Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 30: Обертання в площині

Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут θ*.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут θ*.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут θ*.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут θ*.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут θ*.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут θ*.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r,\alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут* θ.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут* θ.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут* θ.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут* θ.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).

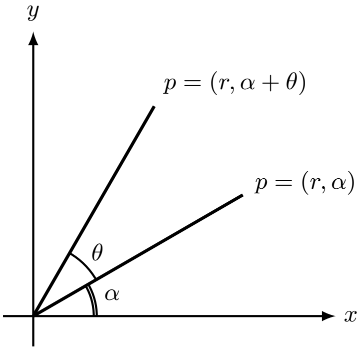
Обертання в площині

Іншим інтуїтивно простим рухом є обертання площини.

Означення 2.2.11

Нехай $\theta \in \mathbb{R}$. Відображення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вигляду $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, де точки виражені в полярних координатах, називається *обертанням навколо початку координат на кут* θ.

Використання полярних координат було простим способом означення обертання навколо початку координат, але не є зручним з точки зору обчислень (див. рис.).



Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

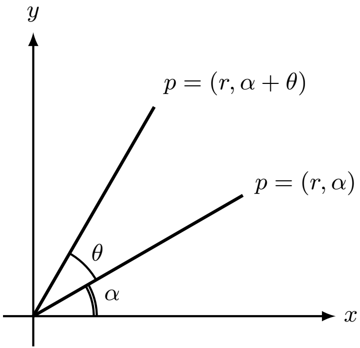
$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \\ y' &= r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо

Обертання в площині



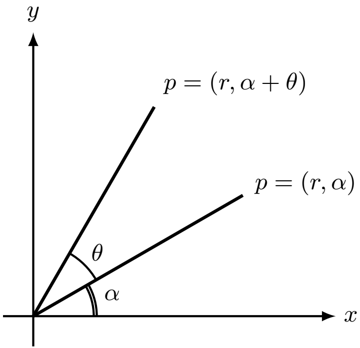
Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \\ y' &= r\sin(\alpha + \theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо



Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки p:

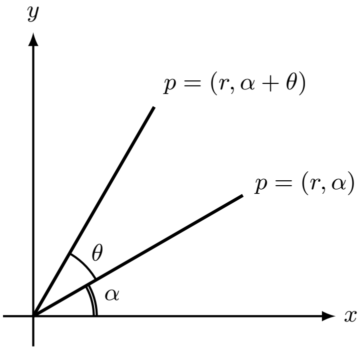
$$x = r\cos\alpha; \qquad y = r\sin\alpha. \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$x' = r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \qquad y' = r\sin(\alpha + \theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо

Обертання в площині



Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

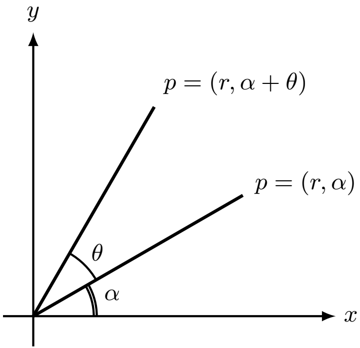
$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \\ y' &= r\sin(\alpha + \theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо

Обертання в площині



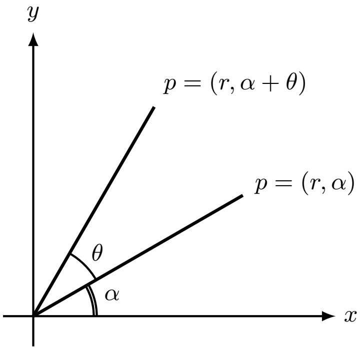
Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \\ y' &= r\sin(\alpha + \theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо



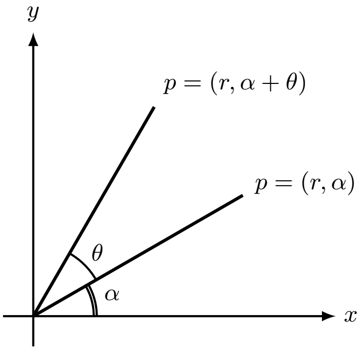
Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

$$x = r\cos\alpha; \quad y = r\sin\alpha. \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$x' = r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \quad y' = r\sin(\alpha + \theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо



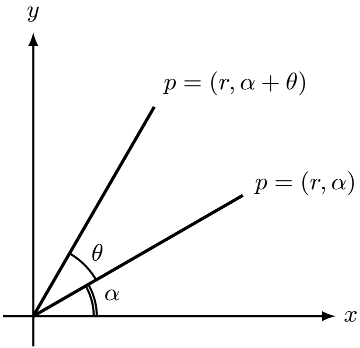
Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

$$x = r\cos\alpha; \qquad y = r\sin\alpha. \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \qquad y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо



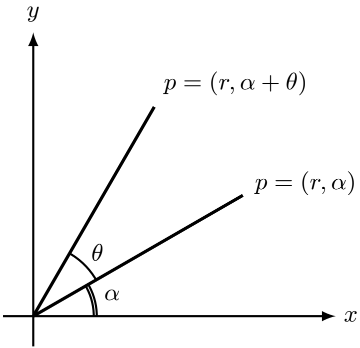
Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \\ y' &= r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо



Щоб вивести рівняння для обертання R в декартових координатах, ми використовуємо основне співвідношення між полярними координатами (r, α) і декартовими координатами (x, y) для точки $\boldsymbol{p}$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Нехай $R(x, y) = (x', y')$. Оскільки $R(r, \alpha) = (r, \alpha + \theta)$, то

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta; \\ y' &= r\sin(\alpha + \theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Зробивши заміну (1) у формулі (2), отримуємо

Обертання в площині

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Обертання в площині

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Обертання в площині

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta;\\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Теорема 2.2.12

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут θ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta; \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема таке обертання є лінійним перетворенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Безпосередньо обчисленнями з використанням означення руху та теореми 2.2.12 доводиться така теорема:

Теорема 2.2.13

Відображення обертання навколо початку координат на кут є рухом.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.14

Рівняння для обертання R навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Крім того, звернемо увагу, що обернене відображення до обертання на кут θ є просто обертанням на кут $-\theta$, а отже, маючи рівняння обертання, легко записати рівняння для оберненого відображення до цього обертання. У нашому прикладі рівняння для оберненого обертання є такими

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y';$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'.$$

Нам не потрібно було розв'язувати першу множину рівнянь для x і y безпосередньо.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ L' прямої L, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "$'$" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання* R *навколо точки* $\boldsymbol{p}$ *на кут* θ визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ L' прямої L, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ “$'$” у змінних, отримуємо рівняння для прямої L'
$$\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки p і q на прямій L, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(p)$ і $R(q)$, але у цьому випадку було б більше роботи. ∎

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $p \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки p на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку p і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка p називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ L' прямої L, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої L'
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки p і q на прямій L, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(p)$ і $R(q)$, але у цьому випадку було б більше роботи. ∎

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $p \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки p на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку p і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка p називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ∎

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання відображення R*.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням

$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:

$$-3\Big(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\Big) + 2\Big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\Big) = 2.$$

Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$

$$\Big(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\Big)\,x + \Big(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\Big)\,y = 2.$$

Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ∎

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "$'$" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ∎

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням

$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:

$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$

Спростивши вирази та опустивши символ “′” у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$

$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$

Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи.

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Обертання в площині

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ∎

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ∎

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "$'$" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи.

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$
$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання* R *навколо точки* $\boldsymbol{p}$ *на кут* θ визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням

$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:

$$-3\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) = 2.$$

Спростивши вирази та опустивши символ “$'$” у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$

$$\left(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x + \left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)y = 2.$$

Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням

$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:

$$-3\Big(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\Big) + 2\Big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\Big) = 2.$$

Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$

$$\Big(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\Big)x + \Big(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\Big)y = 2.$$

Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням

$$-3x+2y=2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:

$$-3\Big(\tfrac{1}{2}x'+\tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\Big)+2\Big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\tfrac{1}{2}y'\Big)=2.$$

Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$

$$\Big(-\tfrac{3}{2}-\sqrt{3}\Big)x+\Big(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1\Big)y=2.$$

Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R=TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L'}$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x+2y=2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\Big(\tfrac{1}{2}x'+\tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\Big)+2\Big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\tfrac{1}{2}y'\Big)=2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L'}$
$$\Big(-\tfrac{3}{2}-\sqrt{3}\Big)x+\Big(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1\Big)y=2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R=TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x+2y=2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x'+\tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\tfrac{1}{2}y'\right)=2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ “$'$” у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2}-\sqrt{3}\right)x+\left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)y=2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R=TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням
$$-3x+2y=2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:
$$-3\left(\tfrac{1}{2}x'+\tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+2\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\tfrac{1}{2}y'\right)=2.$$
Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$
$$\left(-\tfrac{3}{2}-\sqrt{3}\right)x+\left(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)y=2.$$
Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R=TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Приклад 2.2.15

Продовжуючи приклад 2.2.14, припустимо, що ми хочемо знайти образ $\boldsymbol{L}'$ прямої $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням

$$-3x + 2y = 2.$$

Розв'язок. Все, що нам потрібно зробити, це замінити x і y:

$$-3\Big(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\Big) + 2\Big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\Big) = 2.$$

Спростивши вирази та опустивши символ "′" у змінних, отримуємо рівняння для прямої $\boldsymbol{L}'$

$$\Big(-\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\Big)\,x + \Big(-3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\Big)\,y = 2.$$

Звичайно, ми могли б також знайти дві різні точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, а потім обчислити рівняння для прямої, що проходить через дві точки $R(\boldsymbol{p})$ і $R(\boldsymbol{q})$, але у цьому випадку було б більше роботи. ■

Поки що ми розглядали лише обертання навколо початку координат, але легко визначити обертання навколо довільної точки.

Означення 2.2.16

Нехай $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. *Узагальнене обертання R навколо точки $\boldsymbol{p}$ на кут θ* визначається рівністю $R = TR_0T^{-1}$, де T — паралельне перенесення, що відображає початок координат у точку $\boldsymbol{p}$ і R_0 — обертання навколо точки початку координат на кут θ. Точка $\boldsymbol{p}$ називається *центром обертання* відображення R.

Обертання в площині

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3; \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівнняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1.$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3;$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1.$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3, -1)$ на кут $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3, -1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x - 3; \\ y' &= y - 1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x + 3; \\ y' &= y + 1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3; \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3;$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1.$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T:\quad \begin{aligned} x' &= x-3;\\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}:\quad \begin{aligned} x' &= x+3;\\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3;\\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3;$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1.$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3; \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3;$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1.$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x-3; \\ y' &= y-1, \end{aligned} \qquad\qquad T^{-1}: \quad \begin{aligned} x' &= x+3; \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\dfrac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3; \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що узагальнене обертання є рухом, оскільки воно є композицією рухів.

Приклад 2.2.17

Знайдіть рівняння для обертання R навколо точки $(-3,-1)$ на кут $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Паралельне перенесення T, яке відображає початок координат у точку $(-3,-1)$, і обернене до нього T^{-1} визначаються рівняннями

$$T: \quad x' = x - 3; \quad y' = y - 1, \qquad T^{-1}: \quad x' = x + 3; \quad y' = y + 1.$$

Рівняння для обертання R_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{3}$ вже були обчислені в прикладі 2.2.14. Отже, рівняння для узагальненого обертання $R = TR_0T^{-1}$ має вигляд

$$x' = \frac{1}{2}(x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y+1) - 3;$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+1) - 1.$$

■

Обертання в площині

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $p = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Обертання в площині

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $p = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $p = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, — його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) прям

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, — його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Обертання в площині

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Вигляд розв'язку прикладу 2.2.17 узагальнюється до теореми 2.2.18, доведення якої ми пропонуємо провести слухачам самостійно.

Теорема 2.2.18

Рівняння обертання R навколо точки $\boldsymbol{p} = (a, b)$ на кут θ мають вигляд

$$x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a;$$
$$y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b.$$

Три цікаві властивості обертань представлені в твердженні 2.2.19.

Твердження 2.2.19

(1) Лише нерухома точка обертання, яке не є тотожним відображенням, є його центр.

(2) Усі обертання змінюють нахил прямої, якщо обертання не відбувається на кут 0 або π.

(3) Тільки обертання на кут 0 або π мають інваріантну (нерухому) пряму.

Доведення. Ми доведемо лише твердження (2). Доведення твердження (1) залишаємо слухачам як вправу, а твердження (3) є безпосереднім наслідком твердження (2).

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ■

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax+by=c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}'=R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta+y\sin\theta)+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)=c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta-a\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta=0$, тобто $\theta=0$ або $\theta=\pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta=-a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax+by=c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}'=R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta+y\sin\theta)+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)=c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta-a\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta=0$, тобто $\theta=0$ або $\theta=\pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta=-a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ■

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax+by=c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}'=R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta+y\sin\theta)+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)=c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta-a\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta=0$, тобто $\theta=0$ або $\theta=\pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta=-a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax+by=c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}'=R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta+y\sin\theta)+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)=c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta-a\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta=0$, тобто $\theta=0$ або $\theta=\pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta=-a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ■

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L'} = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L'}$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L'}$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L'}$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення.

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ■

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення.

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax+by=c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}'=R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta+y\sin\theta)+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)=c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta-a\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta=0$, тобто $\theta=0$ або $\theta=\pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta=-a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення.

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення.

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення.

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення.

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax+by=c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}'=R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta+y\sin\theta)+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)=c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta-a\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta=0$, тобто $\theta=0$ або $\theta=\pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta=-a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ∎

Добре відомо з твердження 2.2.10, що паралельні перенесення не змінюють кута нахилу прямої. Отже, достатньо довести твердження (2) для обертання R навколо початку координат. Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма, яка визначається рівнянням $ax + by = c$. Якщо R — обертання на кут θ і $\boldsymbol{L}' = R(\boldsymbol{L})$, то підставивши для x і y рівності для R^{-1}, отримуємо, що

$$a(x\cos\theta + y\sin\theta) + b(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c$$

є рівнянням для прямої $\boldsymbol{L}'$. Доведення твердження (3) у спеціальному випадку, коли пряма $\boldsymbol{L}$ або пряма $\boldsymbol{L}'$ є вертикальною є очевидним, і ми залишаємо його слухачам як вправу. Отже, можемо припускати, що визначені кутові коефіцієнти прямих. Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $\boldsymbol{L}'$ дорівнює

$$\frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}.$$

Однак ця частка ніколи не може дорівнювати кутовому коефіцієнтові прямої $\boldsymbol{L}$, який дорівнює $\frac{-a}{b}$, якщо $\sin\theta = 0$, тобто $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. (Просто встановіть обидва вирази рівними і спростіть отримане рівняння, щоб отримати рівність $b^2\sin\theta = -a^2\sin\theta$.) Це завершує доведення. ■

Дякую за увагу!