Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 33: Деякі результати існування та єдиності

Деякі результати існування та єдиності

Нехай $P_1, P_2, \dots, P_k$ і $P'_1, P'_2, \dots, P'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку P_i в точку P'_i, для $i = 1, \dots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{P_i P_j}| = |\overrightarrow{P'_i P'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \dots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(Q) = Q + \overrightarrow{P_1 P'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки P'_1. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку P_1 в точку P'_1.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $P_1 \neq P_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку P_1 відображає в точку P'_1. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{P'_1 T(P_2)}| = |\overrightarrow{P'_1 P'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{P'_1 T(P_2)}$ і $\overrightarrow{P'_1 P'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки P'_1 на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i \boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Деякі результати існування та єдиності

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i \boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i \boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i \boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$.

Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i \boldsymbol{P}'_j}\right|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Деякі результати існування та єдиності

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$, $k \geqslant 1$, — дві послідовності точок на площині. Ми хотіли б визначити, коли існує рух M, який відображає кожну точку $\boldsymbol{P}_i$ в точку $\boldsymbol{P}'_i$, для $i = 1, \ldots, k$. Оскільки рух завжди зберігає відстані, то мінімальною вимогою є умова $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, \ldots, k$. Чи ця умова є достатньою?

Випадок 1. $k = 1$.

У цьому випадку не має жодних проблем. Наприклад, паралельне перенесення $T(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}'_1}$ виконувало б цю роботу. Фактично, $M = RT$, де R — довільне обертання (поворот) навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$. Іншими словами, існує нескінченна кількість різних рухів, які відображають точку $\boldsymbol{P}_1$ в точку $\boldsymbol{P}'_1$.

Випадок 2. $k = 2$.

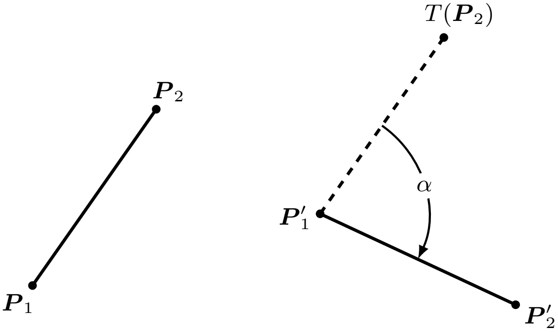
Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$. Розглянемо паралельне перенесення T, яке визначене у **випадку 1**, що точку $\boldsymbol{P}_1$ відображає в точку $\boldsymbol{P}'_1$. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}|$. Нехай α — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 T(\boldsymbol{P}_2)}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2}$, і нехай R — обертання навколо точки $\boldsymbol{P}'_1$ на кут α (див. рис.).

Деякі результати існування та єдиності

Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_3}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 \boldsymbol{P}'_3}|$.

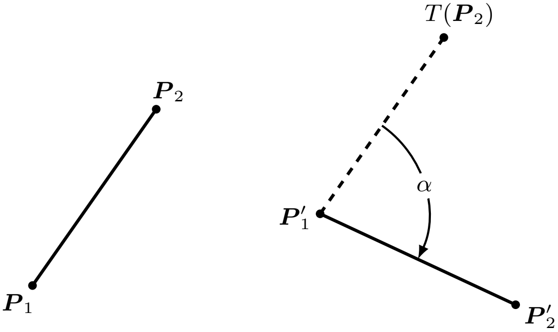


Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{P}_3'}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2'\boldsymbol{P}_3'}|$.

Деякі результати існування та єдиності

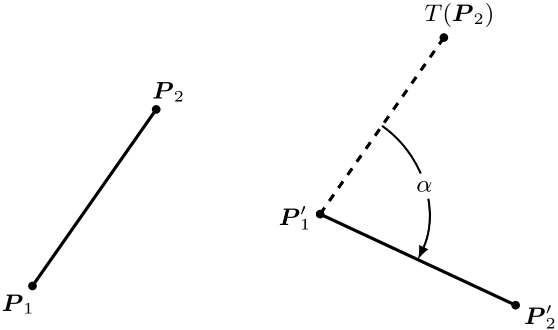


Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_3}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 \boldsymbol{P}'_3}|$.

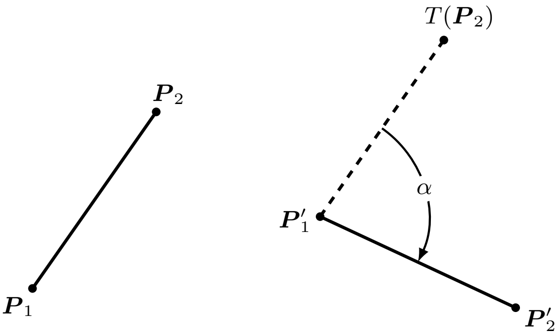
Деякі результати існування та єдиності



Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

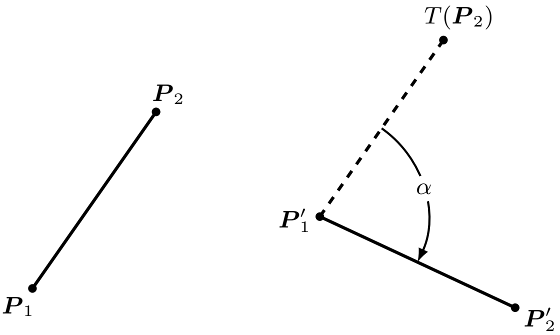
Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1' \boldsymbol{P}_3'}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2' \boldsymbol{P}_3'}|$.



Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

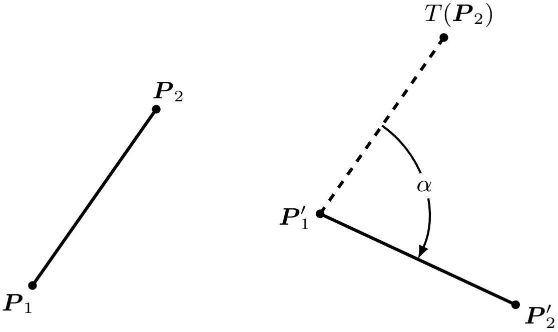
Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1' \boldsymbol{P}_3'}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2' \boldsymbol{P}_3'}|$.



Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

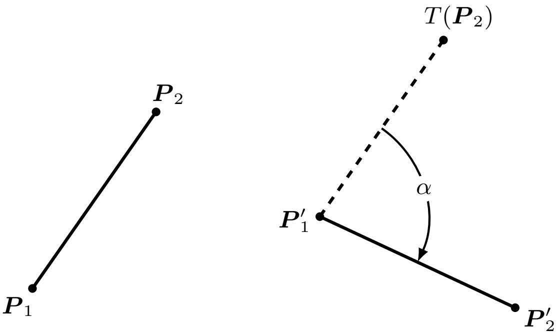
Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_3}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 \boldsymbol{P}'_3}|$.



Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

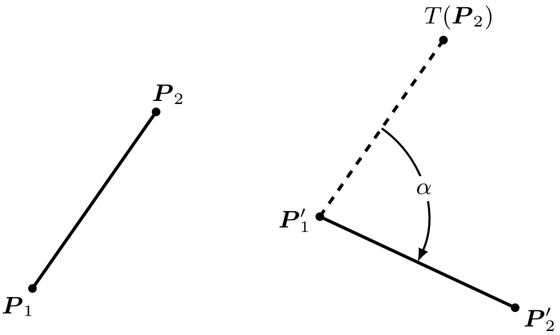
Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_3}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 \boldsymbol{P}'_3}|$.



Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

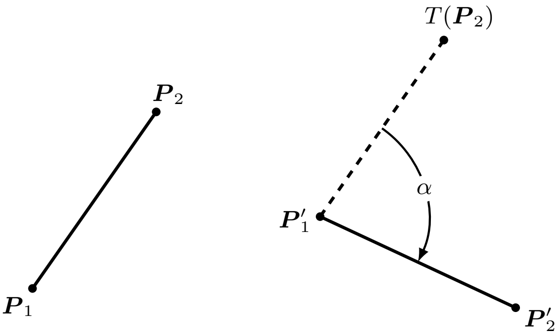
Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_3}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 \boldsymbol{P}'_3}|$.



Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}'_1$ і $\boldsymbol{P}'_2$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_1 \boldsymbol{P}'_3}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_2 \boldsymbol{P}'_3}|$.



Легко довести, що рух $M = RT$ виконує те, що ми хочемо, як і рух $M' = SRT$, де S — відбиття від прямої, яка проходить через точки через $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$. Рухи M і M' є, очевидно, різними.

Випадок 3. $k = 3$.

Нехай M і M' — рухи, визначені у **випадку 2**, які відображають точки $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ в точки $\boldsymbol{P}_1'$ і $\boldsymbol{P}_2'$, відповідно. За припущенням маємо, що $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1' \boldsymbol{P}_3'}|$ і $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2' M(\boldsymbol{P}_3)}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2' \boldsymbol{P}_3'}|$.

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Деякі результати існування та единості

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}_3'$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}_3'$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої L, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай A, B та C — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) X на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{AC}|$ та $|\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{BC}|$ є $X = C$ і $X = R(C)$, де R — відбиття стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Припустимо, що $X \neq C$.

Твердження. Середина $D = \frac{1}{2}(C + X)$ відрізка $[C, X]$ розташована на прямій L.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки D випливає, що $X = C + 2\overrightarrow{CD}$, причому X є точкою куди відбиття відображає точку D (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}_3'$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}_3'$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої L, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій L.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}_3'$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}_3'$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Середина $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Наступна лема стверджує, що або рух M, або рух M' робить те, що ми хочемо, а саме маємо, що або $M(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$, або $M'(\boldsymbol{P}_3) = \boldsymbol{P}'_3$.

Лема 2.2.34

Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки на площині. Єдині точки (вектори) $\boldsymbol{X}$ на площині, які задовольняють двом рівнянням $|\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|$ та $|\overrightarrow{\boldsymbol{BX}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}|$ є $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{X} = R(\boldsymbol{C})$, де R — відбиття стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. Припустимо, що $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{C}$.

Твердження. Серединa $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{X})$ відрізка $[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}]$ розташована на прямій $\boldsymbol{L}$.

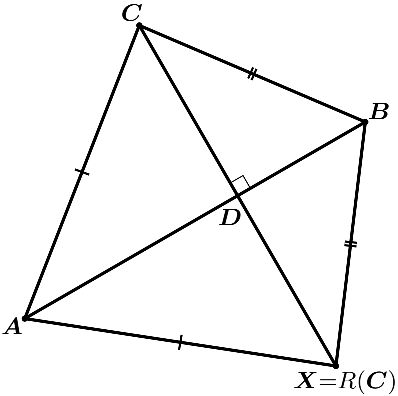
Після того, як доведемо це твердження, то ми насправді завершили доведення леми, а тому з означення точки $\boldsymbol{D}$ випливає, що $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, причому $\boldsymbol{X}$ є точкою куди відбиття відображає точку $\boldsymbol{D}$ (див. рис.).

Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.

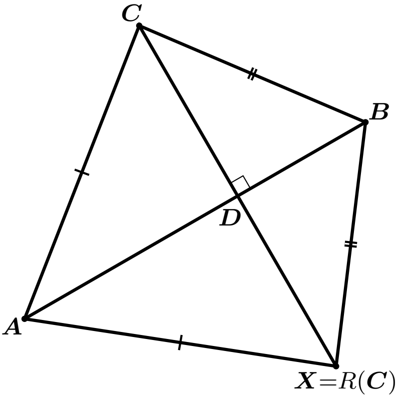


Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.

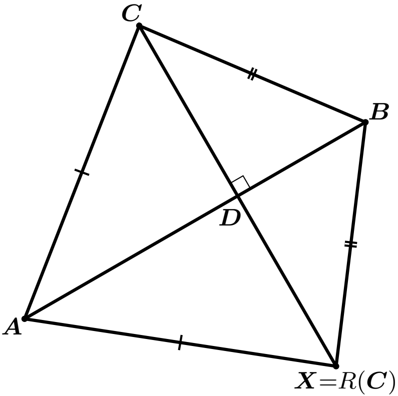


Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

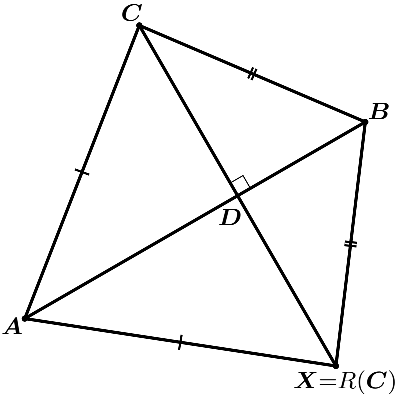
Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.



Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

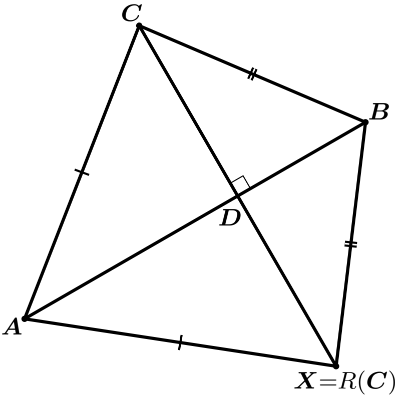
Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.



Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.

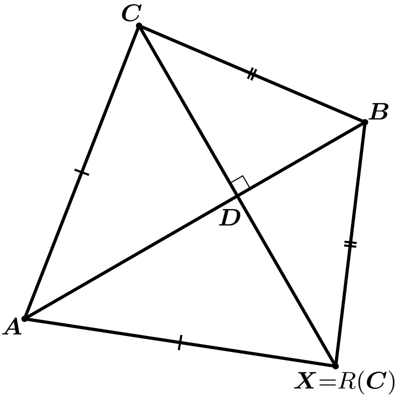


Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

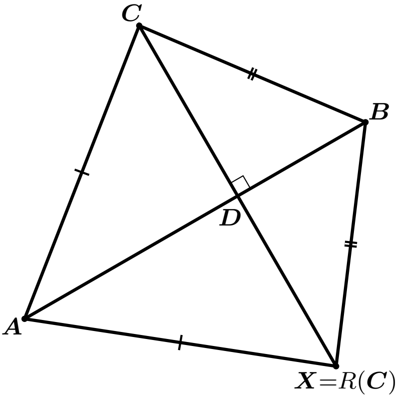
Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.



Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

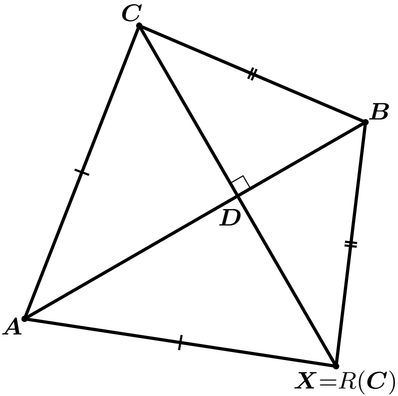
Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.



Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) - C\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(C + \overrightarrow{X}) + C\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{CC}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AX}|^2\right) = 0.$$

Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.

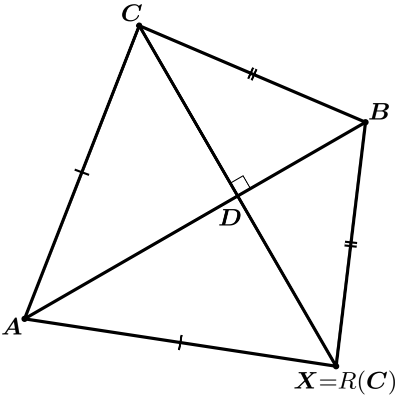


Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \overrightarrow{\boldsymbol{X}}) - \boldsymbol{C}\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \overrightarrow{\boldsymbol{X}}) + \boldsymbol{C}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{AX}} - \overrightarrow{\boldsymbol{CC}}) \bullet \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AX}}) = \tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}|^2\right) = 0.$$

Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{BD}} = 0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$ паралельні, а отже, точка $\boldsymbol{D}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему.



Розглянемо такі рівності:

$$\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{AD}=\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\overrightarrow{X})-\boldsymbol{C}\right)\bullet\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\overrightarrow{X})+\boldsymbol{C}\right)=$$
$$=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{CC})\bullet\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AX})=\tfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AX}|^2\right)=0.$$

Аналогічно, можна довести, що $\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{BD}=0$. Звідси, очевидно, випливає, що вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$ паралельні, а отже, точка D лежить на прямій L. Це доводить наше **твердження**, а отже, і лему. ■

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.

(a)

(b)

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.

(a)

(b)

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.

(a)

(b)

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.

(a)

(b)

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.

(a)

(b)

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.

(a)

(b)

Випадок 4. $k > 3$.

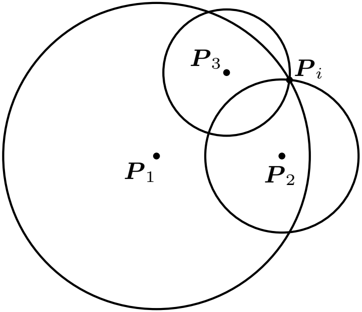
Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.

(a)

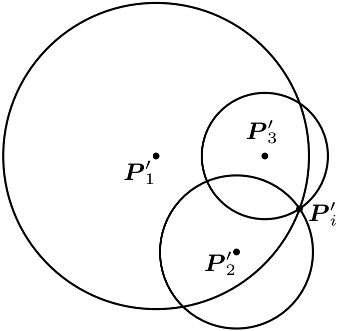
(b)

Випадок 4. $k > 3$.

Ми стверджуємо, що якщо перші три точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ лінійно незалежні, то відображення, визначене у **випадку 3**, яке відображає точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ і $\boldsymbol{P}_3$ у точки точки $\boldsymbol{P}'_1$, $\boldsymbol{P}'_2$ і $\boldsymbol{P}'_3$, відповідно, вже буде відображати всі інші точки $\boldsymbol{P}_i$, $i > 3$, у точки $\boldsymbol{P}'_i$. Рис. показує як цей аргумент працює.



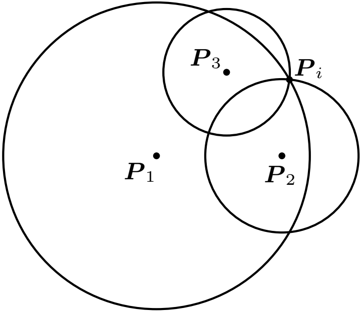
(a)



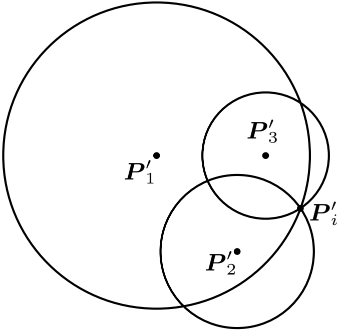
(b)

(a) (b)

На рис. (a) зображено три кола з центрами P_1, P_2 і P_3, які мають радіуси P_1P_i, P_2P_i і P_3P_i, відповідно. Точка P_i лежить на перетині цих кіл. На рис. (b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка P_i відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою P'_i.

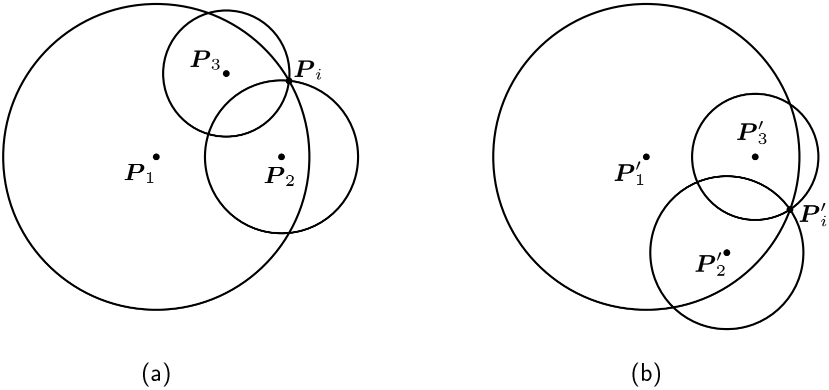


(a)

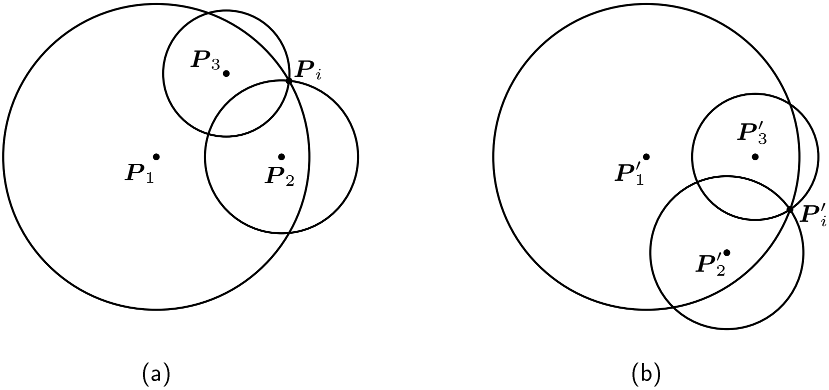


(b)

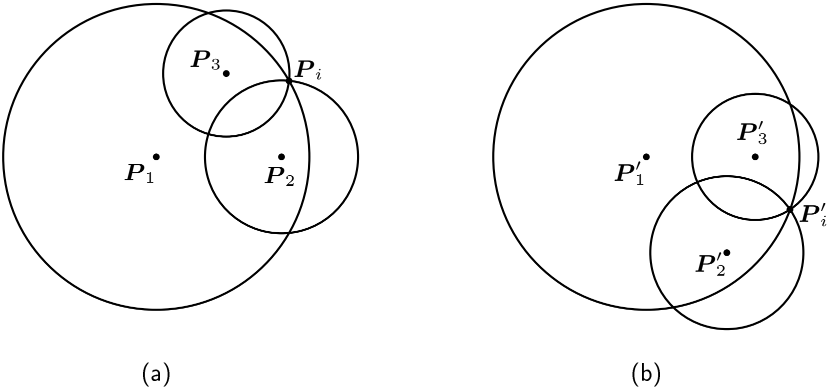
На рис. (a) зображено три кола з центрами P_1, P_2 і P_3, які мають радіуси P_1P_i, P_2P_i і P_3P_i, відповідно. Точка P_i лежить на перетині цих кіл. На рис. (b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка P_i відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою P'_i.



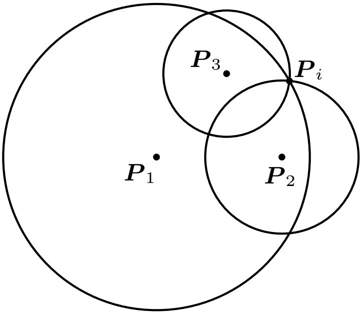
На рис. (a) зображено три кола з центрами P_1, P_2 і P_3, які мають радіуси P_1P_i, P_2P_i і P_3P_i, відповідно. Точка P_i лежить на перетині цих кіл. На рис. (b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка P_i відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою P_i'.



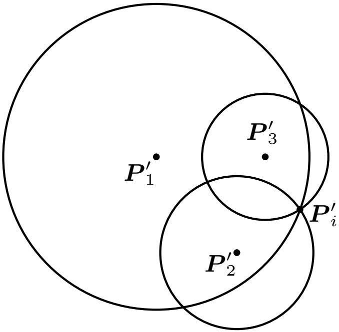
На рис. (a) зображено три кола з центрами P_1, P_2 і P_3, які мають радіуси P_1P_i, P_2P_i і P_3P_i, відповідно. Точка P_i лежить на перетині цих кіл. На рис. (b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка P_i відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою P'_i.



На рис. (a) зображено три кола з центрами P_1, P_2 і P_3, які мають радіуси P_1P_i, P_2P_i і P_3P_i, відповідно. Точка P_i лежить на перетині цих кіл. На рис. (b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка P_i відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою P'_i.

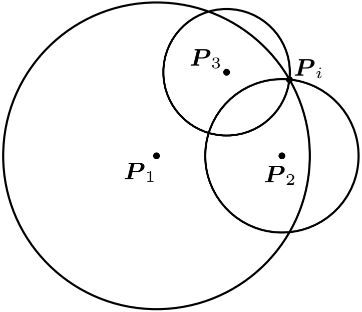


(a)

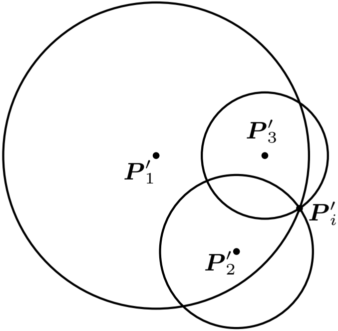


(b)

На рис. (a) зображено три кола з центрами P_1, P_2 і P_3, які мають радіуси P_1P_i, P_2P_i і P_3P_i, відповідно. Точка P_i лежить на перетині цих кіл. На рис. (b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка P_i відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою P'_i.



(a)



(b)

На рис. (a) зображено три кола з центрами P_1, P_2 і P_3, які мають радіуси P_1P_i, P_2P_i і P_3P_i, відповідно. Точка P_i лежить на перетині цих кіл. На рис. (b) зображено відповідні кола навколо точок зображення. Необхідно довести, що точка P_i відображається на перетин цих кіл, а її образ збігається з точкою P_i'.

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \dots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \dots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \dots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай L — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої L. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ■

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ∎

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. $\square$

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Ми щойно навели конструктивне доведення такої теореми.

Теорема 2.2.35 (теорема існування для рухів)

Нехай $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \ldots, \boldsymbol{P}'_k$ — точки з властивістю $|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}'_j}|$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді існує рух M такий, що $M(\boldsymbol{P}_i) = \boldsymbol{P}'_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тепер, коли ми відповіли на питання про існування певних рухів, давайте далі розглянемо може питання єдиності є ближче?

Теорема 2.2.36

Рух, який має дві різні нерухомі точки, має нерухомою кожну точку прямої, яка визначається цими точками.

Доведення. Нехай M — рух і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для двох різних точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{C}$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}$. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, то з леми 2.2.3 випливає, що $M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})}$. Іншими словами, $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$, що завершує доведення теореми. ■

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$

то

$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Деякі результати існування та єдиності

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Деякі результати існування та єдиності

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай A, B і C — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(A, B, C) = (A, B, C)$. Нехай P — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(P) = P$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з A, B, чи C. Якщо P лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка P лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що P — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай A, B і C — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(A, B, C) = (A, B, C)$. Нехай P — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(P) = P$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з A, B, чи C. Якщо P лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка P лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що P — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Деякі результати існування та єдиності

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ■

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох x, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ■

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ■

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Деякі результати існування та єдиності

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Деякі результати існування та єдиності

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ■

Лема 2.2.4

Нехай $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ∎

Лема 2.2.4

Нехай $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ◻

Лема 2.2.4

Нехай $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Теорема 2.2.37

Будь-який рух площини, що залишає нерухомими три неколінеарні точки, є тотожним відображенням.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ — три неколінеарні точки площини, а M — рух з $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — будь-яка інша точка на площині. Ми хочемо довести, що $M(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$. За теоремою 2.2.36 рух M є тотожним відображенням на трьох х, які визначаються двома точками з $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{C}$. Якщо $\boldsymbol{P}$ лежить на цих лініях, то доведення ми закінчили; інакше з леми 2.2.4 випливає, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій, що проходить через дві різні точки, які розташовані на двох з цих прямих. Використавши теорему 2.2.36, ми знову робимо висновок, що $\boldsymbol{P}$ — нерухома точка відображення M. ■

Лема 2.2.4

Нехай $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці $\boldsymbol{C}$. Нехай $\boldsymbol{P}$ — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ на прямих $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, відповідно, що точка $\boldsymbol{P}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Деякі результати існування та єдиності

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ∎

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ∎

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ∎

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ∎

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з конструкції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з конструкції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. □

Наслідок 2.2.38

Два рухи площини образи яких збігаються в трьох неколінеарних точках, рівні.

Доведення. Нехай M і M' — рухи площини, і припустимо, що $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = M'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ для трьох неколінерних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ цієї площини. Розглянемо рух $T = M^{-1}M'$ цієї площини. Оскільки $T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, то з теореми 2.2.37 випливає, що рух T — тотожне відображення площини, тобто, що $M = M'$. ■

Наслідок 2.2.39

Кожен рух площини зображається з паралельного перенесення, обертання, та/або, можливо, відбиття.

Доведення. Твердження наслідку випливає з констукції **випадку 3**, згаданого вище, і наслідку 2.2.38. ■

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки A та B площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої L. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій L. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ■

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки A та B площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої L. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій L. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки A та B площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої L. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій L. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Деякі результати існування та єдиності

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки A та B площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої L. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій L. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ■

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки A та B площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої L. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій L. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Деякі результати існування та єдиності

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки A та B площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої L. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій L. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x,y)=(x,-y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки A та B площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої L, яка визначається точками A та B.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої L. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій L. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ■

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x,y)=(x,-y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай C — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка C є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках.

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках.

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки C' стосовно прямої L. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ■

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x, y) = (x, -y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ∎

Теорема 2.2.36 ставить таке запитання: чи є рух площини, який має дві різні точки нерухомими, насправді тотожним відображенням? Це не так. Відображення, вигляду $T(x,y)=(x,-y)$, можуть залишати всі точки прямої нерухомими, але все одно воно не буде тотожним.

Теорема 2.2.40

Рух M площини, який має дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ площини нерухомими, є або тотожним відображенням, або відбиттям стосовно прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Доведення. За теоремою 2.2.36 рух M має нерухомими точками всі точки прямої $\boldsymbol{L}$. Нехай $\boldsymbol{C}$ — довільна точка площини, яке не лежить на прямій $\boldsymbol{L}$. З леми 2.2.34 випливає, що точка $\boldsymbol{C}$ є образом стосовно руху M самої себе, або образом відбиття точки $\boldsymbol{C}'$ стосовно прямої $\boldsymbol{L}$. Тоді твердження теореми тепер випливає з наслідку 2.2.38, оскільки нам відомо, що робить рух M у трьох точках. ■

Дякую за увагу!