Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 25: Білінійні та квадратичні відображення

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\to\mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(i) $f(a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w}) = a\,f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})+b\,f(\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w})$;

(ii) $f(\overrightarrow{v},a\overrightarrow{w}+b\overrightarrow{w}') = a\,f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})+b\,f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}')$,

для всіх $\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}'\in\boldsymbol{V}$ і $a,b\in\mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем $\Bbbk$ називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \Bbbk$, що задовольняє умови:

(i) $f(a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}) = af(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + bf(\overrightarrow{v}', \overrightarrow{w})$;

(ii) $f(\overrightarrow{v}, a\overrightarrow{w} + b\overrightarrow{w}') = af(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + bf(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}')$,

для всіх $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \Bbbk$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(i) $f(a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}) = af(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + bf(\overrightarrow{v}', \overrightarrow{w})$;

(ii) $f(\overrightarrow{v}, a\overrightarrow{w} + b\overrightarrow{w}') = af(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + bf(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}')$,

для всіх $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(i) $f(a\vec{v} + b\vec{v}\,', \vec{w}) = a f(\vec{v}, \vec{w}) + b f(\vec{v}\,', \vec{w})$;

(ii) $f(\vec{v}, a\vec{w} + b\vec{w}\,') = a f(\vec{v}, \vec{w}) + b f(\vec{v}, \vec{w}\,')$,

для всіх $\vec{v}, \vec{v}\,', \vec{w}, \vec{w}\,' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(i) $f(a\,\vec{v} + b\,\vec{v}\,', \vec{w}) = a\,f(\vec{v}, \vec{w}) + b\,f(\vec{v}\,', \vec{w})$;

(ii) $f(\vec{v}, a\,\vec{w} + b\,\vec{w}\,') = a\,f(\vec{v}, \vec{w}) + b\,f(\vec{v}, \vec{w}\,')$,

для всіх $\vec{v}, \vec{v}\,', \vec{w}, \vec{w}\,' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\to$ k, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{v}+b\,\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w})=a\,f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})+b\,f(\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w})$;

(1) $f(\overrightarrow{v},a\,\overrightarrow{w}+b\,\overrightarrow{w}')=a\,f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})+b\,f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}')$,

для всіх $\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}'\in\boldsymbol{V}$ і $a,b\in$ k.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$;

(1) $f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, a\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}') = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{v} + b\,\overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}) = a\,f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + b\,f(\overrightarrow{v}', \overrightarrow{w})$;

(1) $f(\overrightarrow{v}, a\,\overrightarrow{w} + b\,\overrightarrow{w}') = a\,f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + b\,f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}')$,

для всіх $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to$ k, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\vec{\boldsymbol{v}} + b\,\vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{w}}) = a\,f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{w}})$;

(1) $f(\vec{\boldsymbol{v}}, a\,\vec{\boldsymbol{w}} + b\,\vec{\boldsymbol{w}}') = a\,f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{w}}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in$ k.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$;

(1) $f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, a\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}') = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathrm{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\to\mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$;

(1) $f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, a\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}') = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b\in\mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$;

(1) $f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, a\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}') = a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}', \overrightarrow{\boldsymbol{w}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in \mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to$ k, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\vec{\boldsymbol{v}} + b\,\vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{w}}) = a\,f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{w}})$;

(1) $f(\vec{\boldsymbol{v}}, a\,\vec{\boldsymbol{w}} + b\,\vec{\boldsymbol{w}}') = a\,f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + b\,f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{w}}' \in \boldsymbol{V}$ і $a, b \in$ k.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

У цій лекції ми опишемо деякі відображення, які достатньо часто зустрічаються в математиці. Однак нас цікавить не лише загальна теорія. Квадратичні відображення та квадратичні форми, зокрема, мають важливе застосування в багатьох областях геометрії та топології. Наприклад, коніки, які є важливим класом просторів у геометрії, тісно пов'язані з квадратичними формами.

Означення 1.14.1

Білінійним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається таке відображення $f\colon \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\to\mathsf{k}$, що задовольняє умови:

(1) $f(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}',\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}})+b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}',\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$;

(1) $f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},a\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}')=a\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}})+b\,f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}}')$,

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}',\overrightarrow{\boldsymbol{w}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}}'\in\boldsymbol{V}$ і $a,b\in\mathsf{k}$.

Приклад 1.14.2

Точковий добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням. Більш загально, внутрішній добуток на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot A \cdot \overrightarrow{w}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot A \cdot \overrightarrow{w}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n\times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\cdot A\cdot \overrightarrow{w}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\bullet T(\overrightarrow{w}),$$

є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot A \cdot \overrightarrow{w}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot A \cdot \overrightarrow{w}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot A \cdot \overrightarrow{w}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot A \cdot \overrightarrow{w}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot A \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Білінійні та квадратичні відображення

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot A \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot A \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot A \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot A \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot A \cdot \vec{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.3

Якщо вважати, що рядки або стовпчики 2×2-матриць є векторами евклідового простору $\mathbb{R}^2$, то функція, яка визначає визначник на $\mathbb{R}^2$, є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.4

Нехай A — $n \times n$-матриця над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot A \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^T,$$

є білінійним відображенням.

Приклад 1.14.5

Нехай T — лінійне перетворення на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

є білінійним відображенням.

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі V. Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ — впорядкований базис векторного простору V і $a_{ij} = f(\overrightarrow{v}_i, \overrightarrow{v}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$. Якщо

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{v}_i = x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{v}_n,$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{v}_i = y_1 \overrightarrow{v}_1 + y_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{v}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{v}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\overrightarrow{v}_i, \overrightarrow{v}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$. Якщо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \cdots + y_n \vec{v}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Означення 1.14.6

Нехай f — білінійне відображення на векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ — впорядкований базис векторного простору $\boldsymbol{V}$ і $a_{ij} = f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j)$. Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$. Детермінант матриці A називається *дискримінантом відображення* f стосовно базису $\mathscr{B}$.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *коефіцієнтами білінійного відображення* f в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

з білінійності відображення f випливає, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = f\Bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{v}}_j\Bigg) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

тобто,

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Останню рівність

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

перепишемо у вигляді

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Останню рівність

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

перепишемо у вигляді

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Останню рівність

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

перепишемо у вигляді

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Останню рівність

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

перепишемо у вигляді

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Останню рівність

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

перепишемо у вигляді

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Останню рівність

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

перепишемо у вигляді

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Останню рівність

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

перепишемо у вигляді

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Big),$$

звідки отримуємо, що

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \ldots, \overrightarrow{v}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\overrightarrow{v}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \overrightarrow{v}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{v}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \overrightarrow{v}_j.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази.

Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \ldots, \overrightarrow{v}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору V. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\overrightarrow{v}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \overrightarrow{v}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{v}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \overrightarrow{v}_j.$$

Білінійні та квадратичні відображення

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \ldots, \overrightarrow{v}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору V. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\overrightarrow{v}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \overrightarrow{v}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{v}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \overrightarrow{v}_j.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \ldots, \overrightarrow{v}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору V. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\overrightarrow{v}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j}\overrightarrow{v}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{v}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\overrightarrow{v}_j.$$

Білінійні та квадратичні відображення

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\vec{\boldsymbol{v}}'_1, \vec{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \vec{\boldsymbol{v}}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \vec{\boldsymbol{v}}_j.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\vec{\boldsymbol{v}}'_1, \vec{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \vec{\boldsymbol{v}}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \vec{\boldsymbol{v}}_j.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\vec{\boldsymbol{v}}'_1, \vec{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \vec{\boldsymbol{v}}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \vec{\boldsymbol{v}}_j.$$

Матриця білінійного відображення очевидно залежить від обраної бази. Однак виконується таке твердження:

Твердження 1.14.7

Нехай $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і $\mathscr{B}' = (\vec{\boldsymbol{v}}'_1, \vec{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}'_n)$ впорядковані базиси векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо A та A' — матриці білінійного відображення f стосовно базисів $\mathscr{B}$ і $\mathscr{B}'$, відповідно, то

$$A' = CAC^T,$$

де $C = (c_{ij})$ — матриця переходу від базису $\mathscr{B}$ до базису $\mathscr{B}'$, тобто

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \vec{\boldsymbol{v}}_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}'_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \vec{\boldsymbol{v}}_j.$$

Доведення. Якщо

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{v}_i = x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{v}_n,$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{v}_i = y_1 \overrightarrow{v}_1 + y_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \overrightarrow{v}_i' = x_1' \overrightarrow{v}_1' + x_2' \overrightarrow{v}_2' + \cdots + x_n' \overrightarrow{v}_n',$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i' \overrightarrow{v}_i' = y_1' \overrightarrow{v}_1' + y_2' \overrightarrow{v}_2' + \cdots + y_n' \overrightarrow{v}_n'$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}_1', \overrightarrow{v}_2', \ldots, \overrightarrow{v}_n')$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T (y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$.

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x_1', x_2', \ldots, x_n')A'(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T &= f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x_1', x_2', \ldots, x_n')CAC^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ■

Доведення. Якщо

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{v}_i = x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{v}_n,$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{v}_i = y_1 \overrightarrow{v}_1 + y_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \overrightarrow{v}_i' = x_1' \overrightarrow{v}_1' + x_2' \overrightarrow{v}_2' + \cdots + x_n' \overrightarrow{v}_n',$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i' \overrightarrow{v}_i' = y_1' \overrightarrow{v}_1' + y_2' \overrightarrow{v}_2' + \cdots + y_n' \overrightarrow{v}_n'$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}_1', \overrightarrow{v}_2', \ldots, \overrightarrow{v}_n')$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$.

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x_1', x_2', \ldots, x_n')A'(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T &= f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x_1', x_2', \ldots, x_n')CAC^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ∎

Доведення. Якщо

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{v}_i = x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{v}_n,$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{v}_i = y_1 \overrightarrow{v}_1 + y_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{v}'_i = x'_1 \overrightarrow{v}'_1 + x'_2 \overrightarrow{v}'_2 + \cdots + x'_n \overrightarrow{v}'_n,$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \overrightarrow{v}'_i = y'_1 \overrightarrow{v}'_1 + y'_2 \overrightarrow{v}'_2 + \cdots + y'_n \overrightarrow{v}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \ldots, \overrightarrow{v}'_n)$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T$.

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T &= f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ■

Доведення. Якщо

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{v}_i = x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{v}_n,$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{v}_i = y_1 \overrightarrow{v}_1 + y_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ і

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{v}'_i = x'_1 \overrightarrow{v}'_1 + x'_2 \overrightarrow{v}'_2 + \cdots + x'_n \overrightarrow{v}'_n,$$

$$\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \overrightarrow{v}'_i = y'_1 \overrightarrow{v}'_1 + y'_2 \overrightarrow{v}'_2 + \cdots + y'_n \overrightarrow{v}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \ldots, \overrightarrow{v}'_n)$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T$.
Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T &= f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ∎

Доведення. Якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i' = x_1' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1' + x_2' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2' + \cdots + x_n' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n',$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i' = y_1' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1' + y_2' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2' + \cdots + y_n' \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n'$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1', \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2', \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n')$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T (y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$.
Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x_1', x_2', \ldots, x_n')A'(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T = f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) &= \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x_1', x_2', \ldots, x_n')CAC^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ■

Доведення. Якщо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \cdots + y_n \vec{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{v}'_i = x'_1 \vec{v}'_1 + x'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + x'_n \vec{v}'_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \vec{v}'_i = y'_1 \vec{v}'_1 + y'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + y'_n \vec{v}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_n)$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T$.

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T &= f(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ∎

Доведення. Якщо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \cdots + y_n \vec{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{v}'_i = x'_1 \vec{v}'_1 + x'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + x'_n \vec{v}'_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \vec{v}'_i = y'_1 \vec{v}'_1 + y'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + y'_n \vec{v}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_n)$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T$.

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T &= f(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ■

Доведення. Якщо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_n\vec{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{v}_i' = x_1'\vec{v}_1' + x_2'\vec{v}_2' + \cdots + x_n'\vec{v}_n',$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i' \vec{v}_i' = y_1'\vec{v}_1' + y_2'\vec{v}_2' + \cdots + y_n'\vec{v}_n'$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \ldots, \vec{v}_n')$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$.

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x_1', x_2', \ldots, x_n')A'(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T &= f(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x_1', x_2', \ldots, x_n')CAC^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ∎

Доведення. Якщо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \cdots + y_n \vec{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{v}'_i = x'_1 \vec{v}'_1 + x'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + x'_n \vec{v}'_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \vec{v}'_i = y'_1 \vec{v}'_1 + y'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + y'_n \vec{v}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_n)$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T$.

Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T &= f(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$.

Доведення. Якщо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \cdots + y_n \vec{v}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ і

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{v}'_i = x'_1 \vec{v}'_1 + x'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + x'_n \vec{v}'_n,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \vec{v}'_i = y'_1 \vec{v}'_1 + y'_2 \vec{v}'_2 + \cdots + y'_n \vec{v}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_n)$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T$.
Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T = f(\vec{x}, \vec{y}) = \\ = (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$.

Доведення. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\boldsymbol{v}}_i=x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1+x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2+\cdots+x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}}=\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{\boldsymbol{v}}_i=y_1\vec{\boldsymbol{v}}_1+y_2\vec{\boldsymbol{v}}_2+\cdots+y_n\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

в базисі $\mathscr{B}=(\vec{\boldsymbol{v}}_1,\vec{\boldsymbol{v}}_2,\ldots,\vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і

$$\vec{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{n}x'_i\vec{\boldsymbol{v}}'_i=x'_1\vec{\boldsymbol{v}}'_1+x'_2\vec{\boldsymbol{v}}'_2+\cdots+x'_n\vec{\boldsymbol{v}}'_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}}=\sum_{i=1}^{n}y'_i\vec{\boldsymbol{v}}'_i=y'_1\vec{\boldsymbol{v}}'_1+y'_2\vec{\boldsymbol{v}}'_2+\cdots+y'_n\vec{\boldsymbol{v}}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}'=(\vec{\boldsymbol{v}}'_1,\vec{\boldsymbol{v}}'_2,\ldots,\vec{\boldsymbol{v}}'_n)$. Тоді

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)C$ і $(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T=C^T(y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)^T$.
Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)A'(y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)^T &= f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})=\\ &=(x_1,x_2,\ldots,x_n)A(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T=\\ &=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)CAC^T(y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A'=CAC^T$.

Доведення. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{\boldsymbol{v}}'_i = x'_1 \vec{\boldsymbol{v}}'_1 + x'_2 \vec{\boldsymbol{v}}'_2 + \cdots + x'_n \vec{\boldsymbol{v}}'_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \vec{\boldsymbol{v}}'_i = y'_1 \vec{\boldsymbol{v}}'_1 + y'_2 \vec{\boldsymbol{v}}'_2 + \cdots + y'_n \vec{\boldsymbol{v}}'_n$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{\boldsymbol{v}}'_1, \vec{\boldsymbol{v}}'_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}'_n)$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T$.
Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}
(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)A'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T &= f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\
&= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)CAC^T(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)^T,
\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ∎

Доведення. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = x_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n \vec{\boldsymbol{v}}_n,$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = y_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + y_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + y_n \vec{\boldsymbol{v}}_n$$

в базисі $\mathscr{B} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n)$ і

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{\boldsymbol{v}}_i' = x_1' \vec{\boldsymbol{v}}_1' + x_2' \vec{\boldsymbol{v}}_2' + \cdots + x_n' \vec{\boldsymbol{v}}_n',$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} y_i' \vec{\boldsymbol{v}}_i' = y_1' \vec{\boldsymbol{v}}_1' + y_2' \vec{\boldsymbol{v}}_2' + \cdots + y_n' \vec{\boldsymbol{v}}_n'$$

в базисі $\mathscr{B}' = (\vec{\boldsymbol{v}}_1', \vec{\boldsymbol{v}}_2', \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n')$. Тоді

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')C$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = C^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$.
Отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}(x_1', x_2', \ldots, x_n')A'(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T &= f(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)A(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \\ &= (x_1', x_2', \ldots, x_n')CAC^T(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T,\end{aligned}$$

звідки випливає рівність $A' = CAC^T$. ■

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Білінійні та квадратичні відображення

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Означення 1.14.8

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *конгруентною*, або *подібною*, до дійсної $n \times n$-матриці B, якщо існує невироджена $n \times n$-матриця C така, що $A = CBC^T$.

Неважко показати, що відношення конгруентності $n \times n$-матриць є відношенням еквівалентності на множині всіх дійсних $n \times n$-матриць. Ми можемо переформулювати твердження 1.14.7.

Наслідок 1.14.9

Матриця білінійного відображення єдина з точністю до подібності матриць, а отже вивчення білінійних відображень еквівалентно вивченню класів конгруентності матриць.

Означення 1.14.10

Ранг білінійного відображення f — це ранг будь-якої матриці відображення f. Білінійне відображення на n-вимірному векторному просторі називається *виродженим* або *невиродженим*, якщо його ранг менше за n, або дорівнює n, відповідно.

З твердження 1.14.7 випливає, що ранг білінійного відображення коректно визначений.

Білінійні та квадратичні відображення

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі V над полем $\Bbbk$ називається довільне відображення $q\colon V \to \Bbbk$, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на V. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору V. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in V$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі V над полем k називається довільне відображення $q\colon V \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на V. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору V. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in V$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі V над полем $\Bbbk$ називається довільне відображення $q\colon V \to \Bbbk$, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на V. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору V. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in V$.

Білінійні та квадратичні відображення

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі V над полем k називається довільне відображення $q\colon V \to \mathsf{k}$, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на V. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору V. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in V$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі V над полем k називається довільне відображення $q\colon V \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на V. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору V. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in V$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q \colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$.
Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Білінійні та квадратичні відображення

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Справджується твердження 1.14.11, яке ми пропонуємо довести слухачам самостійно як вправу.

Твердження 1.14.11

Матриця, яка відповідає симетричному білінійному відображенню стосовно довільного базису є симетричною матрицею.

Означення 1.14.12

Квадратичним відображенням на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ над полем k називається довільне відображення $q\colon \boldsymbol{V} \to$ k, яке можна визначити у вигляді $q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, де f — деяке білінійне відображення на $\boldsymbol{V}$. У цьому випадку q також називається квадратичним відображенням, яке відповідає білінійному відображенню f. Квадратичне відображення q називається *невиродженим* (*виродженим*), якщо білінійне відображення f, яке йому відповідає, є невиродженим (виродженим). *Дискримінант* квадратичного відображення q визначається як дискримінант білінійного відображення f стосовно деякого базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Квадратичне відображення q та білінійне відображення f називаються *додатно визначеними*, якщо

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) > 0$$

для всіх ненульових векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Білінійні та квадратичні відображення

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле $\Bbbk$ не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* $\Bbbk$ називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то $\Bbbk$ називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою
$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$
де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд
$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$
Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то
$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$
Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття “симетричне білінійне відображення” і “квадратичне відображення” насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою
$$f(\vec{v}, \vec{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$
де $\vec{v} = (v_1, v_2)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд
$$q(\vec{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$
Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то
$$f(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{v} + \vec{w}) - q(\vec{v}) - q(\vec{w})\right).$$
Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - q(\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\vec{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле $\Bbbk$ не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{v} + \vec{w}) - q(\vec{v}) - q(\vec{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* $\Bbbk$ називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то $\Bbbk$ називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою
$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$
де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд
$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$
Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то
$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) - q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - q(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})\right).$$
Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле k не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) - q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - q(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття “симетричне білінійне відображення” і “квадратичне відображення” насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* k називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то k називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\vec{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле $\Bbbk$ не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{v} + \vec{w}) - q(\vec{v}) - q(\vec{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* $\Bbbk$ називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то $\Bbbk$ називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд

$$q(\vec{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$

Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле $\Bbbk$ не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{v} + \vec{w}) - q(\vec{v}) - q(\vec{w})\right).$$

Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* $\Bbbk$ називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то $\Bbbk$ називається полем характеристики 0.

Приклад 1.14.13

Нехай f — білінійне відображення на евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, визначене за формулою
$$f(\vec{v}, \vec{w}) = a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2,$$
де $\vec{v} = (v_1, v_2)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2)$. Квадратичне відображення, яке відповідає відображенню f має вигляд
$$q(\vec{v}) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1v_2 + a_{22}v_2^2.$$
Ми бачимо, що відображення q є в точності однорідний многочлен степеня 2 від змінних v_1 і v_2.

Якщо поле $\Bbbk$ не має характеристику 2 [1] і якщо f — симетричне білінійне відображення, що відповідає квадратичному відображенню q, то
$$f(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{v} + \vec{w}) - q(\vec{v}) - q(\vec{w})\right).$$
Іншими словами, знання лише про квадратичне відображення q дозволяють реконструювати (відновити) білінійне відображення f, так що поняття "симетричне білінійне відображення" і "квадратичне відображення" насправді є лише двома способами погляду на одне і те ж.

[1] *Характеристикою поля* $\Bbbk$ називається найменше натуральне число n, для якого сума n мультиплікативних нейтральних елементів поля дорівнює адитивному нейтральному елементу поля. Якщо такого n не існує, то $\Bbbk$ називається полем характеристики 0.

Білінійні та квадратичні відображення

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем $\Bbbk$ називається однорідний многочлен над $\Bbbk$ степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз
$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$
є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді
$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$
Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Білінійні та квадратичні відображення

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем $\Bbbk$ називається однорідний многочлен над $\Bbbk$ степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз
$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$
є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді
$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$
Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Білінійні та квадратичні відображення

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем $\Bbbk$ називається однорідний многочлен над $\Bbbk$ степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x+3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз
$$x^2+5y^2-2z^2+3xy+yz$$
є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді
$$x^2+5y^2-2z^2+\frac{3}{2}xy+\frac{3}{2}yx+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zy$$
Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Білінійні та квадратичні відображення

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x+3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз
$$x^2+5y^2-2z^2+3xy+yz$$
є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді
$$x^2+5y^2-2z^2+\frac{3}{2}xy+\frac{3}{2}yx+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zy$$
Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x+3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2+5y^2-2z^2+3xy+yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2+5y^2-2z^2+\frac{3}{2}xy+\frac{3}{2}yx+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x + 3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 3xy + yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2 + 5y^2 - 2z^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yx + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Білінійні та квадратичні відображення

Вигляд квадратичного відображення в прикладі 1.14.13 та інші подібні йому приклади мотивують визначити те, які поняття є іншою альтернативною термінологією для квадратичних відображень.

Означення 1.14.14

d-адичною формою над полем k називається однорідний многочлен над k степеня d з відповідною кількістю змінних. *Лінійна* або *квадратична форма* це — d-адична форма, де d дорівнює 1 або 2, відповідно.

Наприклад, вираз $2x+3y$ є лінійною формою стосовно змінних x і y, а вираз

$$x^2+5y^2-2z^2+3xy+yz$$

є квадратичною формою стосовно змінних x, y і z. Зауважимо, що цю квадратичну форму можна переписати симетричними перехресними членами у вигляді

$$x^2+5y^2-2z^2+\frac{3}{2}xy+\frac{3}{2}yx+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zy$$

Звідси випливає, що цій формі можна поставити у відповідність симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Білінійні та квадратичні відображення

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле $\Bbbk$ не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q \colon \boldsymbol{V} \to \Bbbk$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Білінійні та квадратичні відображення

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}A\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A=(a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V}\to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B}=(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})=\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A=(a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V}\to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B}=(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})=\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A=(a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V}\to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B}=(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})=\overrightarrow{\boldsymbol{x}}A\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Білінійні та квадратичні відображення

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Більш загально, якщо поле k не має характеристики 2, такими полями є, наприклад, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, то ми можемо зробити перехресні члени симетричними з трюком, показаним у прикладі вище. З цього випливає, що в цьому випадку кожна квадратична форма з n змінних є просто виразом вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Це означає, що кожна квадратична форма визначає єдине квадратичне відображення

$$q\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ нижче описаним чином. Вибираємо впорядкований базис $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n)$ у векторному просторі $\boldsymbol{V}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ і припустимо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i.$$

Тоді

$$q(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} A \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Білінійні та квадратичні відображення

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення".

Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

Білінійні та квадратичні відображення

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення".

Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення".

Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення".

Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

У цьому випадку також матриця, яка відповідає білінійному відображенню — це просто матриця A. Звичайно, щоб усе це мало сенс, ми розглядаємо x_i як значення, а не змінні, але ми можемо бачити, що з теоретичної точки зору немає різниці між теорією квадратичних форм і квадратичними відображеннями. Це пояснює, чому в літературі терміни "квадратичне відображення" та "квадратична форма" часто використовуються як взаємозамінні. Зокрема, використовуються однакові терміни, такі як "вироджений", "невироджений", "додатно визначений" або "дискримінант" для обидвох. Іноді також можна зустріти термін "білінійна форма", який використовується замість терміну "білінійне відображення". Зауважимо, що довільна квадратична форма може бути досить складною. Ключовим для її розуміння є той факт, що завжди можна вибрати базис векторного простору, щоб стосовно цього базису квадратична форма мала хорошу просту структуру.

Теорема 1.14.15 (теорема про зведення до діагонального вигляду)

Нехай q — квадратична форма, визначена на векторному просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує ортогональних базис у просторі $\mathbb{R}^n$, стосовно якого квадратична форма q має вигляд

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2 - \lambda_{s+1} x_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} x_{s+t}^2, \quad \text{де } \lambda_i > 0.$$

Різниця $s - t$ називається *сигнатурою* квадратичної форми або пов'язаною з нею симетричного білінійного відображення.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ∎

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Доведення теореми 1.14.15. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 1.13.13. Цілі числа s і t, а отже, і сигнатура, не залежать від базису, а звідси випливає, що вони є інваріантами квадратичної форми. ■

Якщо не наполягати на ортонормальному базисі для діагоналізації квадратичної форми, то існує слабша версія теореми 1.14.15. Це є цікаво, оскільки існує простіший алгоритм пошуку діагоналізуючого базису для квадратної форми. Його матрична форма викладена в теоремі 1.14.16.

Теорема 1.14.16

Дійсна симетрична $n \times n$-матриця A рангу k подібна єдиній діагональній матриці, перші s діагональних елементів якої дорівнюють $+1$, наступні $r - s$ діагональних елементів дорівнюють -1, а всі інші дорівнюють нулю.

Доведення. Наведемо схему доведення теореми. Припустимо, що A не є нульовою матрицею, інакше доводити нічого.

Білінійні та квадратичні відображення

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.

Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.

Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.

Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.

Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.

Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.

Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$.
Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$.
Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$.
Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$.
Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$.
Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad\qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad\qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad\qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad\qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad\qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad\qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad\qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad\qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad\qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.

Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.

Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$.
Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, & s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, & t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, & t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 1. Побудуємо подібну матрицю A_1 до матриця A, яка має ненульовий діагональний елемент.
Якщо матриця A має ненульовий діагональний елемент, то нехай $A_1 = A$. Якщо всі діагональні елементи матриці A дорівнюють нулю, то зафіксуємо довільний ненульовий елемент a_{ij} матриці A. Нехай E — елементарна матриця $E_{ji}(1)$, яка має одиниці 1 на діагоналі, і одиницю 1 на ji-місці та нулі в інших місцях. Нехай $A_1 = EAE^T$. Матриця A_1 отримується з матриці A шляхом додавання j-го рядка матриці A до її i-го рядка з подальшим додаванням j-го стовпця результату до i-го стовпця. Неважко помітити, що i-й діагональний елемент матриці A_1 дорівнює $2a_{ij}$, а отже, є ненульовий.

Крок 2. Побудуємо подібну матрицю A_2 до матриці A_1, яка має ненульовий елемент a_{11}.
Нехай $F = (f_{ij})$ — елементарна матриця, яка визначена так:

$$f_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \qquad\qquad s \neq 1 \text{ або } s \neq i, \\ 1, & \text{якщо } s = 1, \qquad\qquad t = i, \\ 1, & \text{якщо } s = i, \qquad\qquad t = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $A_2 = FA_1F^T$ — матриця, отримана з матриці A_1 шляхом перестановки першого та i-го діагонального елемента.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1) \times (n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму. ■

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1) \times (n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_s, -d_{s+1}, \dots, -d_r, 0, \dots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \dots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму. ∎

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1) \times (n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1) \times (n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму. ■

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.

Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1) \times (n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1)\times(n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_s, -d_{s+1}, \dots, -d_r, 0, \dots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \dots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму.

Крок 3. Побудуємо подібну матрицю A_3 подібну до матриці A_2, в якій єдиним ненульовим елементом у першому рядку або першому стовпці є a_{11}.
Крок 3 виконується за допомогою елементарних матриць, як і у випадку кроку 1, послідовно додають кратні першого рядка до всіх інших рядків від 2 до n і однакові кратні першого стовпця до інших стовпців.

Після кроку 3 матриця A_3 матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де B — симетрична $(n-1) \times (n-1)$-матриця. Повторивши кроки 1–3 на матриці B і так далі покаже, що матриця A подібна до діагональної матриці з першими r діагональними ненульовими елементами. Змінюючи діагональні елементи, як на кроці 2, якщо це необхідно, ми можемо припустити, що всі додатні елементи стоять на перших місцях. Це доводить, що матриця A подібна діагональній матриці

$$G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_s, -d_{s+1}, \ldots, -d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i > 0$. Якщо

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 0, \ldots, 0\right),$$

то матриця HGH^T має шукану форму. ■

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$
то
$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Показіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16.
Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$
то
$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Однією приємною властивістю доведення теореми 1.14.16 є її конструктивність.

Приклад 1.14.17

Покажіть, що матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

подібна діагональній матриці з елементами ± 1 і 0 на діагоналі.

Розв'язок. Ми виконуємо кроки, викладені в доведенні теореми 1.14.16. Якщо елементарні матриці E, F і G визначені так

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = GFEAE^T F^T G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ◼

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ◼

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ∎

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ∎

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ∎

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ∎

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ∎

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ∎

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. □

Нарешті, визначимо елементарну діагональну матрицю H так:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

і зауважимо, що

$$A_2 = HA_1H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $M = HGFE$, то $MAM^T = A_2$ є шуканою матрицею, і ми завершили. ■

Варто вказати на один наслідок теореми 1.14.15.

Наслідок 1.14.18

Додатно визначена квадратична форма є невиродженою, і всі її дискримінанти є додатними.

Доведення. Можна припускати, що векторний простір збігається з евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ і тоді в теоремі 1.14.15 виконується рівність $s = n$. Дискримінант, безумовно, додатний стосовно ортонормованого базису, гарантованого теоремою. Причиною того, що дискримінант завжди є додатним, є те, що детермінанти подібних матриць відрізняється на множник, який є квадратом дійсного числа. ■

Дякую за увагу!