Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 28: Рух

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = \left|\overrightarrow{pq}\right|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***“ізометрія”***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***“рух”*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***“ізометрія”***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***“рух”*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***“ізометрія”***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***“рух”*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = \left|\overrightarrow{pq}\right|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***“ізометрія”***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***“рух”*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***"ізометрія"***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***"рух"*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін *"ізометрія"*, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін *"рух"* популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***“ізометрія”***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***“рух”*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = \left|\overrightarrow{pq}\right|,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***“ізометрія”***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***“рух”*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2.1

Перетворення $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *рухом*, *ізометрією*, або *конгруентним перетворенням*, лінійного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\left|\overrightarrow{M(p)M(q)}\right| = |\overrightarrow{pq}|\,,$$

для довільної пари точок $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Простіше кажучи, рухи — це відображення, які зберігають відстань. Якщо зосередитися на цьому аспекті, то математики зазвичай використовують термін ***“ізометрія”***, коли говорять про відображення між довільними просторами, що зберігають відстань. Термін ***“рух”*** популярний у контексті відображень лінійного простору $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між"*.

(2) Рухи зберігають колінеарність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

---

*Відношення "між" також називають проміжністю.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і C — точка між двома точками A і B. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Ми доведемо, що точка C' розташована між точками A' та B'. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A'C'}| + |\overrightarrow{C'B'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ■

Твердження 1.4.8

Нехай $p, q \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[p, q] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}|\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між".[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| \right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між".[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і C — точка між двома точками A і B. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Ми доведемо, що точка C' розташована між точками A' та B'. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A'C'}| + |\overrightarrow{C'B'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $p, q \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[p, q] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| \right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між".[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і C — точка між двома точками A і B. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Ми доведемо, що точка C' розташована між точками A' та B'. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A'C'}| + |\overrightarrow{C'B'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $p, q \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[p, q] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| \right\}.$$

Рух

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і C — точка між двома точками A і B. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Ми доведемо, що точка C' розташована між точками A' та B'. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A'C'}| + |\overrightarrow{C'B'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $p, q \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[p, q] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}|\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між".[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і C — точка між двома точками A і B. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Ми доведемо, що точка C' розташована між точками A' та B'. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A'C'}| + |\overrightarrow{C'B'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $p, q \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[p, q] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}|\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і C — точка між двома точками A і B. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Ми доведемо, що точка C' розташована між точками A' та B'. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A'C'}| + |\overrightarrow{C'B'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ■

Твердження 1.4.8

Нехай $p, q \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[p, q] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}|\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}\right|\right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a]Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}\right|\right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між".[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}\right|\right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між".[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді
$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}\right|\right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення "між".[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення "між" також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| \right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ■

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{C}',\boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ■

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a]Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ■

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a] Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| \right\}.$$

Теорема 2.2.2

(1) Рухи зберігають відношення “між”.[a]

(2) Рухи зберігають колінераність і неколінеарність.

(3) Рухи відображають прямі в прямі.

[a]Відношення “між” також називають *проміжністю*.

Доведення. Для доведення твердження (1) приймемо, що M — рух і $\boldsymbol{C}$ — точка між двома точками $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Ми доведемо, що точка $\boldsymbol{C}'$ розташована між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. Тоді маємо, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'}|.$$

Перша і третя рівності випливають з означення руху. Друга рівність випливає з твердження 1.4.8. Знову використавши твердження 1.4.8, отримуємо твердження (1).

Твердження (2) і (3) випливають безпосередньо з твердження (1). ∎

Твердження 1.4.8

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.
Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \quad \text{або} \quad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t| \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t| \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t| \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то $$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ■

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Рух

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$

Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A'} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A'} - t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'X'}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X'}$ лежить між точками $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C'} = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A'} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A'} - t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'X'}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X'}$ лежить між точками $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C'} = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t| \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t| \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t| \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ■

Твердження 1.4.9

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B.

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A'} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A'} - t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'X'}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X'}$ лежить між точками $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C'} = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ■

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ■

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо $$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$ то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ■

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B. ∎

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо
$$C = A + t\overrightarrow{AB} = (1-t)A + tB,$$
то
$$M(C) = M(A) + t\overrightarrow{M(A)M(B)} = (1-t)M(A) + tM(B).$$

Доведення. Нехай $(A', C', B') = M(A, C, B)$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |t|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка C є між точками A та B. За твердженням 1.4.9 лише
$$X_1 = A' + t\overrightarrow{A'B'} \qquad \text{або} \qquad X_2 = A' - t\overrightarrow{A'B'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{A'X'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{A'B'}\right|.$$
З них лише точка X' лежить між точками A' та B'. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $C' = X_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка B лежить між точками A та C, а у випадку **3** точка A лежить між точками C та B.

Твердження 1.4.9

Нехай p — точка на прямій L. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки x на L такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B},$$
то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

- Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.
- Випадок 2. $1 < t$.
- Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}' - t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X}'$ лежить між точками $\boldsymbol{A}'$ та $\boldsymbol{B}'$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ◻

Твердження 1.4.9

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

Лема 2.2.3

Нехай M — рух. Якщо $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$, то
$$M(\boldsymbol{C}) = M(\boldsymbol{A}) + t\overrightarrow{M(\boldsymbol{A})M(\boldsymbol{B})} = (1-t)M(\boldsymbol{A}) + tM(\boldsymbol{B}).$$

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$. Оскільки M — рух, то
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Випадок 2. $1 < t$.

Випадок 3. $t < 0$.

У **випадку 1**, точка $\boldsymbol{C}$ є між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$. За твердженням 1.4.9 лише
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A'} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A'} - t\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$$
є розв'язками рівняння
$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'X'}}\right| = |t|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}\right|.$$
З них лише точка $\boldsymbol{X'}$ лежить між точками $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$. За твердженням (1) теореми 2.2.2 маємо, що $\boldsymbol{C'} = \boldsymbol{X}_1$, що і доводить твердження леми, якщо виконується **випадок 1**.

Доведення в інших двох випадках подібні та ми залишаємо їх як вправи для читачів. Зауважимо, що у випадку **2** точка $\boldsymbol{B}$ лежить між точками $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{C}$, а у випадку **3** точка $\boldsymbol{A}$ лежить між точками $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{B}$. ■

Твердження 1.4.9

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

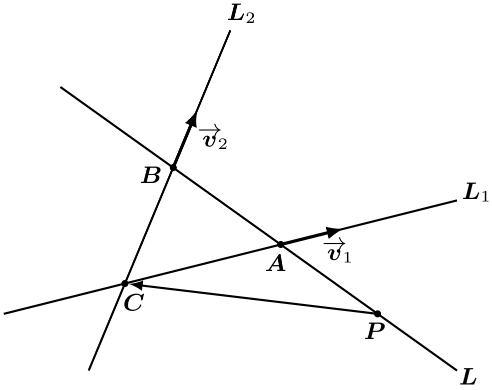
Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).

Лема 2.2.4

Нехай L_1 і L_2 — дві різні прямі на площині, що перетинаються в точці C. Нехай P — довільна точка, яка не належить жодній з цих прямих. Тоді існують такі дві різні точки A та B на прямих L_1 і L_2, відповідно, що точка P лежить на прямій L, яка визначається точками A та B.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ — напрямні вектори прямих L_1 і L_2, відповідно (див. рис.).



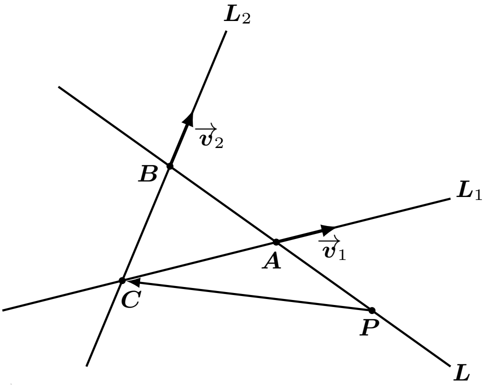
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



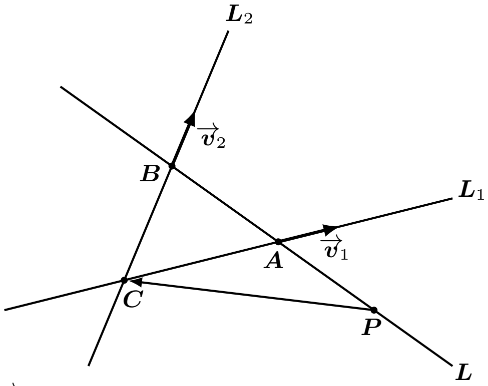
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



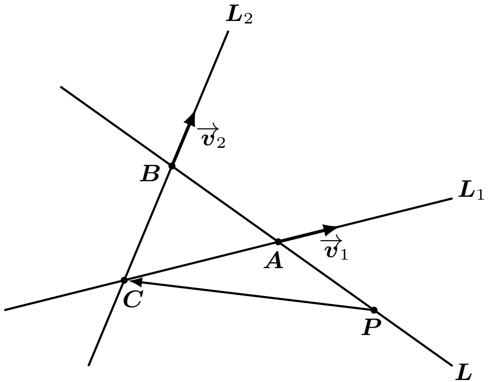
Вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\vec{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\vec{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\vec{v}_1 - t\vec{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \quad (1)$$

Оскільки вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



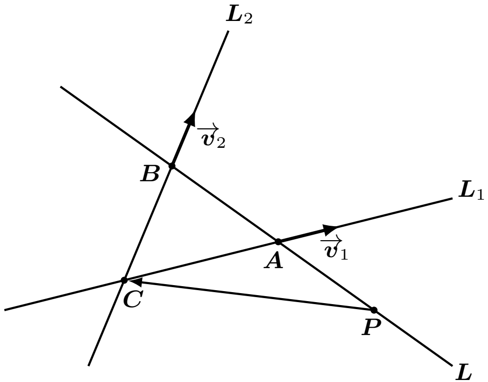
Вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\vec{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\vec{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\vec{v}_1 - t\vec{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \qquad (1)$$

Оскільки вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



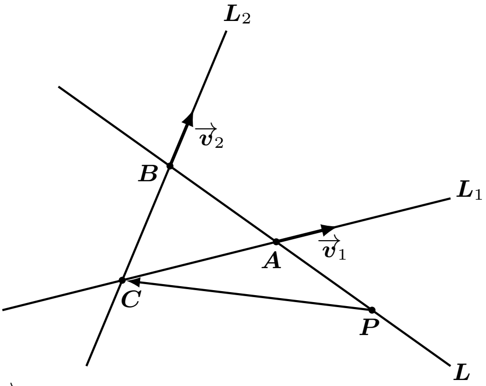
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



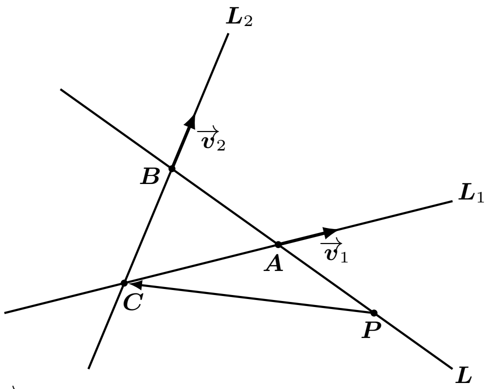
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1-s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



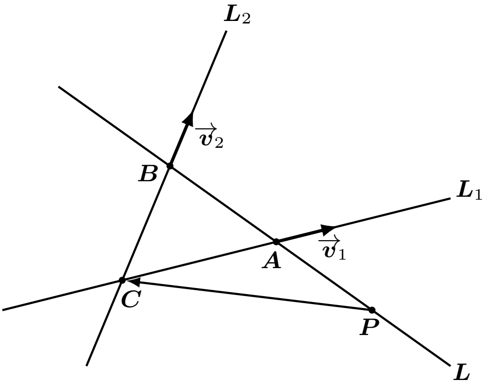
Вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\vec{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\vec{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\vec{v}_1 - t\vec{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



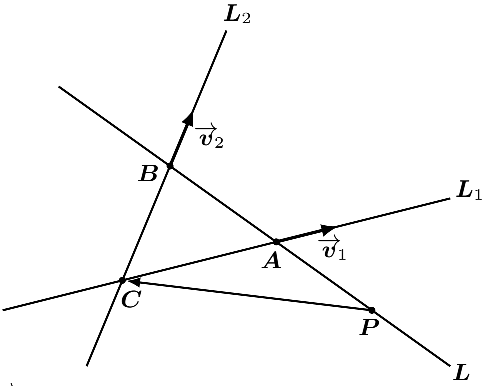
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1-s)\overrightarrow{PC}. \qquad (1)$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



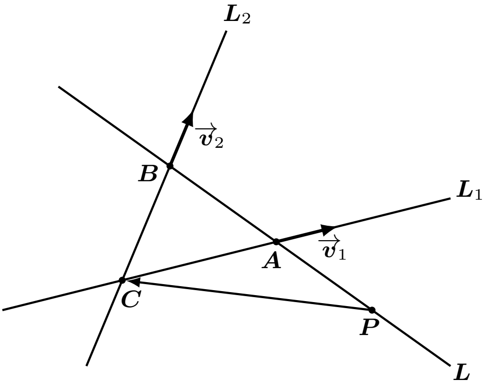
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1-s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



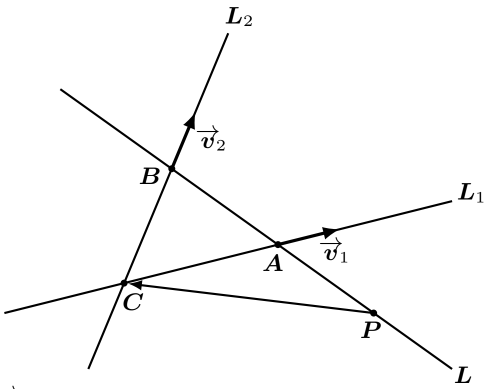
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \qquad (1)$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



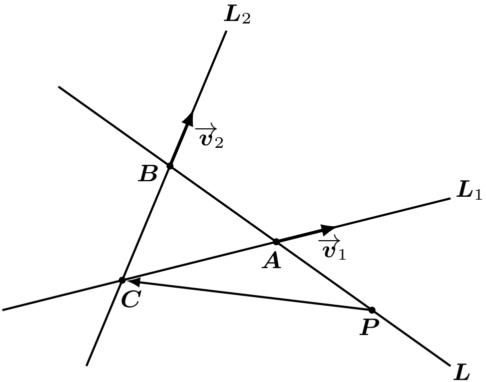
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



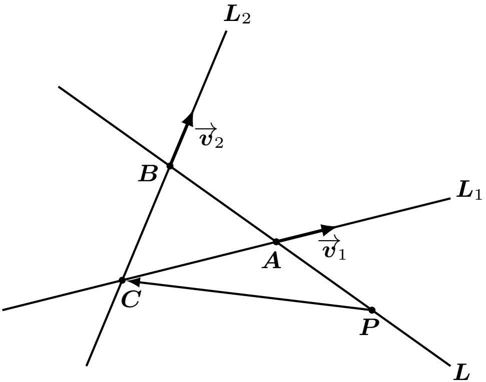
Вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\vec{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\vec{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\vec{v}_1 - t\vec{v}_2 = (1-s)\overrightarrow{PC}. \qquad (1)$$

Оскільки вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



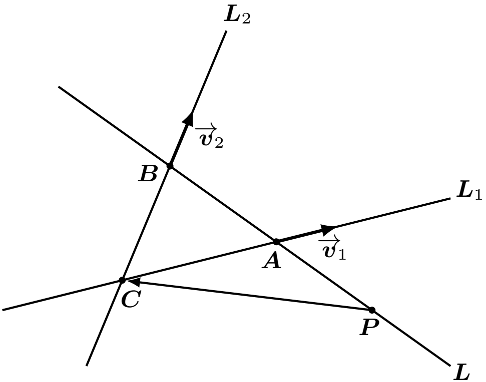
Вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\vec{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\vec{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\vec{v}_1 - t\vec{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



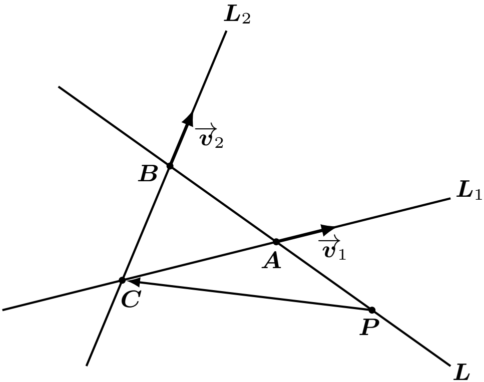
Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1-s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$.



Вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, оскільки прямі L_1 і L_2 не є паралельними. Нехай $A = C + a\overrightarrow{v}_1$ — точка на прямій L_1 з $a > 0$, і нехай L — пряма, яка визначається точками P і A. Для того, щоб знати точку перетину прямих L і L_2 необхідно розв'язати рівняння

$$P + s\overrightarrow{PA} = C + t\overrightarrow{v}_2$$

для дійсних змінних s і t. Це рівняння можна переписати як

$$sa\overrightarrow{v}_1 - t\overrightarrow{v}_2 = (1 - s)\overrightarrow{PC}. \tag{1}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ лінійно незалежні, то $s \neq 1$ і рівняння (1) має єдиний розв'язок для змінних s і t. Приймемо $B = P + s\overrightarrow{PA}$. ■

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5
Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай L — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(L)$ міститься в прямій L'. Нехай C' — довільна точка прямої L'. Нам необхідно довести, що існує точка C на прямій L така, що $M(C) = C'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки A та B прямої L і нехай $(A', B') = M(A, B)$. Тоді $C' = A' + t\overrightarrow{A'B'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $C' = M(A + t\overrightarrow{AB})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай L — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(L)$ міститься в прямій L'. Нехай C' — довільна точка прямої L'. Нам необхідно довести, що існує точка C на прямій L така, що $M(C) = C'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки A та B прямої L і нехай $(A', B') = M(A, B)$. Тоді $C' = A' + t\overrightarrow{A'B'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $C' = M(A + t\overrightarrow{AB})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.
Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай L — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(L)$ міститься в прямій L'. Нехай C' — довільна точка прямої L'. Нам необхідно довести, що існує точка C на прямій L така, що $M(C) = C'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки A та B прямої L і нехай $(A', B') = M(A, B)$. Тоді $C' = A' + t\overrightarrow{A'B'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $C' = M(A + t\overrightarrow{AB})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай L — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(L)$ міститься в прямій L'. Нехай C' — довільна точка прямої L'. Нам необхідно довести, що існує точка C на прямій L така, що $M(C) = C'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки A та B прямої L і нехай $(A', B') = M(A, B)$. Тоді $C' = A' + t\overrightarrow{A'B'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $C' = M(A + t\overrightarrow{AB})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай L — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(L)$ міститься в прямій L'. Нехай C' — довільна точка прямої L'. Нам необхідно довести, що існує точка C на прямій L така, що $M(C) = C'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки A та B прямої L і нехай $(A', B') = M(A, B)$. Тоді $C' = A' + t\overrightarrow{A'B'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $C' = M(A + t\overrightarrow{AB})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{AB}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.
Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.
Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Лема 2.2.5

Рух M є бієктивним відображенням.

Доведення. Те, що рух M є взаємно однозначним відображенням, є очевидним фактом, оскільки якщо відстань між образами двох точок стосовно відображення M дорівнює нулю, то такою ж є відстань між двома точками за означенням руху.

Доведення того факту, що рух M є сюр'єктивним відображенням є важче, і ми доведемо цей факт лише в плоскому випадку. У загальному випадку це доведення можна знайти в багатьох монографіях з обчислювальної геометрії. Почнемо з доведення більш сильної версії теореми 2.2.2(3).

Твердження. M відображає прямі на прямі.

Нехай $\boldsymbol{L}$ — пряма на площині. Ми вже знаємо, що образ $M(\boldsymbol{L})$ міститься в прямій $\boldsymbol{L}'$. Нехай $\boldsymbol{C}'$ — довільна точка прямої $\boldsymbol{L}'$. Нам необхідно довести, що існує точка $\boldsymbol{C}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ така, що $M(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}'$. Для цього виберемо будь-які дві різні точки $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ прямої $\boldsymbol{L}$ і нехай $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Тоді $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'}$ для деякого дійсного числа t. З леми 2.2.3 випливає, що $\boldsymbol{C}' = M(\boldsymbol{A} + t\overrightarrow{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}})$ і наше твердження доведено.

Рух

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).

Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінепрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).

Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінепрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

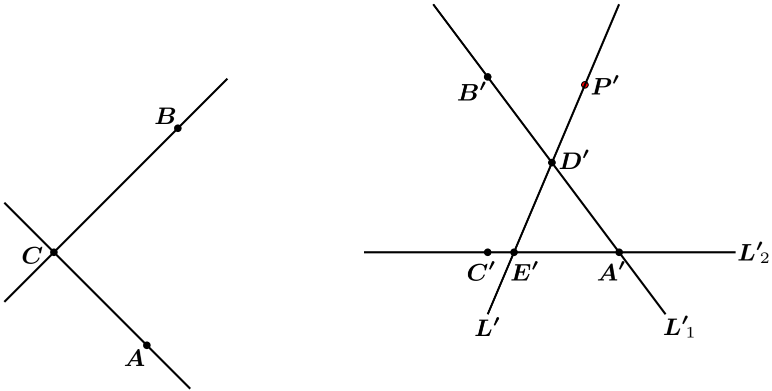
Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).

Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінепрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай $\boldsymbol{P'}$ довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).

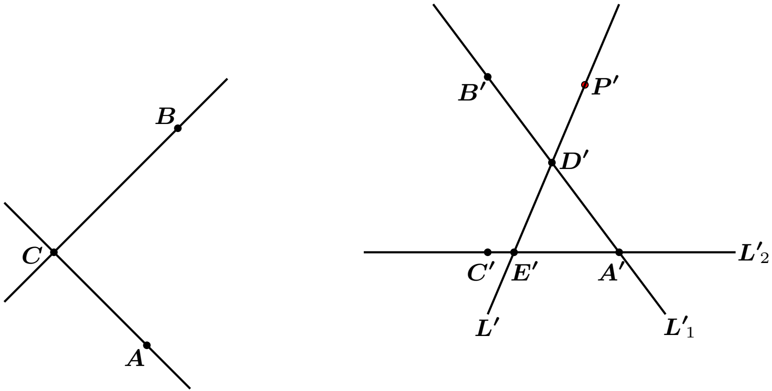
Ми доведемо, що $\boldsymbol{P'} = M(\boldsymbol{P})$ для деякої точки $\boldsymbol{P}$. Візьмемо три неколінепрні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ і нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}, \boldsymbol{C'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{L'}_1$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$, і нехай $\boldsymbol{L'}_2$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{C'}$. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



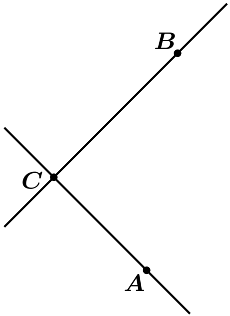
Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінеапрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

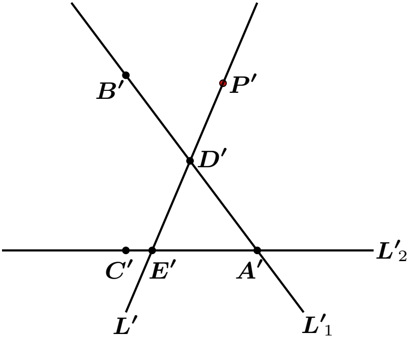
Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінепрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай $\boldsymbol{P'}$ довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).

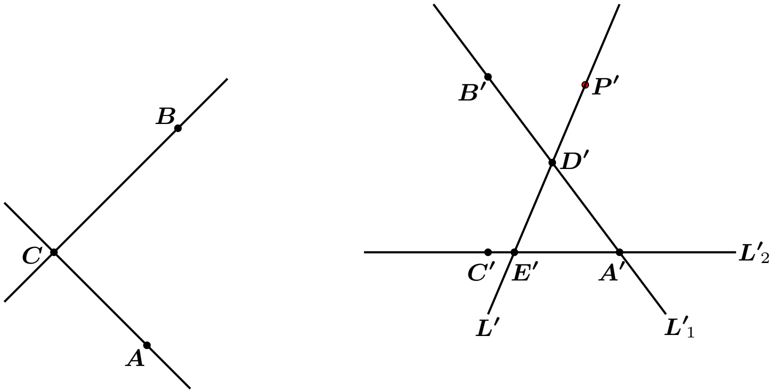




Ми доведемо, що $\boldsymbol{P'} = M(\boldsymbol{P})$ для деякої точки $\boldsymbol{P}$. Візьмемо три неколінепрні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ і нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}, \boldsymbol{C'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{L'}_1$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$, і нехай $\boldsymbol{L'}_2$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{C'}$. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

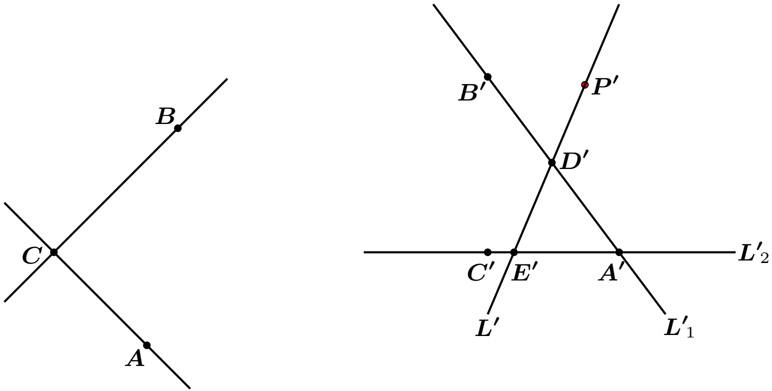
Рух

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай $\boldsymbol{P'}$ довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



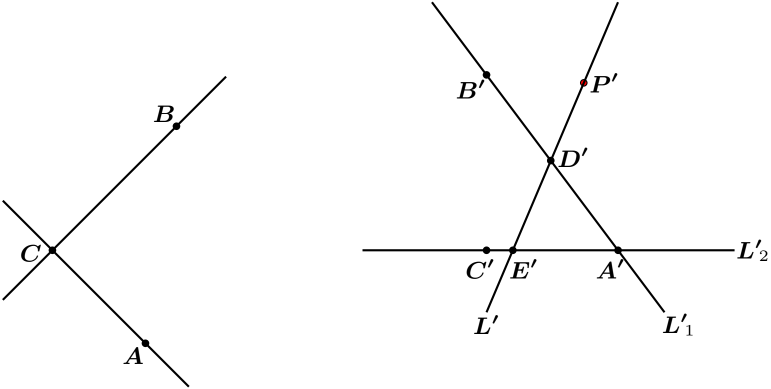
Ми доведемо, що $\boldsymbol{P'} = M(\boldsymbol{P})$ для деякої точки $\boldsymbol{P}$. Візьмемо три неколінепрні точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ і нехай $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}, \boldsymbol{C'}) = M(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Нехай $\boldsymbol{L'}_1$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$, і нехай $\boldsymbol{L'}_2$ — пряма, яка містить точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{C'}$. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



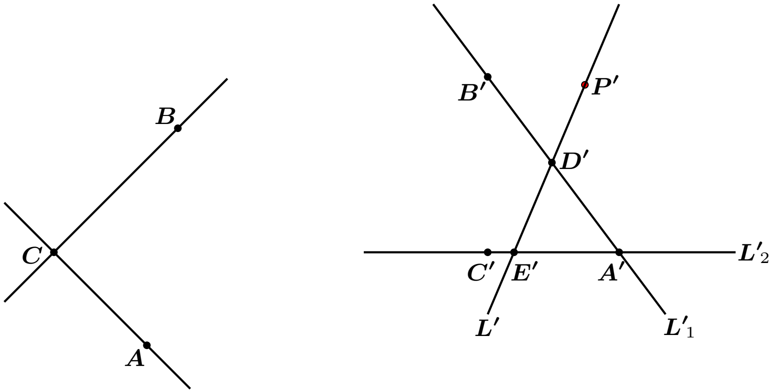
Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінепрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



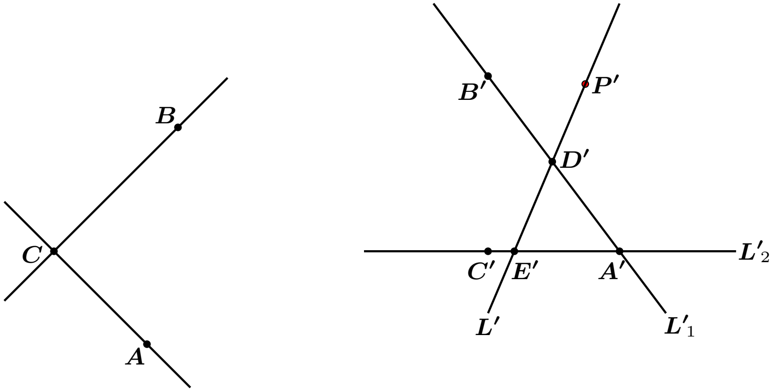
Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінепрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

Ми тепер готові довести, що рух на площині є сюр'єктивним відображенням. Нехай P' довільна точка площини $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).

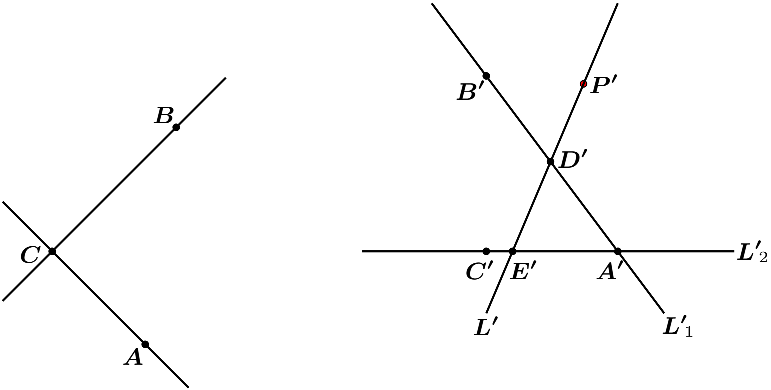


Ми доведемо, що $P' = M(P)$ для деякої точки P. Візьмемо три неколінепрні точки A, B і C і нехай $(A', B', C') = M(A, B, C)$. Нехай L'_1 — пряма, яка містить точки A' та B', і нехай L'_2 — пряма, яка містить точки A' та C'. Ми щойно довели, що всі точки на цих двох прямих містяться в образі руху M.

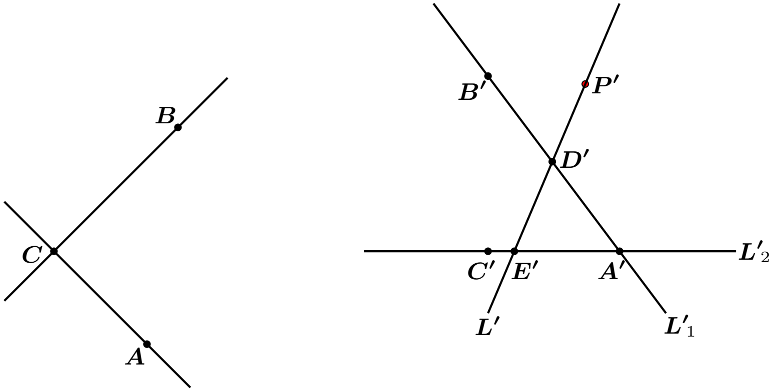
Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2. За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.
Плоский випадок леми 2.2.4 доведено.



Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2. За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.
Плоский випадок леми 2.2.4 доведено. $\square$

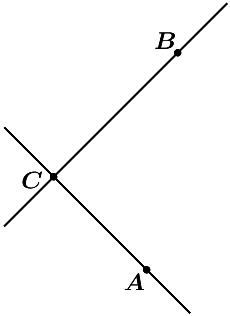


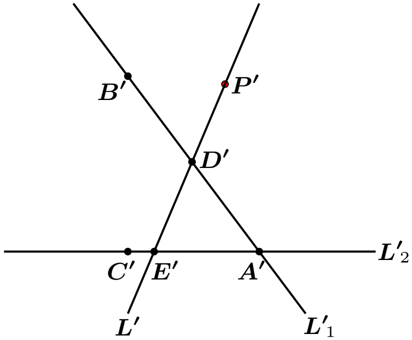
Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2.
За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.
Плоский випадок леми 2.2.4 доведено.



Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2. За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.

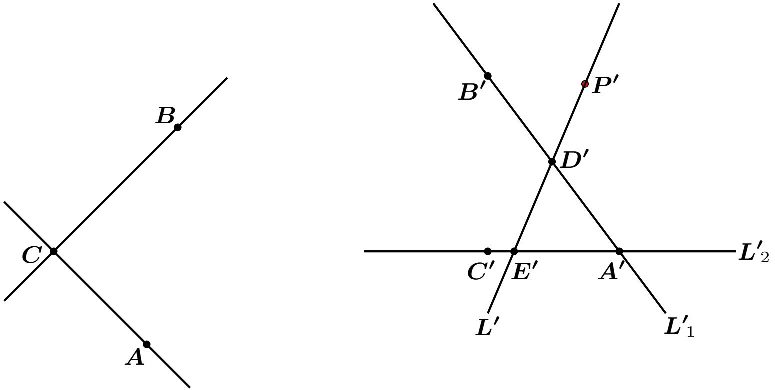
Плоский випадок леми 2.2.4 доведено. ■





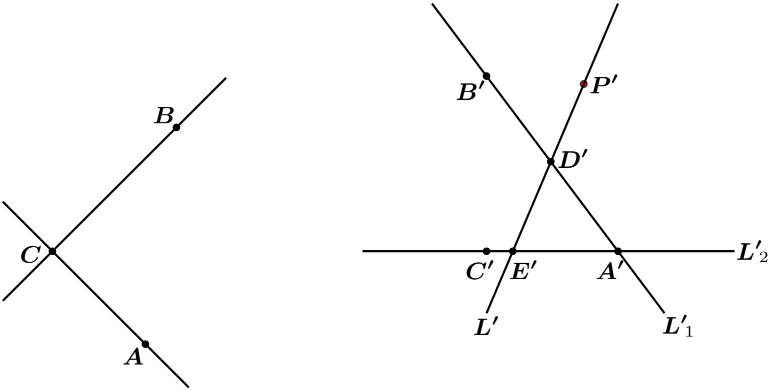
Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2. За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.

Плоский випадок леми 2.2.4 доведено. ■



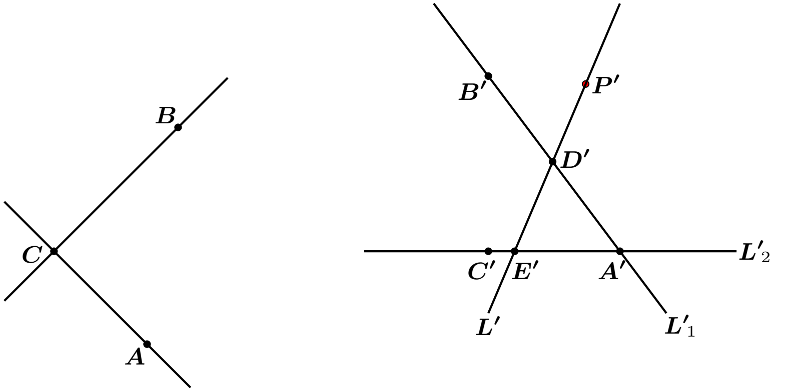
Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2. За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.

Плоский випадок леми 2.2.4 доведено. ■



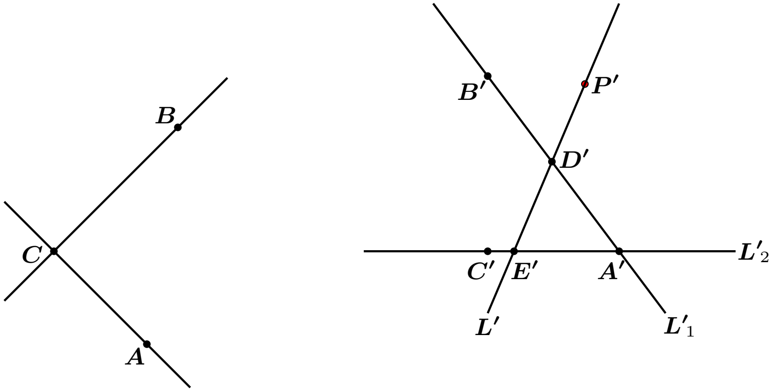
Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2. За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.

Плоский випадок леми 2.2.4 доведено.



Припустимо, що $\boldsymbol{P'}$ — точка, яка не належить жодній з прямих $\boldsymbol{L'}_1$ і $\boldsymbol{L'}_2$. За лемою 2.2.4 існують дві точки $\boldsymbol{D'}$ і $\boldsymbol{E'}$ на прямих $\boldsymbol{L'}_1$ і $\boldsymbol{L'}_2$, відповідно, такі, що точка $\boldsymbol{P'}$ лежить на прямій $\boldsymbol{L'}$, яка визначається точками $\boldsymbol{D'}$ і $\boldsymbol{E'}$, а отже належить образу відображення M.

Плоский випадок леми 2.2.4 доведено.



Припустимо, що P' — точка, яка не належить жодній з прямих L'_1 і L'_2. За лемою 2.2.4 існують дві точки D' і E' на прямих L'_1 і L'_2, відповідно, такі, що точка P' лежить на прямій L', яка визначається точками D' і E', а отже належить образу відображення M.
Плоский випадок леми 2.2.4 доведено. ∎

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$X = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon X \to X$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$X = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T \colon X \to X$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$X = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon X \to X$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай
$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай
$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T \colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай
$$\boldsymbol{X} = \{(x,y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x,y) = (x+1,y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай

$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай
$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Хоча багато з того, що ми доведемо про рухи, залежить лише від їх властивості зберігати відстань, а не від їхньої області визначення, область визначення може бути важливою. Наступний приклад показує, що в лемі 2.2.5 безперечно використовується той факт, що область визначення руху є всією площиною:

Приклад 2.2.6

Нехай
$$\boldsymbol{X} = \{(x, y) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
і визначимо відображення, яке зберігає відстань $T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ за формулою $T(x, y) = (x + 1, y)$. Відображення T не є, очевидно, сюр'єктивним.

Очевидно, що композиція двох відображень, які зберігають відстань та обернене відображення до відображення, яке зберігає відстань, зберігають відстань. Оскільки композиція відображень є бінарною асоціативною операцією в $\mathbb{R}^n$, то з вище сказаного та з означення групи випливає така теорема:

Теорема 2.2.7

Рухи в $\mathbb{R}^n$ стосовно операції композиція відображень утворюють групу.

Рух

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Рух

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Рух

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Ідея руху як відображення, що зберігає відстань, інтуїтивно проста для розуміння, але вона не дуже корисна для обчислень. У процесі отримання простого аналітичного описання рухів ми не лише отримаємо багато геометричних уявлень, але й попрактикуємося у використанні лінійної алгебри для розв'язування геометричних задач. Ми починаємо наше вивчення рухів з підходу, який знову і знову використовується в математиці. А саме, якщо ви зіткнетеся з проблемою класифікації множини об'єктів, спочатку виділіть якомога більше простих і зрозумілих елементів, а потім спробуйте довести, що ці елементи можна використовувати як будівельні блоки, з яких можна використовувати всі елементи класу бути "породженим".

Дякую за увагу!