Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 32: Рухи зберігають точковий добуток векторів

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) = aM(\overrightarrow{u}) + bM(\overrightarrow{v}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = M(\overrightarrow{u}) + M(\overrightarrow{v})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{w}$ рівністю

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{w}. \qquad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}). \qquad (2)$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) = aM(\overrightarrow{u}) + bM(\overrightarrow{v}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = M(\overrightarrow{u}) + M(\overrightarrow{v})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{w}$ рівністю

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{w}. \qquad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}). \qquad (2)$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) = aM(\overrightarrow{u}) + bM(\overrightarrow{v}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = M(\overrightarrow{u}) + M(\overrightarrow{v})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{w}$ рівністю

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{w}. \quad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}). \quad (2)$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) = aM(\overrightarrow{u}) + bM(\overrightarrow{v}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = M(\overrightarrow{u}) + M(\overrightarrow{v})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{w}$ рівністю

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{w}. \tag{1}$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}). \tag{2}$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = M(\overrightarrow{u}) + M(\overrightarrow{v})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{w}$ рівністю

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{w}. \tag{1}$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}). \tag{2}$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \qquad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \qquad (2)$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \tag{1}$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \tag{2}$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \tag{1}$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \tag{2}$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \quad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \quad (2)$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \qquad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \qquad (2)$$

(див. рис.).

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що
$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$
для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \quad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так
$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \quad (2)$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \tag{1}$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \tag{2}$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що

$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \qquad (1)$$

Рівність (1) можна переписати так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \qquad (2)$$

(див. рис.).

Теорема 2.2.28

Якщо M — рух з властивістю $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то M — лінійне перетворення таке, що
$$M(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = aM(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + bM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}),$$
для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і дійсних чисел a та b.

Доведення. Ми доведемо, що такий рух M є лінійним перетворенням у два кроки.

Крок 1. $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Визначимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ рівністю
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}. \tag{1}$$

Рівність (1) можна переписати так
$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}). \tag{2}$$

(див. рис.).

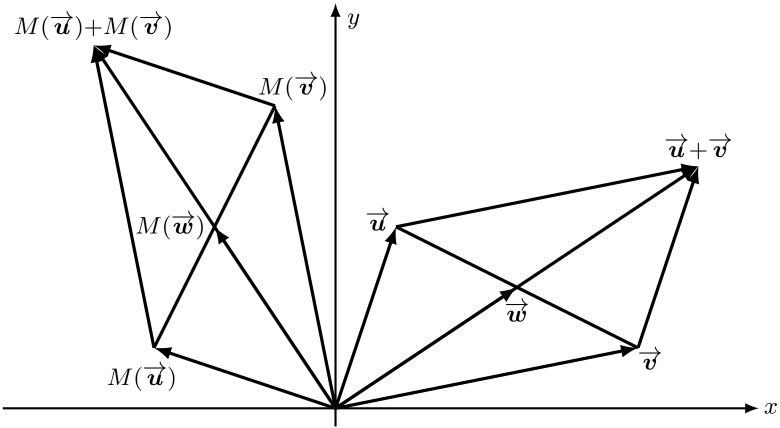
Рухи зберігають точковий добуток векторів

Оскільки $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, а звідси випливає, що $\left|M(\overrightarrow{p})\right| = \left|\overrightarrow{p}\right|$ для довільного вектора $\overrightarrow{p}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 2M(\overrightarrow{w}). \tag{3}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\overrightarrow{w}) = M(\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}(M(\overrightarrow{v}) - M(\overrightarrow{u})). \tag{4}$$



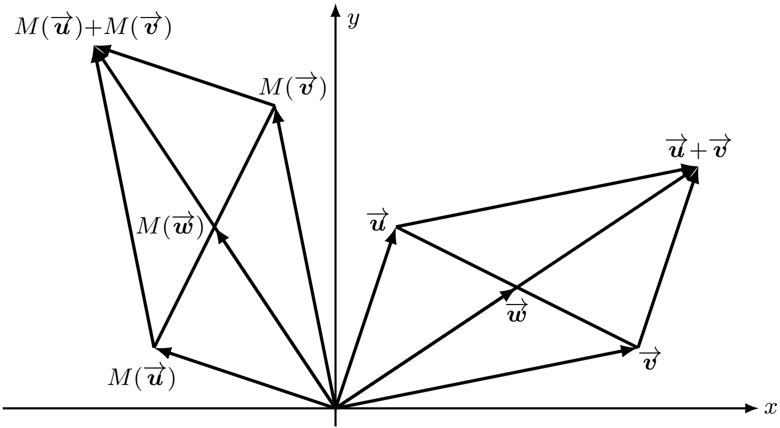
Оскільки $M(\overrightarrow{\mathbf{0}})=\overrightarrow{\mathbf{0}}$, а звідси випливає, що $\left|M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})\right|=\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right|$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}})=2M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}). \tag{3}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})+\frac{1}{2}(M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})-M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})). \tag{4}$$

Рухи зберігають точковий добуток векторів

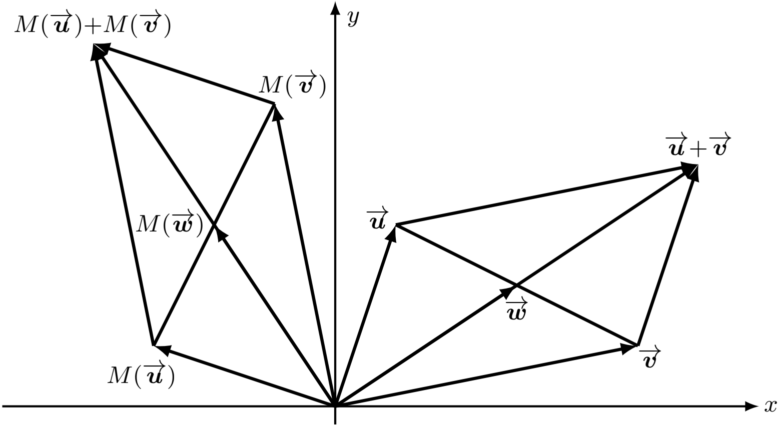


Оскільки $M(\vec{0}) = \vec{0}$, а звідси випливає, що $\left|M(\vec{p})\right| = \left|\vec{p}\right|$ для довільного вектора $\vec{p}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\vec{u}+\vec{v}) = 2M(\vec{w}). \tag{3}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\vec{w}) = M(\vec{u}) + \frac{1}{2}(M(\vec{v}) - M(\vec{u})). \tag{4}$$

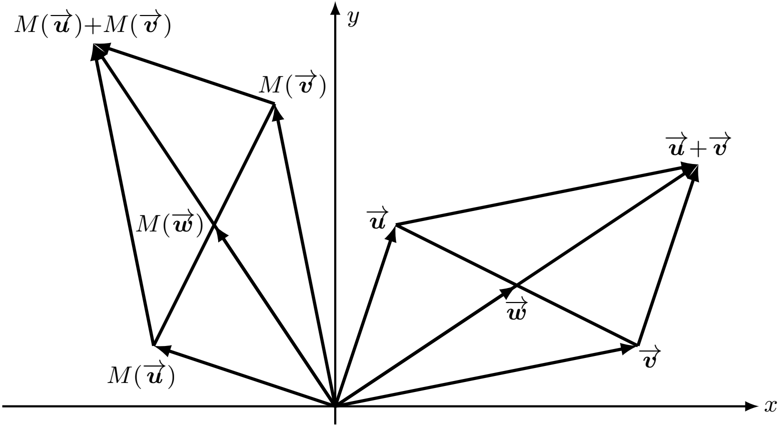


Оскільки $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, а звідси випливає, що $\left|M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right|$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = 2M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}). \tag{3}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + \frac{1}{2}(M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})). \tag{4}$$



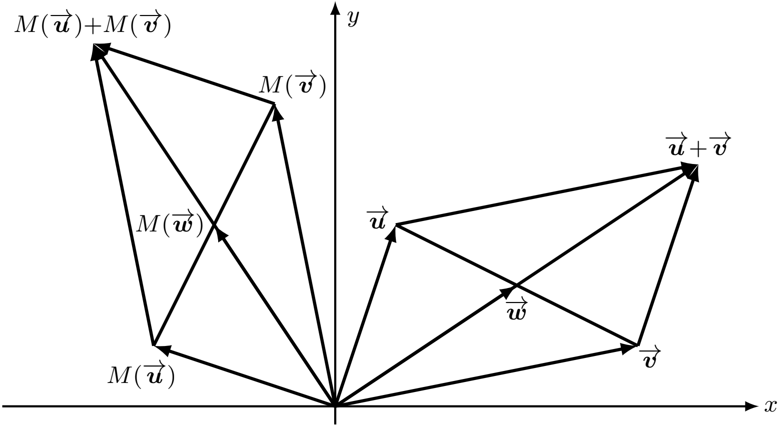
Оскільки $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, а звідси випливає, що $\left|M(\overrightarrow{p})\right| = \left|\overrightarrow{p}\right|$ для довільного вектора $\overrightarrow{p}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 2M(\overrightarrow{w}). \tag{3}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\overrightarrow{w}) = M(\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}(M(\overrightarrow{v}) - M(\overrightarrow{u})). \tag{4}$$

Рухи зберігають точковий добуток векторів

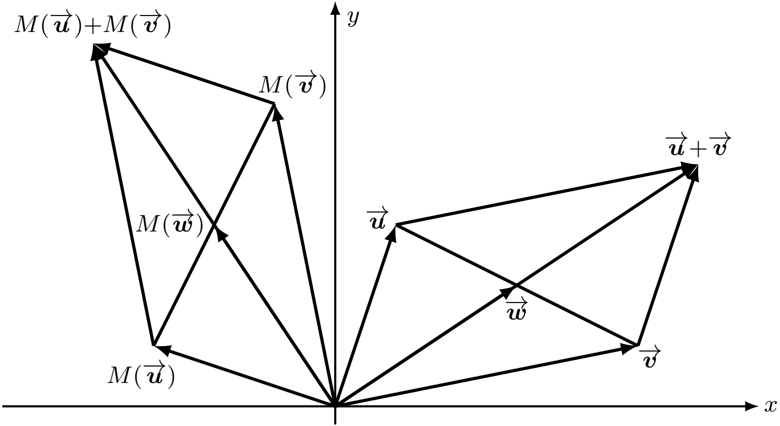


Оскільки $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, а звідси випливає, що $\left|M(\overrightarrow{p})\right| = \left|\overrightarrow{p}\right|$ для довільного вектора $\overrightarrow{p}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 2M(\overrightarrow{w}). \tag{3}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\overrightarrow{w}) = M(\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}(M(\overrightarrow{v}) - M(\overrightarrow{u})). \tag{4}$$



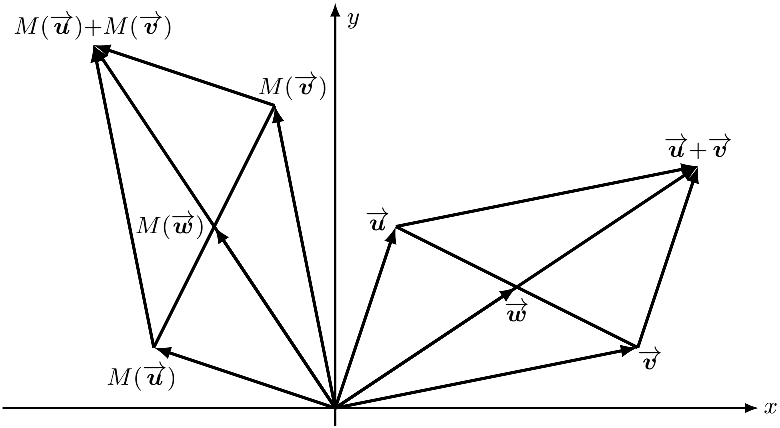
Оскільки $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, а звідси випливає, що $\left|M(\overrightarrow{p})\right| = \left|\overrightarrow{p}\right|$ для довільного вектора $\overrightarrow{p}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 2M(\overrightarrow{w}). \qquad (3)$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\overrightarrow{w}) = M(\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}(M(\overrightarrow{v}) - M(\overrightarrow{u})). \qquad (4)$$

Рухи зберігають точковий добуток векторів



Оскільки $M(\vec{0}) = \vec{0}$, а звідси випливає, що $\left|M(\vec{p})\right| = \left|\vec{p}\right|$ для довільного вектора $\vec{p}$, то використавши рівність (1) і лему 2.2.3 отримуємо, що

$$M(\vec{u} + \vec{v}) = 2M(\vec{w}). \tag{3}$$

Аналогічно маємо, що з рівності (2) і леми 2.2.3 випливає, що

$$M(\vec{w}) = M(\vec{u}) + \frac{1}{2}(M(\vec{v}) - M(\vec{u})). \tag{4}$$

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{w})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{v}) = cM(\overrightarrow{v})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{v}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{p} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{p} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1M_0 = M_0T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ∎

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1M_0 = M_0T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1M_0 = M_0T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1M_0 = M_0T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1M_0 = M_0T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1M_1$.
Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1} M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$. Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = M T_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = T_1 M_1$.
Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Підставлення виразу для $M(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ з рівності (4) у рівність (3) та спрощення результату обчислень доводить **крок 1**.

Крок 2. $M(c\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = cM(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ для довільного дійсного числа c.

Крок 2 випливає з леми 2.2.3, якщо ми приймемо $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ і $t = c$ в умові леми 2.2.3. Це і завершує доведення теореми. ■

Теорема 2.2.29

Кожен рух M можна зобразити єдиним чином у вигляді $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$, де T_1 і T_2 — паралельні перенесення, а M_0 — рух, для якого початок координат є нерухомою точкою, тобто $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Доведення. Означимо паралельне перенесення T_1 за формулою

$$T_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і нехай $M_1 = T_1^{-1}M$. Очевидно, що $M_1(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = T_1 M_1$.
Аналогічно, якщо ми визначимо паралельне перенесення T_2 за формулою

$$T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{p}} - M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і прийнявши $M_2 = MT_2^{-1}$, то отримуємо, що $M_2(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $M = M_2 T_2$.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{p}) = T_1 M_1(\overrightarrow{p}) = M_1(\overrightarrow{p}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{p}) = M_2 T_2(\overrightarrow{p}) = M_2(\overrightarrow{p}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{p}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{p}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{p}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{p}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{p}) = M_1(\overrightarrow{p})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1M_0 = M_0T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно.

Далі доведемо, що $M_1 = M_2$. Однак, за теоремою 2.2.28 рухи M_1 і M_2 є лінійними перетвореннями, а отже, отримуємо, що

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = T_1 M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}})$$

і

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2 T_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) - M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})).$$

отож, для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ маємо, що

$$M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) + M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Із спеціального випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ збігається з нуль-вектором $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ випливає, що

$$M_2(M^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{0}})) = M(\overrightarrow{\mathbf{0}}).$$

Іншими словами, ми можемо скоротити ці вирази, і тоді отримуємо рівність $M_2(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = M_1(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$.

Єдиність зображення $M = T_1 M_0 = M_0 T_2$ руху M доводиться аналогічно. $\blacksquare$

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\
&= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\
&= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\
&= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\ &= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\ &= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ∎

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ = M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ = M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\ = \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\ &= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ■

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\ &= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\vec{u}) \bullet M(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для довільних векторів $\vec{u}$ і $\vec{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\vec{u}\bullet\vec{u}+2\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}\bullet\vec{v} &= (\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v}) = \\ &= M(\vec{u}+\vec{v})\bullet M(\vec{u}+\vec{v}) = \\ &= M(\vec{u})\bullet M(\vec{u})+2M(\vec{u})\bullet M(\vec{v})+M(\vec{v})\bullet M(\vec{v}) = \\ &= \vec{u}\bullet\vec{u}+2M(\vec{u})\bullet M(\vec{v})+\vec{v}\bullet\vec{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\vec{u}\bullet\vec{u}$ та $\vec{v}\bullet\vec{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\vec{u}) \bullet M(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\
&= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\
&= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\
&= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ∎

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\ &= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\ &= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$. ∎

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+2\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}} &= (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \\ &= M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \\ &= M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})+2M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}+2M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet M(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. ■

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для довільних векторів $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\
&= M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \\
&= M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{u})+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+M(\overrightarrow{v})\bullet M(\overrightarrow{v}) = \\
&= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2M(\overrightarrow{u})\bullet M(\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\overrightarrow{u}) \bullet M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$.

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\vec{u}) \bullet M(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для довільних векторів $\vec{u}$ і $\vec{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}\vec{u}\bullet\vec{u}+2\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}\bullet\vec{v} &= (\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v}) = \\ &= M(\vec{u}+\vec{v})\bullet M(\vec{u}+\vec{v}) = \\ &= M(\vec{u})\bullet M(\vec{u})+2M(\vec{u})\bullet M(\vec{v})+M(\vec{v})\bullet M(\vec{v}) = \\ &= \vec{u}\bullet\vec{u}+2M(\vec{u})\bullet M(\vec{v})+\vec{v}\bullet\vec{v}\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\vec{u}\bullet\vec{u}$ та $\vec{v}\bullet\vec{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\vec{u}) \bullet M(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Лема 2.2.30

Нехай M — рух і припустимо, що $M(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Тоді

$$M(\vec{u}) \bullet M(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для довільних векторів $\vec{u}$ і $\vec{v}$.

Доведення. Наступний рядок рівностей виконується, оскільки M є відображенням, що зберігає відстань, і, за теоремою 2.2.28, також є лінійним перетворенням:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\bullet\vec{u}+2\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}\bullet\vec{v} &= (\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v}) = \\
&= M(\vec{u}+\vec{v})\bullet M(\vec{u}+\vec{v}) = \\
&= M(\vec{u})\bullet M(\vec{u})+2M(\vec{u})\bullet M(\vec{v})+M(\vec{v})\bullet M(\vec{v}) = \\
&= \vec{u}\bullet\vec{u}+2M(\vec{u})\bullet M(\vec{v})+\vec{v}\bullet\vec{v}
\end{aligned}$$

Далі, скоротивши вирази $\vec{u}\bullet\vec{u}$ та $\vec{v}\bullet\vec{v}$ з обидвох частин рівності та поділивши на 2, отримуємо рівність $M(\vec{u}) \bullet M(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$. ■

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок A, B і C.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\boldsymbol{0}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ■

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ■

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0.

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ∎

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ■

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0.

Теорема 2.2.31

Якщо M — рух, то

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} \bullet \overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

для довільних точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$.

Доведення. За теоремою 2.2.29 ми можемо виразити рух M у вигляді $M = TM_0$, де T — паралельне перенесення та M_0 — рух з властивістю $M_0(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Легко перевіряється, що

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{B})}$$

і

$$\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{C})} = \overrightarrow{M_0(\boldsymbol{A})M_0(\boldsymbol{C})}.$$

Твердження теореми тепер випливає з леми 2.2.30 застосованої до руху M_0. ■

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.

Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

Теорема 2.2.33

Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.

Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

Теорема 2.2.33

Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.

Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

Теорема 2.2.33

Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.

Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

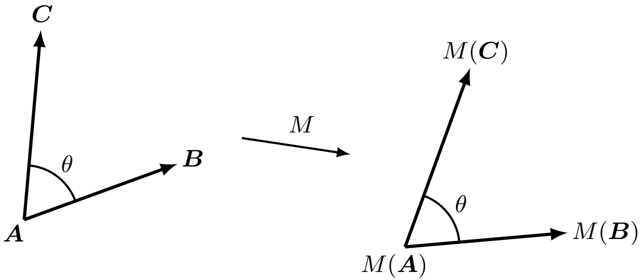
Теорема 2.2.33

Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.



Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

Теорема 2.2.33

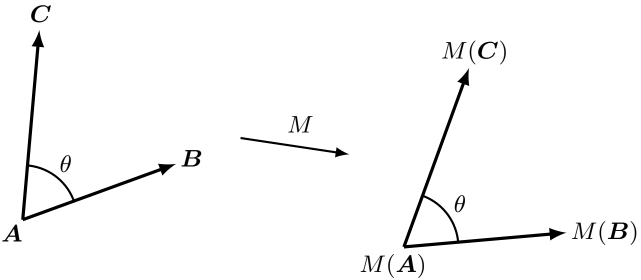
Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Рухи зберігають точковий добуток векторів

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.



Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

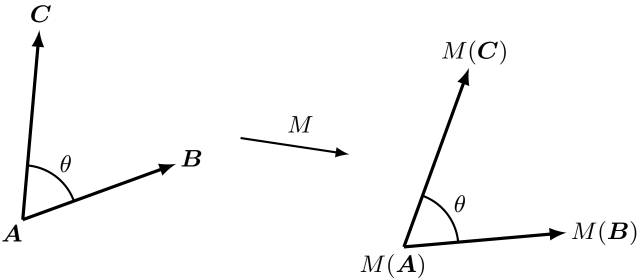
Теорема 2.2.33

Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.



Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

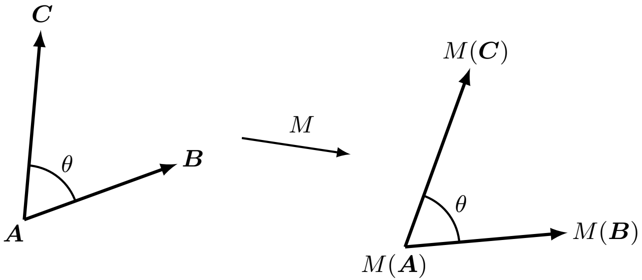
Теорема 2.2.33

Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Наслідок 2.2.32

Рухи зберігають кути.

Див. рис.



Існує обернене твердження до результатів, доведених вище, яке ми пропонуємо читачам довести самостійно.

Теорема 2.2.33

Перетворення, яке зберігає довжину векторів і кути між ними, також зберігає відстань, тобто воно є рухом.

Дякую за увагу!