Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 26: Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це “добуток”, який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

У попередніх лекціях ми спостерігали, що на тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ визначено не тільки точковий добуток, але й векторний добуток векторів. Зауважимо, що векторний добуток векторів є іншим вектором, тоді як точковий добуток був дійсним числом. Відомі різні тотожності, що стосуються означень точкового та векторного добутків. Векторний добуток векторів — це "добуток", який поводить себе подібно як у випадку добуток дійсних чисел, за винятком того, що він не є комутативним. Дві операції додавання векторів та векторного добутку перетворюють лінійний простір $\mathbb{R}^3$ у (некомутативне) кільце. Чи існує подібний добуток в інших вимірах? На жаль, ні, але векторний добуток векторів випливає із загальної конструкції, яка застосовується до всіх вимірів, і на яку варто звернути увагу, оскільки це дасть нам додаткове уявлення про векторний добуток.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\overrightarrow{w}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_{n-1} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$ для всіх $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon V \to \Bbbk$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем $\Bbbk$ з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{u} \in V$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для всіх $\overrightarrow{v} \in V$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{w}) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w}$ для всіх $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon V \to \Bbbk$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем $\Bbbk$ з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in V$ такий, що

$$\alpha(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для всіх $\vec{v} \in V$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{w}) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w}$ для всіх $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon V \to \Bbbk$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем $\Bbbk$ з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in V$ такий, що

$$\alpha(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для всіх $\vec{v} \in V$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{w}) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w}$ для всіх $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon V \to \Bbbk$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем $\Bbbk$ з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in V$ такий, що

$$\alpha(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для всіх $\vec{v} \in V$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon V \to \mathrm{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in V$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in V$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \det \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \vec{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}}$ для всіх $\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon V \to \Bbbk$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем $\Bbbk$ з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in V$ такий, що

$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in V$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon V \to \mathrm{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in V$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in V$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \det \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \vec{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}}$ для всіх $\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \det \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \vec{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}}$ для всіх $\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}$.

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{w}) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w}$ для всіх $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для всіх $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою
$$T(\vec{w}) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix}.$$
Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w}$ для всіх $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha \colon \boldsymbol{V} \to$ k — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \boldsymbol{V}$ такий, що
$$\alpha(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$
для всіх $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \dots \times \vec{v}_{n-1}$.

Ще трішки про векторний добуток

Теорема 1.15.1

Нехай $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Означимо відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за формулою

$$T(\vec{w}) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $T(\vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w}$ для всіх $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Твердження теореми 1.15.1 є безпосереднім наслідком теореми 1.13.2, оскільки з властивостей функції визначника випливає, що відображення T є лінійним функціоналом.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{u} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

для всіх $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.15.2

В термінах понять теореми 1.15.1 вектор $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ називається (*узагальненим*) *векторним добутком* векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, і позначається $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто:

(2)

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4)

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що виливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто

(2)

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4)

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто

(2)

(3) $(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4)

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто

$$\overrightarrow{v}_{\sigma(1)} \times \overrightarrow{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$$

для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто

$$\overrightarrow{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \overrightarrow{v}_i \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1} = a(\overrightarrow{v}_1 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_i \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1})$$

$$\overrightarrow{v}_1 \times \cdots \times (\overrightarrow{v}_i + \overrightarrow{v}'_i) \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1} = (\overrightarrow{v}_1 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_i \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) + \\ + (\overrightarrow{v}_1 \times \cdots \times \overrightarrow{v}'_i \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1});$$

(3) $(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис

$$(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{n-1}, \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1})$$

індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}'_i) \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}'_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(1)} \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} = a(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1})$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times (\vec{\boldsymbol{v}}_i + \vec{\boldsymbol{v}}_i') \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}) + (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i' \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1});$$

(3) $(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}, \vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(1)} \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} = a(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1})$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times (\vec{\boldsymbol{v}}_i + \vec{\boldsymbol{v}}_i') \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}) + (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i' \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1});$$

(3) $(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}, \vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}'_i) \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}'_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}_i') \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + {} + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i' \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}'_i) \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}'_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(1)} \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \dots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} = a(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1})$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times (\vec{\boldsymbol{v}}_i + \vec{\boldsymbol{v}}'_i) \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}) + \\ + (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}'_i \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1});$$

(3) $(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}, \vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}_i') \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i' \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що виливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}\,'_i) \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}\,'_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}'_i) \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} &= (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ &+ (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}'_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});\end{aligned}$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що випливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}'_i) \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = {} & (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ & + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}'_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});\end{aligned}$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}_i') \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i' \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що виливають з властивостей визначників матриць.

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}_i') \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i' \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що вивливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.3

Узагальнений векторний добуток векторів задовольняє такі властивості:

(1) узагальнений векторний добуток є комутативним з точністю до знаку, тобто
$$\vec{v}_{\sigma(1)} \times \vec{v}_{\sigma(2)} \times \cdots \times \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sign}(\sigma)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$$
для довільної підстановки σ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) узагальнений векторний добуток є полілінійним відображенням, тобто
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times a \cdot \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = a(\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
$$\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{v}_i + \vec{v}_i') \times \cdots \times \vec{v}_{n-1} = (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) + \\ + (\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i' \times \cdots \times \vec{v}_{n-1});$$

(3) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{v}_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(4) якщо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ є лінійно незалежними, то впорядкований базис
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1})$$
індукує стандартну орієнтацію на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Властивості (1) і (2) є безпосередніми наслідками означення узагальненого векторного добутку, що виливають з властивостей визначників матриць.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\vec{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \tag{1}$$

справджується для всіх векторів $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\vec{w}$ збігається з вектором $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8. ■

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{w} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_{n-1} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix} \tag{1}$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{w}$ збігається з вектором $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8. ∎

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{w}_1 \\ \overrightarrow{w}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{w} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_{n-1} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{w}$ збігається з вектором $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{w}_1 \\ \overrightarrow{w}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1.

Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{w} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_{n-1} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix} \tag{1}$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{w}$ збігається з вектором $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8. ■

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_n \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{w}_1 \\ \overrightarrow{w}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1.

Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{w} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_{n-1} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{w}$ збігається з вектором $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{w}_1 \\ \overrightarrow{w}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{w} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_{n-1} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix} \tag{1}$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{w}$ збігається з вектором $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{w}_1 \\ \overrightarrow{w}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ збігається з вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ збігається з вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\vec{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

справджується для всіх векторів $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\vec{w}$ збігається з вектором $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8. ∎

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ збігається з вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і $(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\vec{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \tag{1}$$

справджується для всіх векторів $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\vec{w}$ збігається з вектором $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\vec{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}) \bullet \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \tag{1}$$

справджується для всіх векторів $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\vec{w}$ збігається з вектором $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8.

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Властивість (3) випливає з того, що детермінант матриці, яка має два однакові рядки дорівнює нулю, а отже кожен вектор $\overrightarrow{v}_i$ лежить у ядрі лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке визначене в умові теореми 1.15.1. Для доведення властивості (4), зауважимо, що за означенням узагальненого векторного добутку рівність

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}) \bullet \overrightarrow{w} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_{n-1} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

справджується для всіх векторів $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$. Коли вектор $\overrightarrow{w}$ збігається з вектором $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{v}_{n-1}$, то легко бачити, що ліва частина рівності (1) є додатною, звідки випливає, що детермінант також є додатним. Далі скористаємося лемою 1.8.8. ■

Лема 1.8.8

Два впорядковані базиси $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_n)$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначають однакові орієнтації тоді і лише тоді, коли визначники

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{w}_1 \\ \overrightarrow{w}_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{w}_n \end{pmatrix}$$

мають однаковий знак.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

1. $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;
2. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ і
   $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;
3. $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;
4. $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$,
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:
$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1),$$
де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$;
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1),$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\vec{u}$ та $\vec{v}$;

(2) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$;
$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$;

(3) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$;

(4) $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_2)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1)$,

де $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$;
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \left(v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1\right),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $\left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$;
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $\left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right|^2 = \left|\overrightarrow{u}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$;
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \left(v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1\right),$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$;

(2) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}})\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$;
$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}})\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}})\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$;

(3) $|\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})^2$;

(4) $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2) \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1)(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2)(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1)$,

де $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ і
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \left(v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1\right),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ – кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ і
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)\,,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}| \cdot \sin\theta$, де θ — кут між векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$;

(2) $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}})\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ і
$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}})\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}})\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$;

(3) $|\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})^2$;

(4) $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2) \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1)(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2)(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1)$,

де $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ – кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ і
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1),$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$, де θ – кут між векторами $\vec{u}$ та $\vec{v}$;

(2) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$ і
$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$;

(3) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$;

(4) $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_2)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1)$,

де $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ – кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ і
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1),$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$, де θ – кут між векторами $\vec{u}$ та $\vec{v}$;

(2) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$ і
$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$;

(3) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$;

(4) $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_2)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1)$,

де $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1),$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$, де θ – кут між векторами $\vec{u}$ та $\vec{v}$;

(2) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$ і
$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}$;

(3) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$;

(4) $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_2)(\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1)$,

де $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Твердження 1.15.4 пропонуємо довести слухачам самостійно.

Твердження 1.15.4

У тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ узагальнений векторний добуток векторів збігається зі звичайним векторним добутком $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, визначеним за формулою:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1),$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

У твердженні 1.15.5 перелічено деякі добре відомі властивості векторного добутку в особливому випадку тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Ми пропонуємо слухачам довести ці властивості самостійно.

Твердження 1.15.5

Узагальнений векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ задовольняє такі властивості:

(1) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$, де θ – кут між векторами $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$;

(2) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ і
$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

(4) $(\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2) \bullet (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{v}_1)$,

де $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ — довільні вектори в $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Одна з геометричних інтерпретацій рівності (3)

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

у твердженні 1.15.5 полягає в тому, що векторний добуток вимірює відхилення від рівності нерівності Коші–Шварца у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Одна з геометричних інтерпретацій рівності (3)

(3) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})^2$;

у твердженні 1.15.5 полягає в тому, що векторний добуток вимірює відхилення від рівності нерівності Коші–Шварца у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Одна з геометричних інтерпретацій рівності (3)

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})^2; \tag{3}$$

у твердженні 1.15.5 полягає в тому, що векторний добуток вимірює відхилення від рівності нерівності Коші–Шварца у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Одна з геометричних інтерпретацій рівності (3)

$$(3)\quad |\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})^2;$$

у твердженні 1.15.5 полягає в тому, що векторний добуток вимірює відхилення від рівності нерівності Коші–Шварца у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Одна з геометричних інтерпретацій рівності (3)

(3) $|\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})^2$;

у твердженні 1.15.5 полягає в тому, що векторний добуток вимірює відхилення від рівності нерівності Коші–Шварца у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Ще трішки про векторний добуток

Одна з геометричних інтерпретацій рівності (3)

(3) $|\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2 - (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}})^2$;

у твердженні 1.15.5 полягає в тому, що векторний добуток вимірює відхилення від рівності нерівності Коші–Шварца у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} - \overrightarrow{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} - \overrightarrow{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} - \overrightarrow{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1,0,3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ і $\vec{v}_2 = (0,1,1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1,-1,1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1,-1,1) \bullet ((x,y,z) - (1,0,3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1,-1,1) \bullet (x-1, y, z-3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} - \overrightarrow{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{k}} - \vec{\boldsymbol{j}} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1,0,3)$ і має базис $\vec{v}_1=(1,1,0)$ і $\vec{v}_2=(0,1,1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{k}-\vec{j}=(1,-1,1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1,-1,1)\bullet((x,y,z)-(1,0,3))=0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1,-1,1)\bullet(x-1,y,z-3)=0,$$

або

$$x-1-y+z-3=0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x-y+z=4.$$

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1,0,3)$ і має базис $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (1,1,0)$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (0,1,1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}_1 \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{k}} - \vec{\boldsymbol{j}} = (1,-1,1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1,-1,1) \bullet ((x,y,z) - (1,0,3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1,-1,1) \bullet (x-1, y, z-3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

Ще трішки про векторний добуток

Приклад 1.15.6

Запишіть рівняння площина, яка проходить через точку $(1, 0, 3)$ і має базис $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ і $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.

Розв'язок. За твердженням 1.15.3(3) вектор

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, -1, 1)$$

є нормальним вектором до шуканої площини. Отже, рівняння площини визначається з рівності

$$(1, -1, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 3)) = 0.$$

Розписавши цю рівність, отримуємо

$$(1, -1, 1) \bullet (x - 1, y, z - 3) = 0,$$

або

$$x - 1 - y + z - 3 = 0.$$

А отже, рівняння шуканої площини має вигляд

$$x - y + z = 4.$$

■

Дякую за увагу!