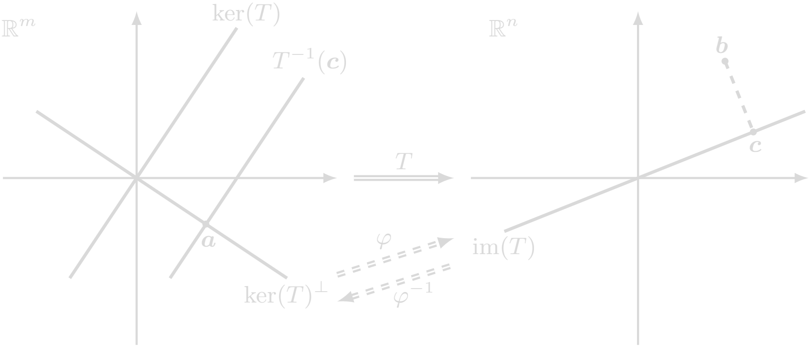
Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 27: Узагальнені обернені матриці

Узагальнені обернені матриці

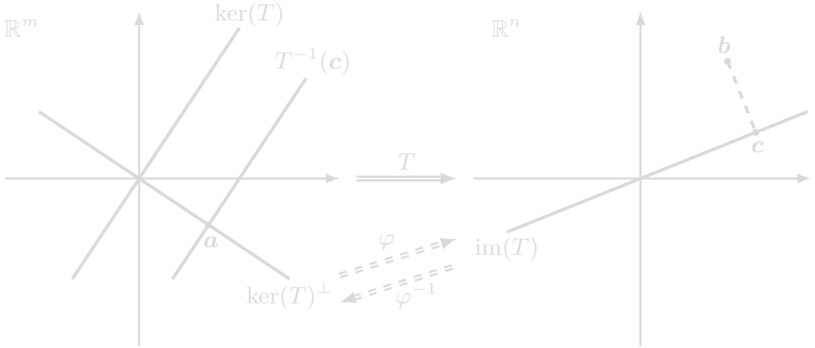
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^+\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\mathrm{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

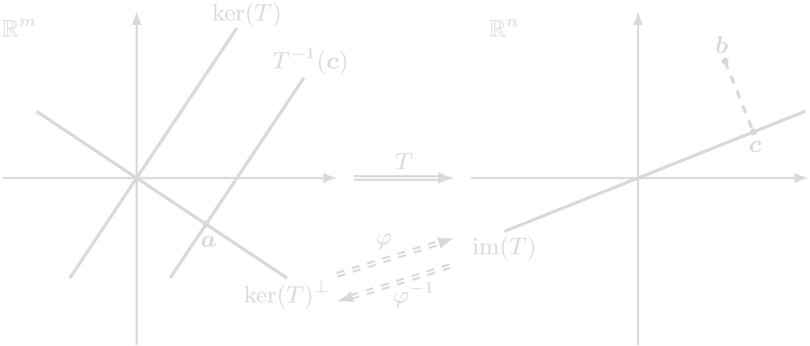
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^{+}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\mathrm{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

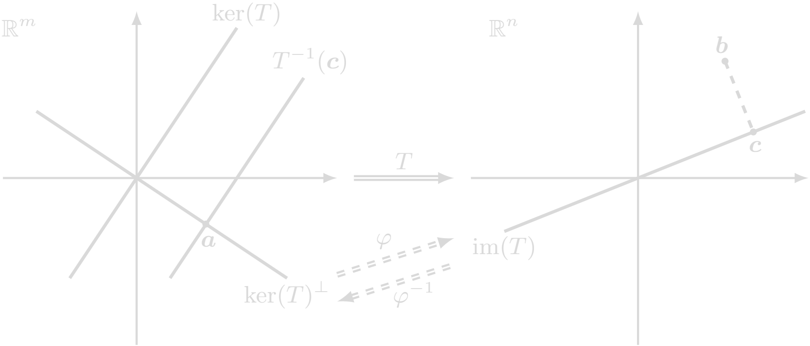
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^{+}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\mathrm{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

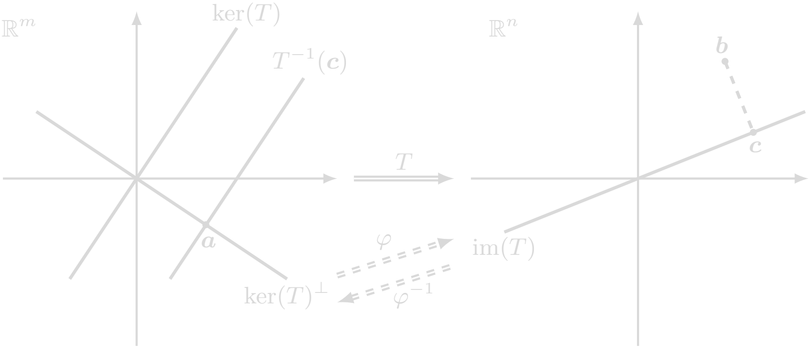
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^{+}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $b \in \mathbb{R}^n$. Точка b може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\mathrm{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

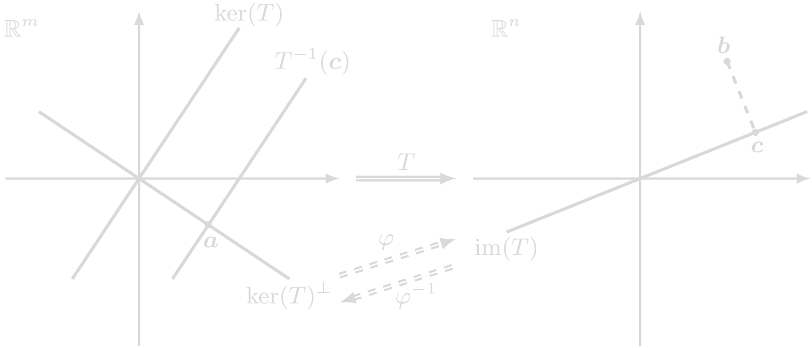
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^{+}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $b \in \mathbb{R}^n$. Точка b може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\mathrm{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

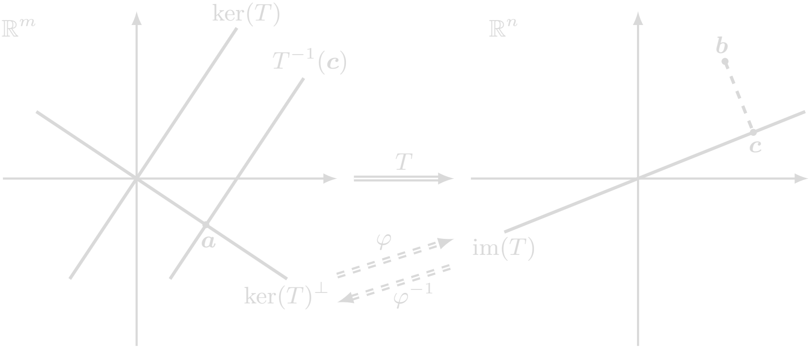
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^{+}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $b \in \mathbb{R}^n$. Точка b може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\operatorname{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

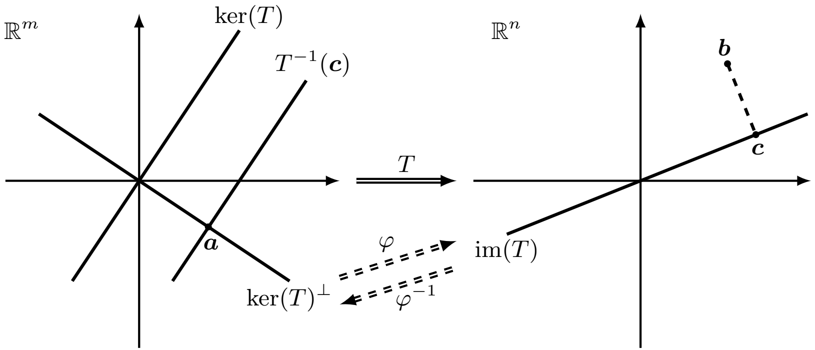
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^+\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\operatorname{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

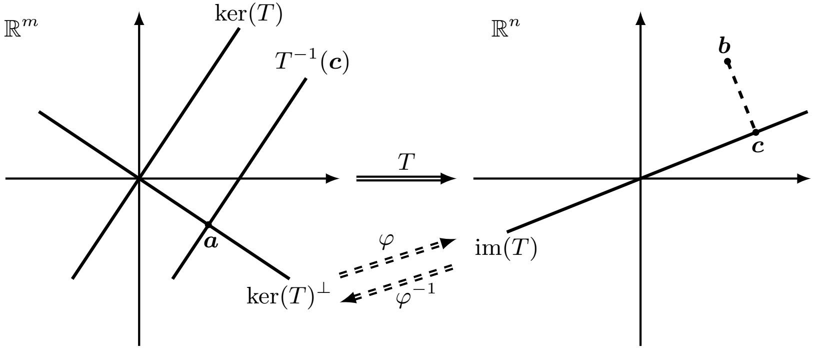
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^{+}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\operatorname{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

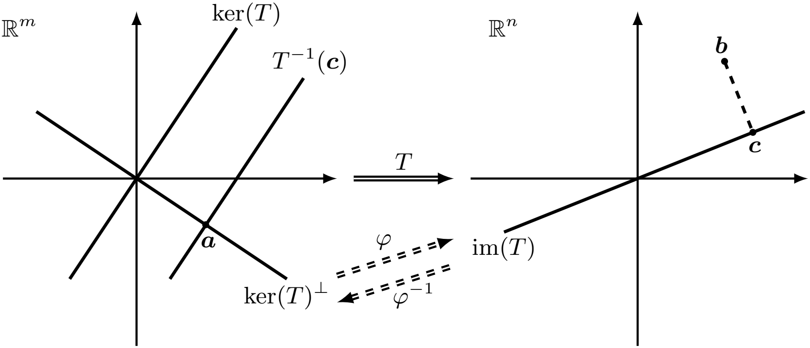
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^+\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\mathrm{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

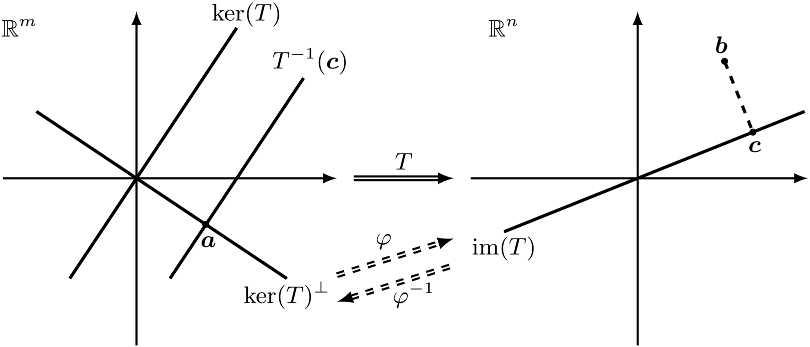
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^+\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\operatorname{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці

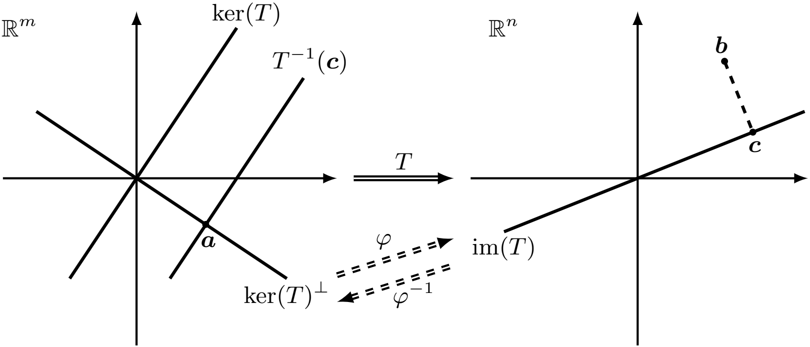
Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^+\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\operatorname{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

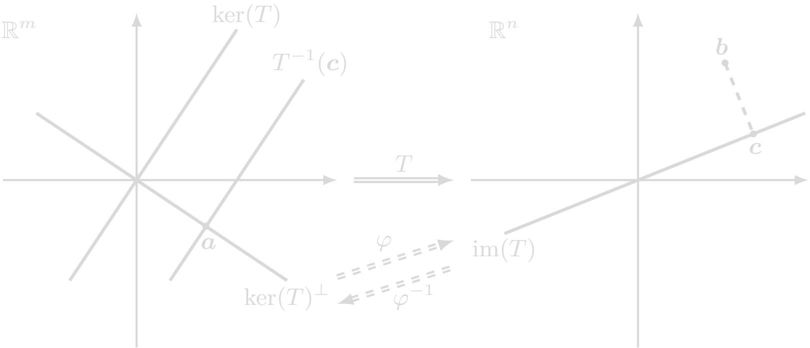
Узагальнені обернені матриці

Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тепер зазвичай не можна очікувати, що це довільним чином вибране відображення T матиме обернене, особливо якщо $m > n$, але виявляється, що можна визначити близьке поняття до оберненого відображення, яке надалі ми можемо використовувати. Визначимо відображення $T^+\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наступним чином (див. рис.).



Нехай $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{b}$ може не належати образу відображення T, оскільки ми не припускаємо, що відображення T є сюр'єктивним, але образ $\mathrm{im}(T)$ лінійного відображення T є площиною в просторі $\mathbb{R}^n$.

Узагальнені обернені матриці



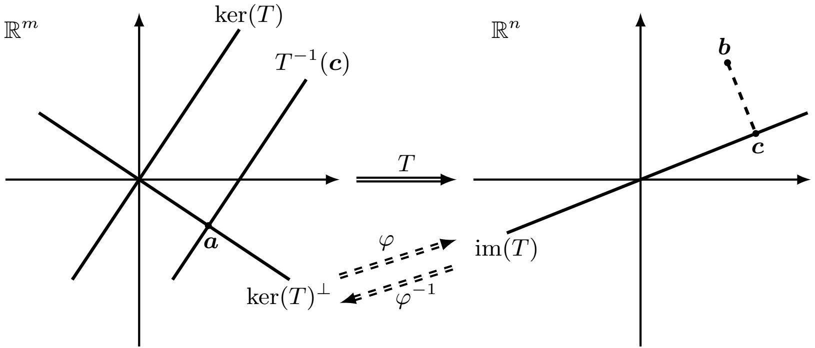
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \mathrm{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp \colon \ker(T)^\perp \to \mathrm{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



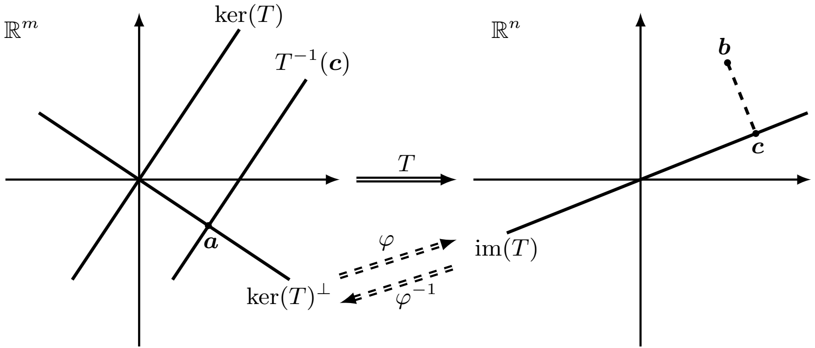
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \operatorname{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр’єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp \colon\ \ker(T)^\perp \to \operatorname{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



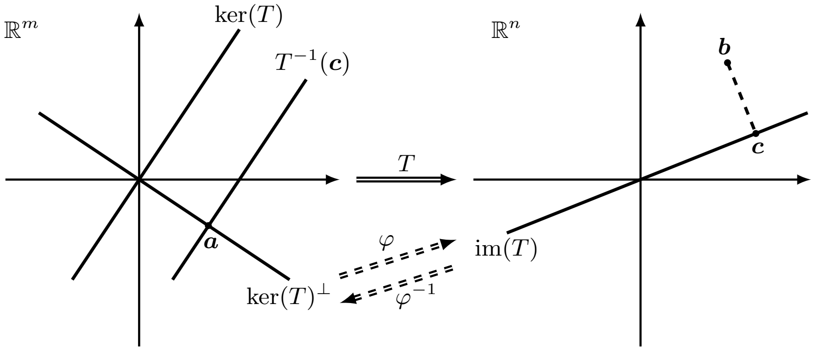
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \mathrm{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp \colon \ker(T)^\perp \to \mathrm{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



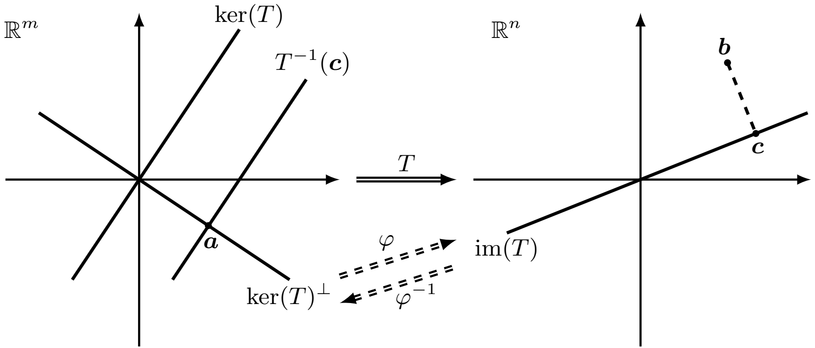
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \operatorname{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp \colon \ker(T)^\perp \to \operatorname{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



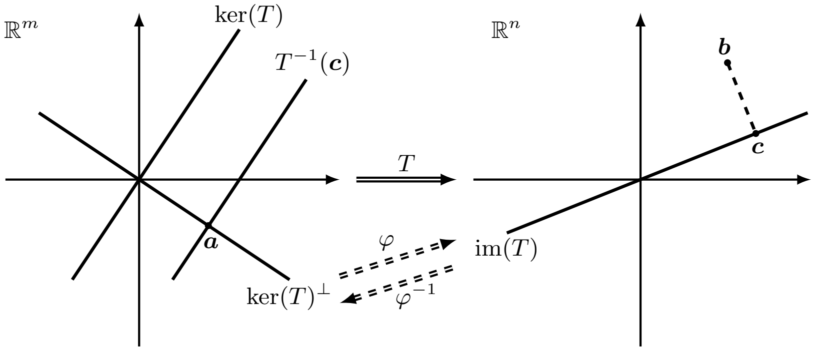
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \mathrm{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp\colon\ \ker(T)^\perp \to \mathrm{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



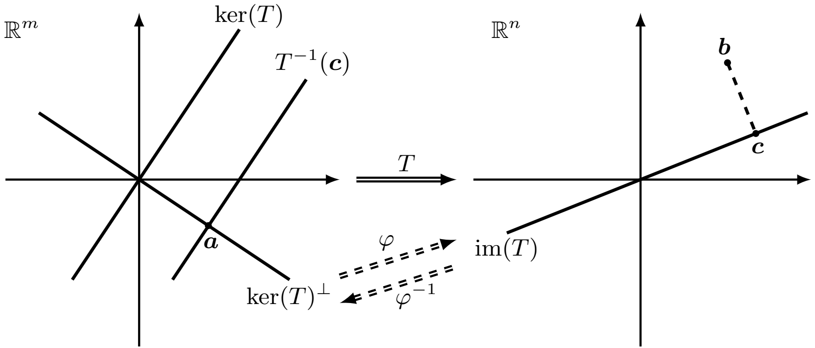
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \mathrm{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^{\perp}$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^{\perp}$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^{\perp} \colon \ker(T)^{\perp} \to \mathrm{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



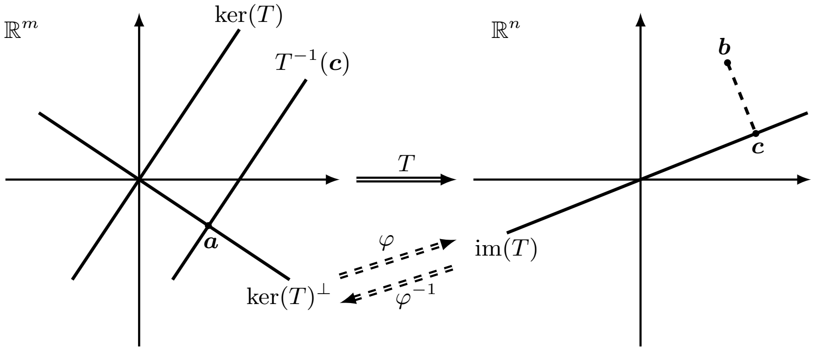
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \operatorname{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp\colon\ \ker(T)^\perp \to \operatorname{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



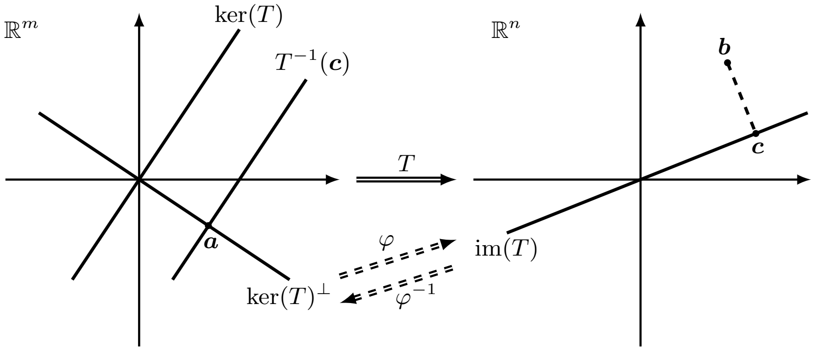
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \operatorname{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp\colon\ \ker(T)^\perp \to \operatorname{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



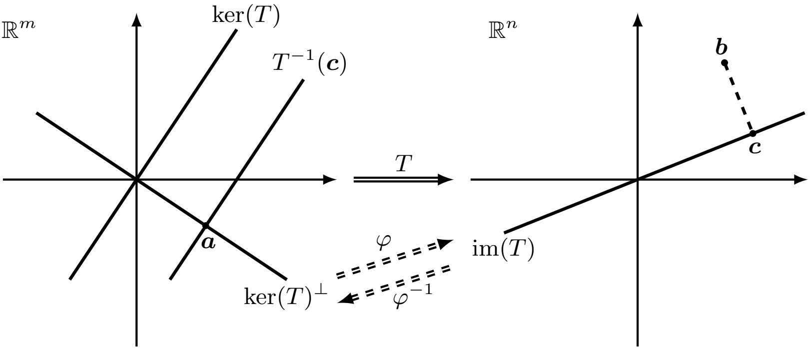
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \operatorname{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^{\perp}$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^{\perp}$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^{\perp} \colon \ker(T)^{\perp} \to \operatorname{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



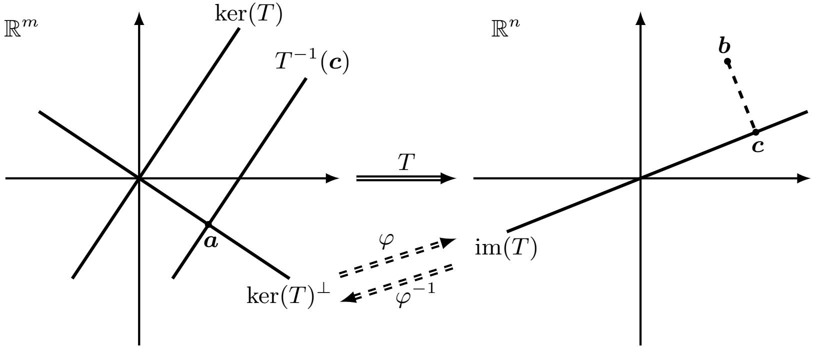
Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \operatorname{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^\perp$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^\perp \colon \ker(T)^\perp \to \operatorname{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці



Отже, існує єдина точка $\boldsymbol{c} \in \mathrm{im}(T)$, яка є найближчою до точки $\boldsymbol{b}$. Якщо лінійне відображення T сюр'єктивне, то, очевидно, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Нескладно довести, що повний прообраз $T^{-1}(\boldsymbol{c})$ є площиною в $\mathbb{R}^m$, яка є паралельною до ядра $\ker(T)$ лінійного відображення T. Ця площина буде перетинати ортогональне доповнення $\ker(T)^{\perp}$ ядра лінійного відображення T в єдиній точці $\boldsymbol{a}$. Для альтернативного означення точки $\boldsymbol{a}$ зобразимо векторний простір $\mathbb{R}^m$ у вигляді

$$\mathbb{R}^m = \ker(T) \oplus \ker(T)^{\perp}$$

і приймемо

$$\varphi = T|\ker(T)^{\perp} \colon \ker(T)^{\perp} \to \mathrm{im}(T).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x,y)=x-y.$$

Нехай $b\in\mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b)=\frac{b}{2}(1,-1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^+(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^+ називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^+ коректно визначене та T^+ є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x,y)=x-y.$$

Нехай $b\in\mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b)=\frac{b}{2}(1,-1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

Неважко довести, що лінійне відображення φ є ізоморфізмом і $\boldsymbol{a} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{c})$. В іншому випадку ми означимо $T^{+}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

Означення 1.16.1

Відображення T^{+} називається *узагальнено оберненим* або *оберненим за Муром-Пенроузом* до лінійного відображення T.

Виконується така очевидна лема:

Лема 1.16.2

Відображення T^{+} коректно визначене та T^{+} є лінійним відображенням.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

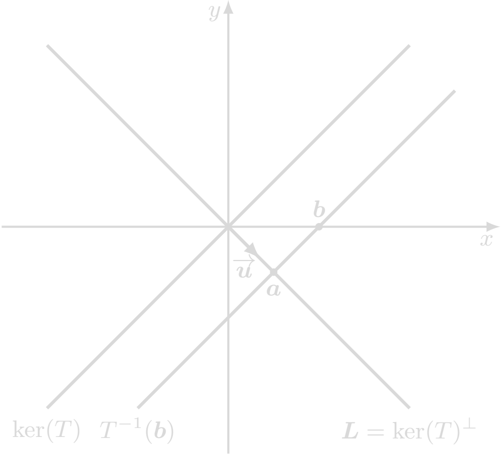
$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^{+}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^{+}(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Узагальнені обернені матриці

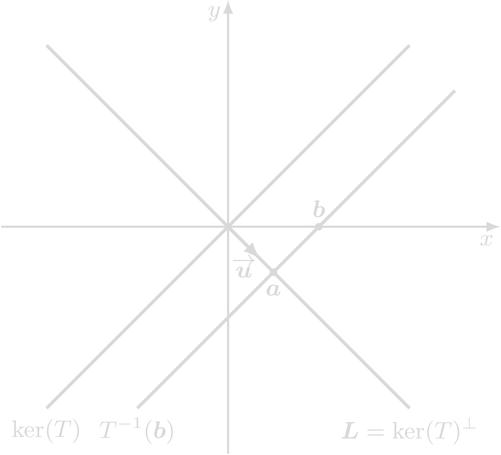
Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

Узагальнені обернені матриці

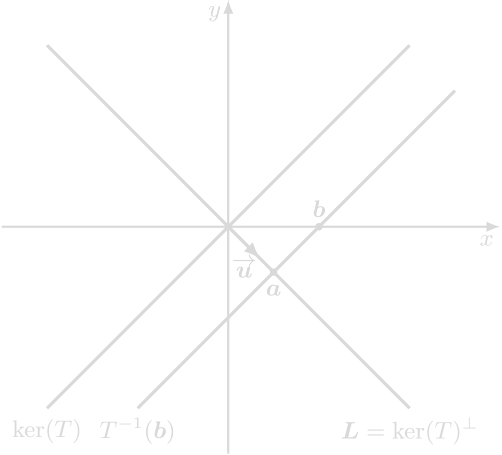
Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

Узагальнені обернені матриці

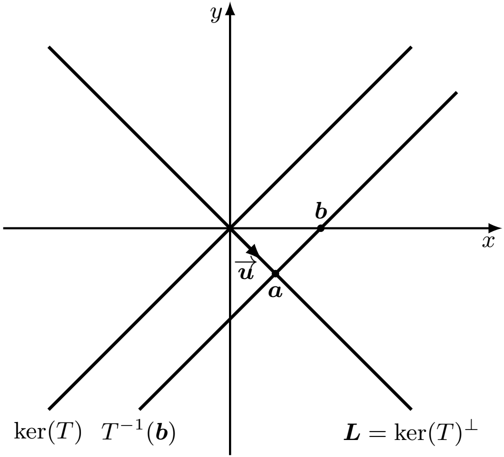
Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

Узагальнені обернені матриці

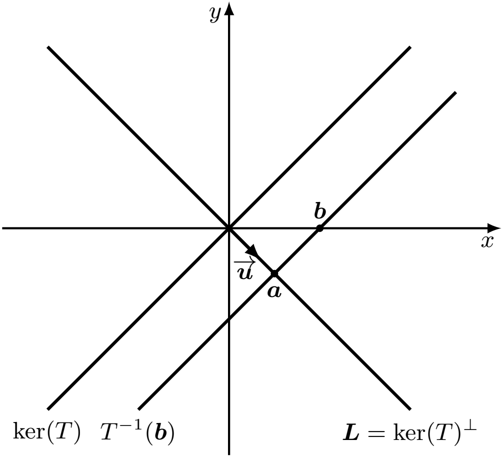
Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

Узагальнені обернені матриці

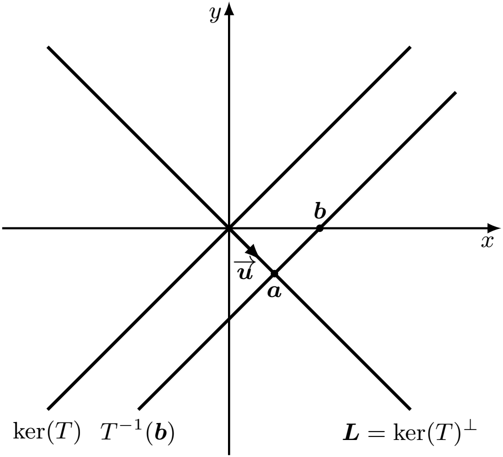
Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

Узагальнені обернені матриці

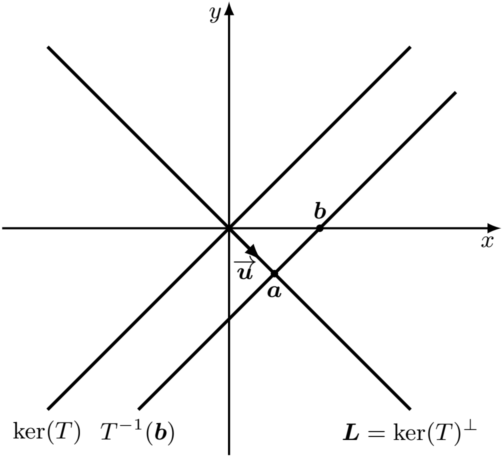
Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

Узагальнені обернені матриці

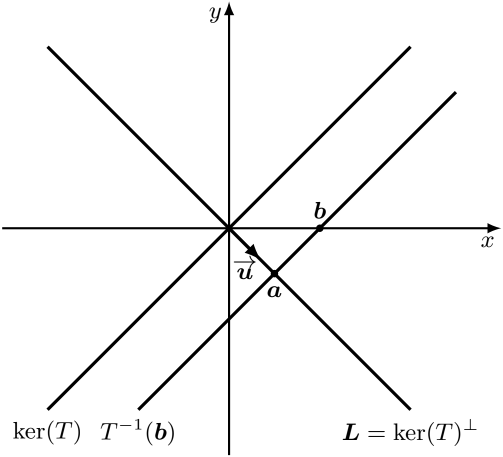
Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то a — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

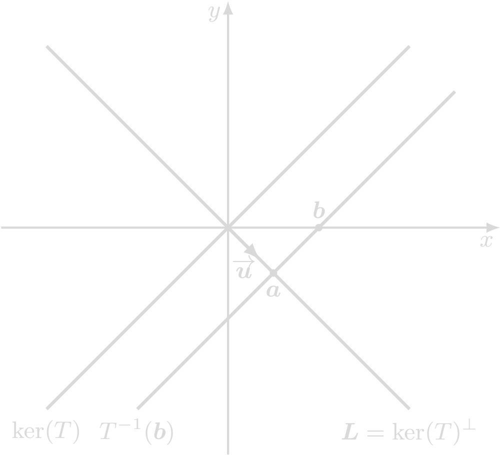
Узагальнені обернені матриці

Розв'язок. Ядро $\ker(T)$ лінійного відображення T збігається з прямою $x = y$ у просторі $\mathbb{R}^2$ (див. рис.).



Ортогональним доповненням до ядра $\ker(T)$ є пряма $\boldsymbol{L}$, яка визначається рівнянням $x + y = 0$ у векторному просторі $\mathbb{R}^2$. Якщо $\boldsymbol{a} = T^{+}(\boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{a}$ — точка перетину прямих $T^{-1}(b)$ і $\boldsymbol{L}$.

Узагальнені обернені матриці

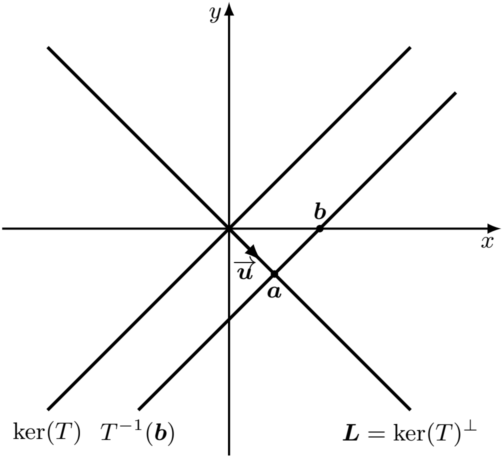


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{u} \bullet (b, 0))\overrightarrow{u} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{u}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Узагальнені обернені матриці

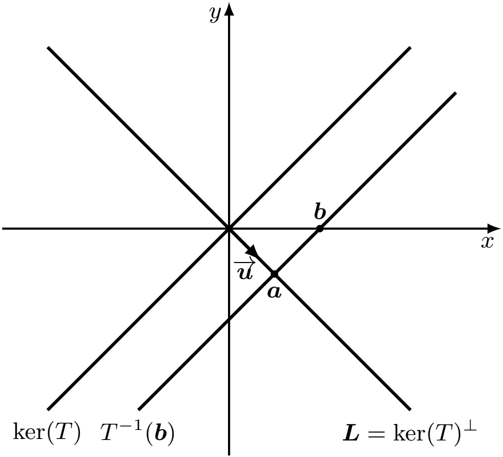


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b,0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{u} \bullet (b,0))\overrightarrow{u} = \tfrac{b}{2}(1,-1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{u}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{u} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})$.

Узагальнені обернені матриці

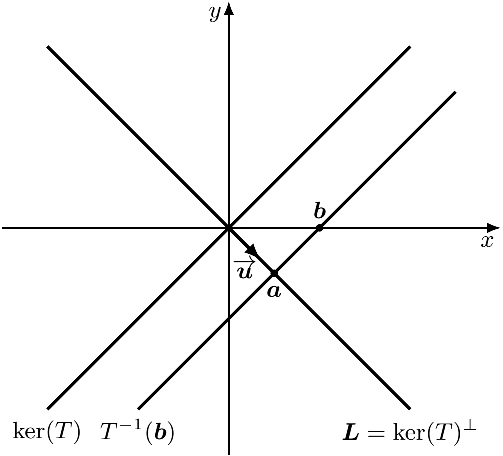


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{u} \bullet (b, 0))\overrightarrow{u} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{u}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Узагальнені обернені матриці

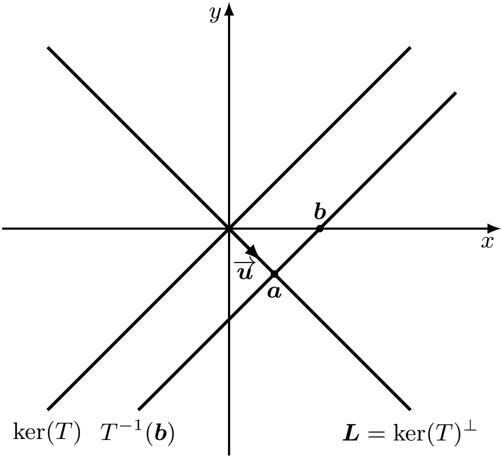


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{u} \bullet (b, 0))\overrightarrow{u} = \frac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{u}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Узагальнені обернені матриці

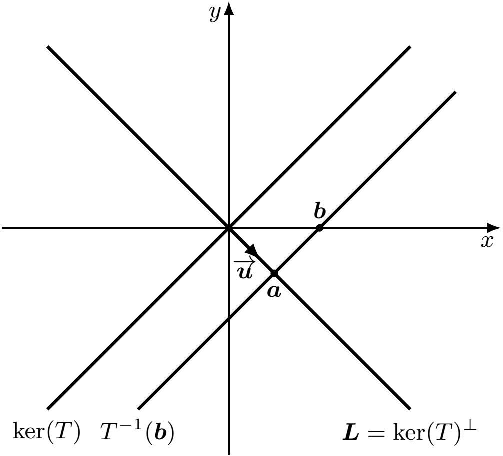


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b, 0))\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Узагальнені обернені матриці

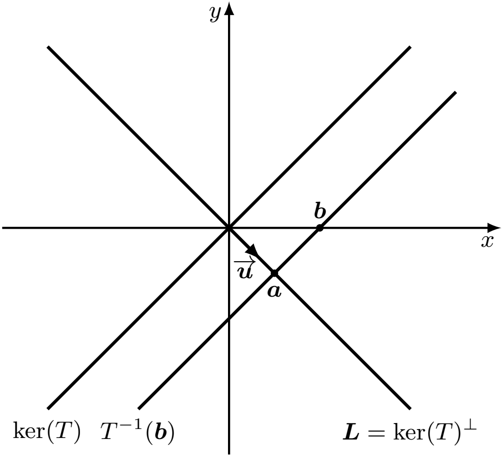


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b, 0))\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Узагальнені обернені матриці

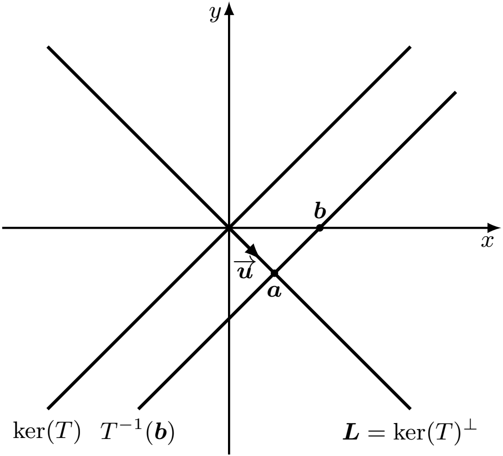


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b, 0))\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Узагальнені обернені матриці



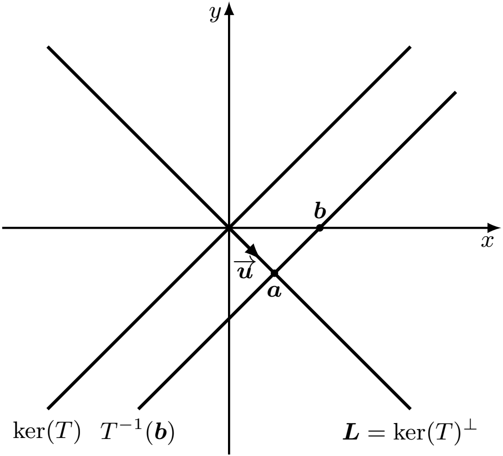
Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b, 0))\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Узагальнені обернені матриці

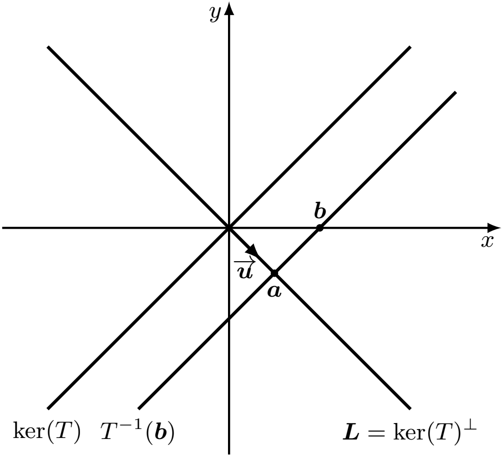


Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b, 0))\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Узагальнені обернені матриці



Очевидно, що точка $\boldsymbol{a}$ є саме ортогональною проекцією вектора $(b, 0)$ на пряму $\boldsymbol{L}$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b, 0))\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \tfrac{b}{2}(1, -1),$$

для довільного одиничного напрямного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ прямої $\boldsymbol{L}$. Наприклад, ми можемо вибрати за напрямний вектор для прямої $\boldsymbol{L}$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ■

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереневого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереневою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереneною матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови

то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *оберененою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереденого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереденою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереного відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереного матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереченою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереneного відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереneною матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереneного відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереneною матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереного відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереною матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереченою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця C задовольняє умови:

то $C = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереннего відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереннею матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови

то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *оберененою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^T = A^+A \quad \text{і} \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (GA)^T = GA \quad \text{і} \quad (AG)^T = AG,$$

то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереженою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^T = A^+A \quad \text{і} \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (GA)^T = GA \quad \text{і} \quad (AG)^T = AG,$$

то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереneного відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереneною матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^T = A^+A \quad \text{і} \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (GA)^T = GA \quad \text{і} \quad (AG)^T = AG,$$

то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого обереденого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереденою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^T = A^+A \quad \text{і} \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (GA)^T = GA \quad \text{і} \quad (AG)^T = AG,$$

то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереневою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^T = A^+A \quad \text{і} \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (GA)^T = GA \quad \text{і} \quad (AG)^T = AG,$$

то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Нас цікавить матрична версія узагальненого оберненого лінійного відображення. Нехай A — довільна дійсна $m \times n$-матриця. Нехай $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — природне лінійне відображення, яке відповідає цій матриці та визначається за формулою $T(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A$.

Означення 1.16.4

$m \times n$-матриця A^+ узагальненого оберененого відображення T^+ називається *узагальнено оберненою* (або *псевдо-оберненою*, або *обереденою матрицею Мура–Пенроуза*) для матриці A.

Виконується така теорема:

Теорема 1.16.5

(1) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A задовольняє такі умови:
$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^T = A^+A \quad \text{і} \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

(2) Узагальнена обернена матриця A^+ для матриці A однозначно визначається тотожностями умови (1), тобто, якщо матриця G задовольняє умови
$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (GA)^T = GA \quad \text{і} \quad (AG)^T = AG,$$
то $G = A^+$.

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T(A^TA)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що A^TA є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^TA)^{-1}A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то

$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то

$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Наслідок 1.16.6

(1) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу n, то
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

(2) Якщо A — дійсна $m \times n$-матриця рангу m, то
$$A^+ = A^T (A^T A)^{-1}.$$

Доведення. Твердження наслідку 1.16.6 випливають з теореми 1.16.5(2). У випадку твердження (1) легко перевіряється, що $A^T A$ є невиродженою $n \times n$-матрицею та матриця $(A^T A)^{-1} A^T$ задовольняє всі рівності твердження (1) теореми 1.16.5.

Доведення твердження (2) аналогічне. ■

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ∎

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ∎

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x,y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1,-1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ■

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ■

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x,y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1,-1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ∎

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x,y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1,-1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ■

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ∎

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ■

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ◻

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x,y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1,-1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ■

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ■

Узагальнені обернені матриці

Приклад 1.16.7

Обчисліть узагальнено обернену матрицю A^+ для лінійного відображення T^+, визначеного в прикладі 1.16.3.

Приклад 1.16.3

Розглянемо відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке визначене за формулою

$$T(x, y) = x - y.$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що узагальнено обернене відображення $T^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ до відображення T визначається за формулою

$$T^+(b) = \frac{b}{2}(1, -1).$$

Розв'язок. У цьому випадку маємо, що $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, а, отже,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

і

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджує нашу формулу для узагальнено оберненого відображення T^+ у прикладі 1.16.3. ■

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m\times n$-матрицю A з $n>m$ і $b\in\mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A=\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}\in\mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m\times n$-матриці A з $n>m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}\in\mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0\in\mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}A-\overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0\in\mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0A-\overrightarrow{\boldsymbol{b}}|=\min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\in\mathbb{R}^m}\left\{|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}A-\overrightarrow{\boldsymbol{b}}|\right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A=(a_{ij}),\qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)\qquad \text{і}\qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}=(b_1,b_2,\ldots,b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\big((a_1a_{1i}+a_2a_{2i}+\cdots+a_ma_{mi})-b_i\big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \right)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Гарне застосування узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6 до методу найменших квадратів. Припустимо, що нам дано дійсну $m \times n$-матрицю A з $n > m$ і $b \in \mathbb{R}^n$. Ми хочемо розв'язати рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \tag{1}$$

для $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$. На жаль, система рівнянь, визначена рівністю (1), перевизначена та може й не мати розв'язку. Найкраще, що ми можемо зробити в загальному випадку, — це розв'язати таку задачу:

> **Метод найменших квадратів:** для дійсної $m \times n$-матриці A з $n > m$ і вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, знати вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$, який мінімізує відстань $|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, тобто знайти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 \in \mathbb{R}^m$ такий, що виконується умова
>
> $$|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| = \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m} \left\{ |\overrightarrow{\boldsymbol{a}} A - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}| \right\}. \tag{2}$$

Пояснити назву цього методу легко. Нехай

$$A = (a_{ij}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Рівність (2) намагається знайти мінімум для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((a_1 a_{1i} + a_2 a_{2i} + \cdots + a_m a_{mi}) - b_i \big)^2}.$$

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \qquad (3)$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{a}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{a}_0 = A^+(\overrightarrow{b}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{b}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{a}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{a}_0 = A^+(\overrightarrow{b}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{b}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \qquad (3)$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{a}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{a}_0 = A^+(\overrightarrow{b}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{b}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{a}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{a}_0 = A^+(\overrightarrow{b}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{b}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. ∎

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \qquad (3)$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \qquad (3)$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^{+}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^{T}(AA^{T})^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{a}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \qquad (3)$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^{+}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^{T}(AA^{T})^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^{+}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^{T}(AA^{T})^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

Іншими словами, ми намагаємось знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, яка проходить через початок координат і визначається рівнянням вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0 \tag{3}$$

що найкраще відповідає даним точкам $\boldsymbol{p}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}, b_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$ у тому сенсі, що сума відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Теорема 1.16.8

Якщо матриця A в методі найменших квадратів має ранг m, то існує найменший розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$, який визначається за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0 = A^+(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = A^T(AA^T)^{-1}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}).$$

Доведення. Існування такого розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з означення узагальненої оберненої матриці та наслідку 1.16.6(2). Єдиність розв'язку $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}_0$ випливає з того факту, що ядро лінійного відображення ставить у відповідність матриці A нуль-вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. ■

Необхідно зазначити, що площини, визначені рівнянням (3), є підмножиною всіх m-вимірних площин, які проходять через початок координат, а отже наша конкретна задача наближення має вбудоване зміщення. Тут є звичайне твердження про неупереджену загальну задачу. Ми використовуємо квадрати відстаней, щоб не мати справу з квадратними коренями. Задача мінімізації має однакову відповідь у будь-якому випадку.

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок p_i простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину X у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок p_i до площини X є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

Метод найменших квадратів: для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ та $(1, 3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x = 0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0, 0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у “більшості” випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

Метод найменших квадратів: для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

Метод найменших квадратів: для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ та $(1, 3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x = 0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0, 0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x = 0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

Метод найменших квадратів: для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у “більшості” випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ та $(1, 3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x = 0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0, 0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ та $(1, 3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x = 0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0, 0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

> **Метод найменших квадратів:** для множини точок $\boldsymbol{p}_i$ простору $\mathbb{R}^{m+1}$ знайти m-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$, з властивістю, що сума квадратів відстаней від точок $\boldsymbol{p}_i$ до площини $\boldsymbol{X}$ є найменшою.

Через зміщення у дозволеному розв'язанні нашої наближеної задачі теорема 1.16.8 не завжди розв'язує загальну задачу. Наприклад, розглянемо точки $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$, $(1,2)$ та $(1,3)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Пряма, яка найкраще апроксимує ці дані, — це, очевидно, вертикальна пряма $x=0$. Теорема 1.16.8 дала б нам просто точку $(0,0)$. Причиною цього є те, що вертикальна пряма не має рівняння вигляду (3)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m - x_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Звичайно, теорема 1.16.8 насправді дає очікувану відповідь у "більшості" випадків, але потрібно переконатися, що ця відповідь не лежить у множині площин, які не визначаються рівнянням (3).

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{b}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{x}A = \overrightarrow{0}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{x}A=\overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m\neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix}\frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n}\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix}a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A=\overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m\neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови.

Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

Існує ще один спеціальний випадок, коли теорема 1.16.8 не дає задовільної відповіді, а саме у випадку, коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ дорівнює нуль-вектору, і тоді ми маємо однорідне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{4}$$

Однорідне рівняння, наприклад таке як (4), завжди має розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Це те, що дала б нам теорема 1.16.8. Звичайно, цей розв'язок нас не цікавить, і ми, мабуть, шукаємо ненульовий розв'язок. Ми зможемо використовувати теорему 1.16.8, якщо перепишемо наші умови. Припустимо, що ми шукаємо розв'язок $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння (4) при умові, що $a_m \neq 0$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{x} A = \overrightarrow{b}, \qquad (1)$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{a}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{x} A = \overrightarrow{b}, \qquad (1)$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{a}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{x} A = \overrightarrow{b}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{a}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{x} A = \overrightarrow{b}, \qquad (1)$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{a}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв’язки. У загальному випадку, слід пам’ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\vec{\boldsymbol{x}} A = \vec{\boldsymbol{b}}, \qquad (1)$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\vec{\boldsymbol{x}} A = \vec{\boldsymbol{b}}, \qquad (1)$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{a}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\vec{\boldsymbol{x}} A = \vec{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\vec{\boldsymbol{x}} A = \vec{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{a}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\vec{\boldsymbol{x}} A = \vec{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв’язки. У загальному випадку, слід пам’ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \qquad (1)$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} A = \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\vec{\boldsymbol{x}} A = \vec{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв’язки. У загальному випадку, слід пам’ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_m} & \frac{a_2}{a_m} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{a_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Фактично без втрати загальності можемо вважати, що $a_m = 1$. Це рівняння знову є вигляду (1)

$$\vec{\boldsymbol{x}} A = \vec{\boldsymbol{b}}, \tag{1}$$

і якщо ми припустимо, що права частина цього рівняння не є нульовим вектором, то можемо знову застосувати теорему 1.16.8, і отримати те, що ми хочемо, у тому ж сенсі, що й раніше. Однак, єдина проблема полягає в тому, що ми могли б припускати, що різні координати вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ є ненульовими, і для кожного вибору ми отримаємо різні розв'язки. У загальному випадку, слід пам'ятати, що описаний нами вище підхід до лінійної задачі найменших квадратів працює добре, але відповідь, яку ми отримуємо, залежить від припущень, які ми робимо.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \qquad (5)$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Ми завершимо цю лекцію двома результатами про розклад матриць.

Теорема 1.16.9

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Тоді існують дійсна ортогональна $m \times m$-матриця U, дійсна ортогональна $n \times n$-матриця V і діагональна дійсна $m \times n$-матриця

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, такі, що

$$A = UDV^T. \tag{5}$$

Доведення теореми 1.16.9 можна знати в підручниках з лінійної алгебри.

Означення 1.16.10

Розклад матриці A в рівності (5) називається *сингулярним розкладом* матриці A. Компоненти σ_i називаються *сингулярними значеннями матриці* A.

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ■

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{e}_i) = \sigma_i \overrightarrow{e}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{u}_i) = \sigma_i \overrightarrow{v}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ■

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{e}_i) = \sigma_i \overrightarrow{e}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{u}_i) = \sigma_i \overrightarrow{v}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ∎

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ■

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. □

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рангу r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ■

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ∎

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ∎

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. $\blacksquare$

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ∎

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. □

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності.

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ∎

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ■

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. □

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності.

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{e}_i) = \sigma_i \overrightarrow{e}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{u}_i) = \sigma_i \overrightarrow{v}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ▫

Узагальнені обернені матриці

Сингулярний розклад матриці має корисні застосування. Одна з інтерпретацій теореми 1.16.9 полягає в тому, що з точністю до заміни координат кожне лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ рангу r має вигляд $T(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Точніше кажучи, можна знайти ортонормовані базиси $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$ простору $\mathbb{R}^m$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ простору $\mathbb{R}^n$ такі, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \sigma_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Теорема 1.16.11

Нехай A — дійсна $m \times n$-матриця рану r. Якщо матриця A має сингулярний розклад, який зображається рівністю (5)

$$A = UDV^T, \tag{5}$$

то

$$A^+ = VD^+U^T,$$

і $n \times m$-матриця D^+ визначається за формулою

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо теорему 1.16.5(2) і нескладно доводиться, що матриця VD^+U^T задовольняє відповідні рівності. ■

Дякую за увагу!