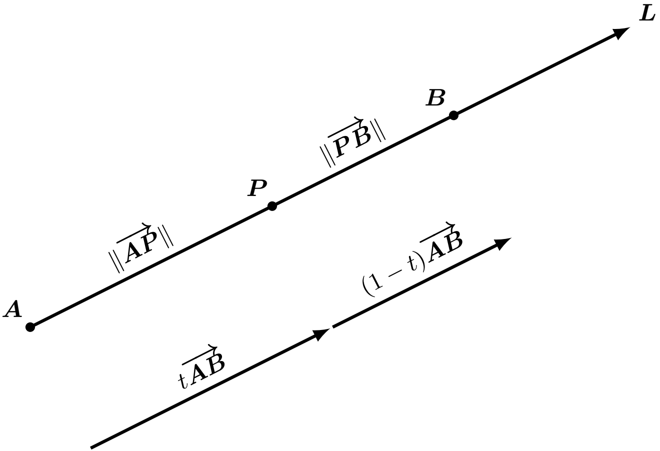
Використовуючи твердження 2.4.14, легко довести, що відношення поділу (AB, P) додатне, якщо точка P належить відрізку $[A, B]$, і від'ємне в іншому випадку.



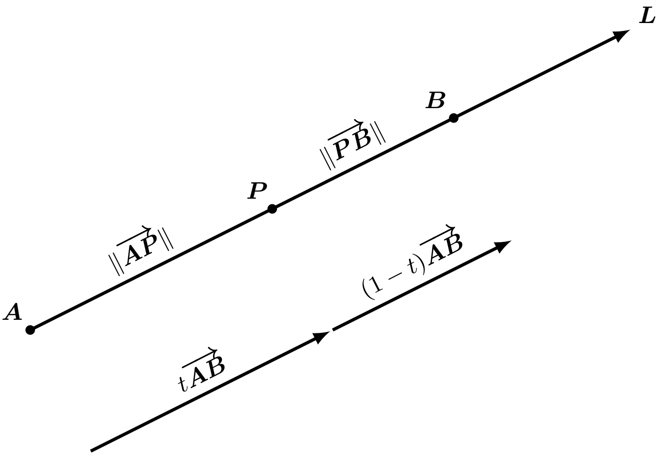
Використовуючи твердження 2.4.14, легко довести, що відношення поділу (AB, P) додатне, якщо точка P належить відрізку $[A, B]$, і від'ємне в іншому випадку.



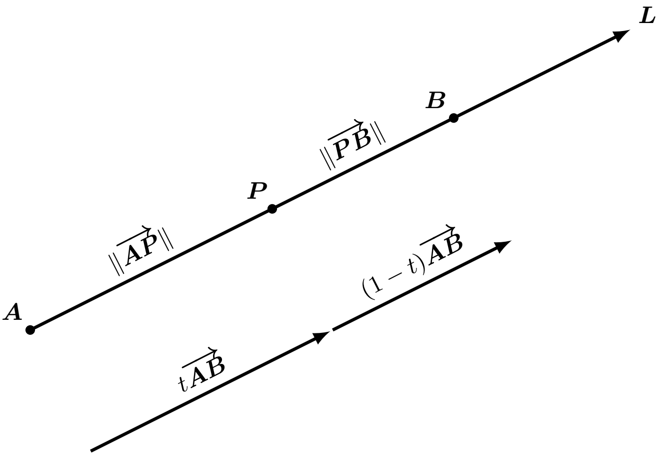
Використовуючи твердження 2.4.14, легко довести, що відношення поділу (AB, P) додатне, якщо точка P належить відрізку $[A, B]$, і від'ємне в іншому випадку.



Використовуючи твердження 2.4.14, легко довести, що відношення поділу (AB, P) додатне, якщо точка P належить відрізку $[A, B]$, і від'ємне в іншому випадку.



Використовуючи твердження 2.4.14, легко довести, що відношення поділу (AB, P) додатне, якщо точка P належить відрізку $[A, B]$, і від'ємне в іншому випадку.



Використовуючи твердження 2.4.14, легко довести, що відношення поділу $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ додатне, якщо точка $\boldsymbol{P}$ належить відрізку $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$, і від'ємне в іншому випадку.

Афінні перетворення

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Афінні перетворення

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Афінні перетворення

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \qquad (1)$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Афінні перетворення

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{QM} + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ■

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}M + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{QM} + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ∎

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m; \\ y' &= cx + dy + n. \end{aligned} \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Доведення. За теоремою 2.4.11 існують несингулярна 2×2-матриця M і точка $\boldsymbol{M}$ такі, що $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{P}$ для всіх точок $\boldsymbol{Q}$ площини. Тепер все, що потрібно зробити, це використати цю формулу для перетворення T, щоб оцінити обидві сторони рівняння та довести, що вони рівні. ■

Теорема 2.4.11

Кожне афінне перетворення площини однозначно описується рівняннями вигляду (1)

$$x' = ax + by + m; \qquad y' = cx + dy + n. \tag{1}$$

І навпаки, кожна така пара рівнянь визначає афінне перетворення.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай A, B і P — три різні точки на орієнтованій прямій L. Якщо $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB$, то

$$(AB, P) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення (AB, P) не залежить від орієнтації прямої L.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $A, B \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)A + tB) = (1-t)T(A) + tT(B)$$

для всіх t.

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай A, B і P — три різні точки на орієнтованій прямій L. Якщо $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB$, то

$$(AB, P) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення (AB, P) не залежить від орієнтації прямої L.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $A, B \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)A + tB) = (1-t)T(A) + tT(B)$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $A, B \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)A + tB) = (1-t)T(A) + tT(B)$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Теорема 2.4.16 є наслідком тверджень 2.4.14 і 2.4.15.

Теорема 2.4.16

Афінні перетворення площини зберігають відношення поділу.

Справджується така теорема.

Теорема 2.4.17

Афінні перетворення на площині множать площу на модуль їхнього визначника.

Теорема 2.4.17 вказує на одну з головних інтуїцій, яку слід мати щодо детермінантів, а саме, що вони внутрішньо пов'язані з тим, як перетворення розширюють або звужують площу, об'єм тощо.

Твердження 2.4.14

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{P}$ — три різні точки на орієнтованій прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P}) = \frac{t}{1-t}.$$

Зокрема, значення $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{P})$ не залежить від орієнтації прямої $\boldsymbol{L}$.

Твердження 2.4.15

Нехай T — афінне перетворення площини. Якщо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^2$, то

$$T((1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = (1-t)T(\boldsymbol{A}) + tT(\boldsymbol{B})$$

для всіх t.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

$$\begin{array}{ccc} \text{рухи} & \text{подібності} & \text{еквіафінні} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \text{відстань} & \text{величина кута} & \text{площа} \end{array}$$

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

$$\begin{array}{ccc} \text{рухи} & \text{подібності} & \text{еквіафінні} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \text{відстань} & \text{величина кута} & \text{площа} \end{array}$$

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

$$\begin{array}{ccc} \text{рухи} & \text{подібності} & \text{еквіафінні} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \text{відстань} & \text{величина кута} & \text{площа} \end{array}$$

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Афінні перетворення

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

рухи	подібності	еквіафінні
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
відстань	величина кута	площа

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури F і F' називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(F) = F'$.

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{рухи} & \text{подібності} & \text{еквіафінні} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
\text{відстань} & \text{величина кута} & \text{площа}
\end{array}
$$

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{F}'$ називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}'$.

Означення 2.4.18

Еквіафінна або *еквідійсна* група — це група афінних перетворень з визначником ± 1.

Згадайте наші попередні коментарі, як геометричні властивості тісно пов'язані з певними групами перетворень. Ось три групи, "метричні" групи та пов'язані з ними "метричні" властивості:

$$\begin{array}{ccc} \text{рухи} & \text{подібності} & \text{еквіафінні} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \text{відстань} & \text{величина кута} & \text{площа} \end{array}$$

Означення 2.4.19

Афінні властивості — це властивості, які зберігаються лише афінними перетвореннями.

Деякі афінні властивості — це проміжність (перебувати між), співвідношення поділу, паралельність і збіжність (рівність) прямих.

Означення 2.4.20

Дві фігури $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{F}'$ називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення T з $T(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}'$.

Афінні перетворення

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

(a)

(b)

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (а)).

(a)

(b)

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

(a)

(b)

Афінні перетворення

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (а)).

(a)

(b)

Афінні перетворення

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (а)).

Афінні перетворення

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

(a)

(b)

Афінні перетворення

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

Афінні перетворення

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (а)).

(a)

(b)

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

(a)

(b)

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи X колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

(a) (b)

Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи $\boldsymbol{X}$ колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).

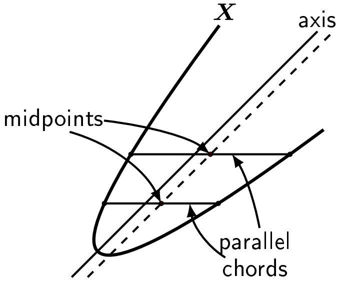
(a) (b)

Афінні перетворення

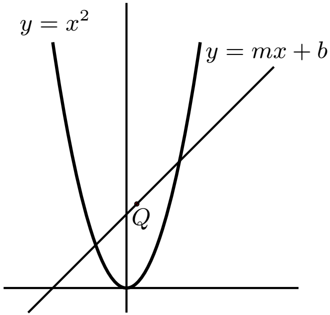
Будь-які два відрізки, кути, трикутники, паралелограми, прямі, параболи, еліпси та гіперболи афінно еквівалентні. Це означає, що можна використовувати спеціальні прості фігури для доведення речей про загальні фігури!

Приклад 2.4.21

Доведіть, що середини всіх паралельних хорд параболи $\boldsymbol{X}$ колінеарні та лежать на прямій, яка паралельна осі (див. рис. (a)).



(a)



(b)

Розв'язок. Оскільки всі параболи афінно еквівалентні, то ми можемо обмежитися окремим випадком параболи, визначеної рівнянням $y = x^2$, і сім'єю хорд, визначених прямими $y = mx + b$, де m є фіксованим числом і $b \geqslant 0$. Див. рис. (b).

(a) (b)

Розв'язок. Оскільки всі параболи афінно еквівалентні, то ми можемо обмежитися окремим випадком параболи, визначеної рівнянням $y = x^2$, і сім'єю хорд, визначених прямими $y = mx + b$, де m є фіксованим числом і $b \geqslant 0$. Див. рис. (b).

(a) (b)

Розв'язок. Оскільки всі параболи афінно еквівалентні, то ми можемо обмежитися окремим випадком параболи, визначеної рівнянням $y = x^2$, і сім'єю хорд, визначених прямими $y = mx + b$, де m є фіксованим числом і $b \geqslant 0$. Див. рис. (b).

(a)

(b)

Афінні перетворення

Розв'язок. Оскільки всі параболи афінно еквівалентні, то ми можемо обмежитися окремим випадком параболи, визначеної рівнянням $y = x^2$, і сім'єю хорд, визначених прямими $y = mx + b$, де m є фіксованим числом і $b \geqslant 0$. Див. рис. (b).

(a) (b)

Розв'язок. Оскільки всі параболи афінно еквівалентні, то ми можемо обмежитися окремим випадком параболи, визначеної рівнянням $y = x^2$, і сім'єю хорд, визначених прямими $y = mx + b$, де m є фіксованим числом і $b \geqslant 0$. Див. рис. (b).

(a)

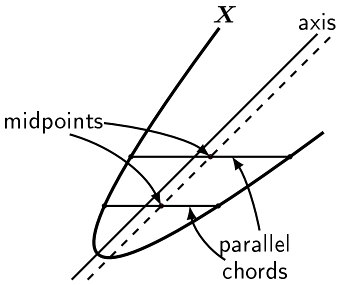
(b)

Розв'язок. Оскільки всі параболи афінно еквівалентні, то ми можемо обмежитися окремим випадком параболи, визначеної рівнянням $y = x^2$, і сім'єю хорд, визначених прямими $y = mx + b$, де m є фіксованим числом і $b \geqslant 0$. Див. рис. (b).

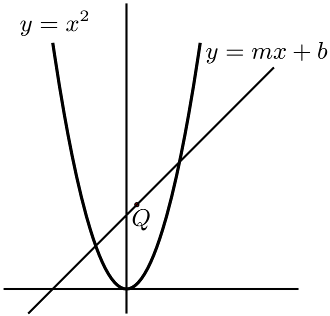
(a)

(b)

Розв'язок. Оскільки всі параболи афінно еквівалентні, то ми можемо обмежитися окремим випадком параболи, визначеної рівнянням $y = x^2$, і сім'єю хорд, визначених прямими $y = mx + b$, де m є фіксованим числом і $b \geqslant 0$. Див. рис. (b).



(a)



(b)

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Афінні перетворення

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Афінні перетворення

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Афінні перетворення

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Афінні перетворення

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Щоб знайти точку перетину прямих з параболою, треба розв'язати рівняння $mx + b = x^2$. Двома розв'язками є

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2}.$$

Середина $Q = (u, v)$ такої хорди визначається так

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}$$

і

$$v = \frac{mx_1 + b + mx_2 + b}{2} = \frac{m^2 + 2b}{2},$$

що завершує доведення.

Нарешті, зауважимо, що можна було б розробити афінну геометрію без попередньої координатиції точок. Ми могли б створювати точки, прямі тощо, невизначені терміни та використовувати аксіоми для визначення їхніх властивостей. Це підхід синтетичної геометрії. Координати можуть бути введені пізніше. Справа в тому, що в контексті афінної геометрії точні довжини геометричних фігур не важливі. Щонайбільше враховується відносний розмір, тобто співвідношення відрізків.

Дякую за увагу!