Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 24: Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу “теоремами про головні осі”, оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають “спектральними теоремами”, оскільки вони стосуються власних значень (“спектрів”) перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов’язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це ”спряжене” перетворення.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу “теоремами про головні осі”, оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають “спектральними теоремами”, оскільки вони стосуються власних значень (“спектрів”) перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов’язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це ”спряжене” перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу “теоремами про головні осі”, оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають “спектральними теоремами”, оскільки вони стосуються власних значень (“спектрів”) перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов’язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це ”спряжене” перетворення.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу “теоремами про головні осі”, оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають “спектральними теоремами”, оскільки вони стосуються власних значень (“спектрів”) перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов’язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу “теоремами про головні осі”, оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають “спектральними теоремами”, оскільки вони стосуються власних значень (“спектрів”) перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов’язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це ”спряжене” перетворення.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу "теоремами про головні осі", оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають "спектральними теоремами", оскільки вони стосуються власних значень ("спектрів") перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов'язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це "спряжене" перетворення.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Мета цієї лекції — сформулювати умови, за яких лінійне перетворення векторного простору може бути діагоналізованим, тобто за яких умов матриця лінійного перетворення в деякому ортонормованому базисі є діагональною. Ми матимемо справу з векторними просторами або над дійсними, або над комплексними числами. Ми також називаємо основні теореми цього розділу “теоремами про головні осі”, оскільки їх можна трактувати як твердження про існування певних систем координат (координатних осей), щодо яких перетворення має особливо просте описання. Такі теореми про діагоналізацію — це спеціальні випадки того, що в літературі зазвичай називають “спектральними теоремами”, оскільки вони стосуються власних значень (“спектрів”) перетворення.

Зрештою, виявиться, що перетворення діагоналізується, якщо матриця, пов’язана з ним, є симетрична або ермітова. На жаль, ці властивості матриці не залежать від базису, який використовується для визначення матриці. Наприклад, можна знайти перетворення та два базиси, щоб матриця була симетричною щодо одного базису, і не була симетричною щодо іншого. Означення, яке фіксує суть необхідної нам симетрії, — це ”спряжене” перетворення.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.1

Нехай V — n-вимірний векторний простір над полем $\Bbbk$. Якщо $\alpha\colon V \to \Bbbk$ — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем $\Bbbk$, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \Bbbk,$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim \ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim \operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim \mathbf{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim \ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim \operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \mathbf{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84.

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \text{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\vec{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\vec{v}) = \vec{v} \bullet \vec{u}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \text{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем $\Bbbk$. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \Bbbk$ — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем $\Bbbk$, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \Bbbk,$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V}\to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\in\boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V}\to \text{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \text{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \text{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то
$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ■

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення
$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \text{k},$$
означене за формулою
$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$
є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Лема 1.13.1

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір над полем k. Якщо $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to$ k — ненульовий лінійний функціонал, то

$$\dim\ker(\alpha) = n - 1.$$

Доведення. Оскільки лінійний функціонал α — ненульовий, то $\dim\operatorname{im}(\alpha) = 1$, і тоді твердження леми є безпосереднім наслідком теорема 1.2.84. ∎

Теорема 1.2.84

Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim\mathbf{V} = \dim\operatorname{im}(T) + \dim\ker(T).$$

Якщо на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ визначено внутрішній добуток $\bullet$, то легко перевіряється, що для кожного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ відображення

$$u^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k},$$

означене за формулою

$$u^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$$

є лінійним відображенням, яке є лінійним функціоналом. Причому виконується й обернене твердження.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для всіх $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{u}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{u}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{u} = \overline{\alpha(\overrightarrow{u}_0)}\,\overrightarrow{u}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{v}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp$ випливає, що $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} + c\overrightarrow{u}$, для деякого вектора $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{x} + c\,\overrightarrow{u}) = \alpha(c\,\overrightarrow{u}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{u}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{x} + c\,\overrightarrow{u}) = c\,\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = c\,|\alpha(\overrightarrow{u}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для всіх $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{u}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{u}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{u} = \overline{\alpha(\overrightarrow{u}_0)}\,\overrightarrow{u}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{v}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} + c\overrightarrow{u}$, для деякого вектора $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{x} + c\,\overrightarrow{u}) = \alpha(c\,\overrightarrow{u}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{u}_0)\right|^2$$

і

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{x} + c\,\overrightarrow{u}) = c\,\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = c\left|\alpha(\overrightarrow{u}_0)\right|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$$

для всіх $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{u}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{u}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{u} = \overline{\alpha(\overrightarrow{u}_0)}\,\overrightarrow{u}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{v}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} + c\overrightarrow{u}$, для деякого вектора $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{x} + c\,\overrightarrow{u}) = \alpha(c\,\overrightarrow{u}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{u}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{x} + c\,\overrightarrow{u}) = c\,\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = c\,|\alpha(\overrightarrow{u}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{u} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \Bbbk$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем $\Bbbk$ з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \Bbbk$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$
для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$
— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathrm{k}$. Але тоді маємо, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$
і
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$
Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що
$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$$
для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\vec{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що
$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\vec{\boldsymbol{u}}_0)}\,\vec{\boldsymbol{u}}_0$$
— шуканий вектор[1]. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp$ випливає, що $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} + c\vec{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що
$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\vec{\boldsymbol{x}} + c\,\vec{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\vec{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\vec{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$
і
$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (\vec{\boldsymbol{x}} + c\,\vec{\boldsymbol{u}}) = c\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\vec{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$
Отже, доведено існування такого вектора $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\vec{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\vec{\boldsymbol{u}}_0)}\vec{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} + c\vec{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathrm{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\vec{\boldsymbol{x}} + c\,\vec{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\vec{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\vec{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (\vec{\boldsymbol{x}} + c\,\vec{\boldsymbol{u}}) = c\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\vec{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$
для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$
— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$
і
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$
Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$
для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$
— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathrm{k}$. Але тоді маємо, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$
і
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$
Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^\perp$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^\perp$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$
для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$
— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що
$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2$$
і
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\left|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)\right|^2.$$
Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Теорема 1.13.2

Нехай $\alpha\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$ — лінійний функціонал на n-вимірному векторному просторі над полем k з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. Якщо α — нульове відображення, то очевидно, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ є нуль-вектор. Отже, надалі будемо вважати, що α не є нульовим відображенням. За лемою 1.13.1 вимір підпростору $\boldsymbol{X} = \ker(\alpha)$ дорівнює $n-1$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$ — довільний одиничний вектор в одновимірному ортогональному доповненні $\boldsymbol{X}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{X}$. Ми покажемо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overline{\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0$$

— шуканий вектор[1]. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільний вектор векторного простору $\boldsymbol{V}$, то з рівності $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$ випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, для деякого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і деякого скаляра $c \in \mathsf{k}$. Але тоді маємо, що

$$\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \alpha(c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = c\,|\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_0)|^2.$$

Отже, доведено існування такого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V}$.

[1] Операція спряження потрібна, якщо ми маємо справу з векторними просторами над полем комплексних чисел.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{u}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}' \bullet \overrightarrow{v}$. Тоді

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') \bullet \overrightarrow{v} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') \bullet (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{v}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{v}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}^* \bullet \overrightarrow{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}' \bullet \overrightarrow{v}$. Тоді

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') \bullet \overrightarrow{v} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') \bullet (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}'$, що і завершує доведення теореми. ∎

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{v}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}^* \bullet \overrightarrow{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^* \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ∎

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}' \bullet \overrightarrow{v}$. Тоді

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') \bullet \overrightarrow{v} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') \bullet (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}'$, що і завершує доведення теореми.

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{v}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}^* \bullet \overrightarrow{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми.

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми.

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми.

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}}' \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet (\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{w}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^* \bullet \vec{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^* \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}}' \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet (\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{w}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^* \bullet \vec{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}\,' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}\,' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}\,') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}\,'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}\,') \bullet (\vec{u} - \vec{u}\,') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}\,'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^{\,*} \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^{\,*} \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^{\,*}$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. $\blacksquare$

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}}' \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet (\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{w}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^* \bullet \vec{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}' \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{\boldsymbol{u}}\,' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}}\,' \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}\,') \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}\,'$, отримуємо, що

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}\,') \bullet (\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}\,') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}\,'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{w}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{\,*} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^{\,*} \bullet \vec{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^{\,*}$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{\boldsymbol{u}}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}}' \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$. Тоді

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}'$, отримуємо, що

$$(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') \bullet (\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}'$, що і завершує доведення теореми. ∎

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{\boldsymbol{v}}}$ за формулою

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{w}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^* \bullet \vec{\boldsymbol{w}}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. $\blacksquare$

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T \colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^* \colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T \colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in V$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in V$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ■

Далі, припустимо, що V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in V$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^* \in V$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^* \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon V \to V$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^*$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon V \to V$.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує ще один вектор $\vec{u}' \in \boldsymbol{V}$ такий, що $\alpha(\vec{v}) = \vec{u}' \bullet \vec{v}$. Тоді

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet \vec{v} = 0$$

для всіх $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$. Зокрема, прийнявши $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$, отримуємо, що

$$(\vec{u} - \vec{u}') \bullet (\vec{u} - \vec{u}') = 0,$$

звідки випливає, що $\vec{u} = \vec{u}'$, що і завершує доведення теореми. ∎

Далі, припустимо, що $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Для фіксованого вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ визначимо лінійний функціонал $T_{\vec{v}}$ за формулою

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = T(\vec{w}) \bullet \vec{v}.$$

За теоремою 1.13.2 існує єдиний вектор $\vec{v}^{\,*} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{v}^{\,*} \bullet \vec{w}.$$

Означення 1.13.3

Перетворення $T^*\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, означене за формулою

$$T^*(\vec{v}) = \vec{v}^{\,*}$$

називається *спряженим* до лінійного відображення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Лема 1.13.4

Нехай V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова
$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w})$$
для всіх $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$.

Доведення. За означенням маємо:
$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$
звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай V — векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що
$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{v}+b\,\overrightarrow{w}) &= T(\overrightarrow{u}) \bullet (a\,\overrightarrow{v}+b\,\overrightarrow{w}) = a\,T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v}+b\,T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{w} = \\ &= a\,\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{v})+b\,\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{v}))+\overrightarrow{u} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{w})) = \\ &= \overrightarrow{u} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{v})+b\,T^*(\overrightarrow{w})).\end{aligned}$$
Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{u}$ лінійного простору V, то маємо, що
$$T^*(a\,\overrightarrow{v} + b\,\overrightarrow{w}) = (a\,T^*(\overrightarrow{v}) + b\,T^*(\overrightarrow{w})),$$
а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w})$$

для всіх $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{v}+b\,\overrightarrow{w}) &= T(\overrightarrow{u}) \bullet (a\,\overrightarrow{v}+b\,\overrightarrow{w}) = a\,T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v}+b\,T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{w} = \\ &= a\,\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{v})+b\,\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{v}))+\overrightarrow{u} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{w})) = \\ &= \overrightarrow{u} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{v})+b\,T^*(\overrightarrow{w})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{u}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{v} + b\,\overrightarrow{w}) = (a\,T^*(\overrightarrow{v}) + b\,T^*(\overrightarrow{w})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w})$$

для всіх $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{v}+b\,\overrightarrow{w}) &= T(\overrightarrow{u}) \bullet (a\,\overrightarrow{v}+b\,\overrightarrow{w}) = a\,T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v}+b\,T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{w} = \\ &= a\,\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{v})+b\,\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{v}))+\overrightarrow{u} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{w})) = \\ &= \overrightarrow{u} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{v})+b\,T^*(\overrightarrow{w})). \end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{u}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{v} + b\,\overrightarrow{w}) = (a\,T^*(\overrightarrow{v}) + b\,T^*(\overrightarrow{w})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{v} \bullet T^*(\vec{w})$$

для всіх $\vec{v}, \vec{w} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\vec{v}) \bullet \vec{w} = T_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{w}^* \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet T^*(\vec{w}),$$

звідки і випливає твердження леми. ∎

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet T^*(a\,\vec{v}+b\,\vec{w}) &= T(\vec{u}) \bullet (a\,\vec{v}+b\,\vec{w}) = a\,T(\vec{u}) \bullet \vec{v}+b\,T(\vec{u}) \bullet \vec{w} = \\ &= a\,\vec{u} \bullet T^*(\vec{v})+b\,\vec{u} \bullet T^*(\vec{w}) = \vec{u} \bullet (a\,T^*(\vec{v}))+\vec{u} \bullet (b\,T^*(\vec{w})) = \\ &= \vec{u} \bullet (a\,T^*(\vec{v})+b\,T^*(\vec{w})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\vec{u}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\vec{v} + b\,\vec{w}) = (a\,T^*(\vec{v}) + b\,T^*(\vec{w})),$$

а це завершує доведення леми. ∎

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{w}}=\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}},\overrightarrow{\boldsymbol{w}}\in\boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{w}}=T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=\overrightarrow{\boldsymbol{w}}^*\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ∎

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}})&=T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{w}}=\\&=a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet(a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet(b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}))=\\&=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet(a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}})=(a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ∎

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ∎

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ∎

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{w}}^* \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\vec{\boldsymbol{v}}+b\,\vec{\boldsymbol{w}}) &= T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\vec{\boldsymbol{v}}+b\,\vec{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}+b\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{v}})+b\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}}))+\vec{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\vec{\boldsymbol{v}} + b\,\vec{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w})$$

для всіх $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = T_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \bullet T^*(a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{w}) &= T(\overrightarrow{u}) \bullet (a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{w}) = aT(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v}+bT(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{w} = \\ &= a\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{v})+b\overrightarrow{u} \bullet T^*(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet (aT^*(\overrightarrow{v}))+\overrightarrow{u} \bullet (bT^*(\overrightarrow{w})) = \\ &= \overrightarrow{u} \bullet (aT^*(\overrightarrow{v})+bT^*(\overrightarrow{w})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{u}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}) = (aT^*(\overrightarrow{v}) + bT^*(\overrightarrow{w})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} =$$
$$= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) =$$
$$= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ∎

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = aT(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+bT(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (aT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (bT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (aT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+bT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (aT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + bT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ∎

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} =$$
$$= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})) + \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) =$$
$$= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = aT(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+bT(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (aT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (bT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (aT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+bT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (aT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + bT^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} =$$
$$= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) =$$
$$= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} =$$
$$= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) =$$
$$= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} =$$
$$= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) =$$
$$= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = T_{\vec{\boldsymbol{v}}}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{w}}^* \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ∎

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\vec{\boldsymbol{v}}+b\,\vec{\boldsymbol{w}}) &= T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\vec{\boldsymbol{v}}+b\,\vec{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}}+b\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{v}})+b\,\vec{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}}))+\vec{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \vec{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\vec{\boldsymbol{v}} + b\,\vec{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\vec{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\vec{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ∎

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ■

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} =$$
$$= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})) + \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) =$$
$$= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.4

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді для спряженого перетворення T^* виконується умова

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Доведення. За означенням маємо:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = T_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

звідки і випливає твердження леми. ∎

Лема 1.13.5

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Тоді спряжене перетворення T^* є лінійним перетворенням.

Доведення. Використавши лему 1.13.4 та лінійність точкового добутку, отримуємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) &= T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet (a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}+b\,T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= a\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}))+\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})+b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})).\end{aligned}$$

Оскільки ці рівності виконуються для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$, то маємо, що

$$T^*(a\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (a\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + b\,T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})),$$

а це завершує доведення леми. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$
для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Означення 1.13.6

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ називається *самоспряженим*, якщо $T = T^*$.

З леми 1.13.4 випливає, якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є самоспряженим, то

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}})$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Можна довести обернене твердження, а саме

Лема 1.13.7

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ задовольняє умову

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$, то T є самоспряженим.

Твердження леми 1.13.7 випливає з того факту, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}),$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$.

Теорема 1.13.8

Нехай V — дійсний векторний простір і $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ — ортонормований базис лінійного простору V. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$ і $T^*(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i \bullet T^*(\overrightarrow{u}_j) = T^*(\overrightarrow{u}_j) \bullet \overrightarrow{u}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормований базис лінійного простору V. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{u}_i) \bullet \vec{u}_j$ і $T^*(\vec{u}_i) \bullet \vec{u}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{u}_i) \bullet \vec{u}_j = \vec{u}_i \bullet T^*(\vec{u}_j) = T^*(\vec{u}_j) \bullet \vec{u}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ∎

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ — ортонормований базис лінійного простору V. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i, j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$ і $T^*(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i \bullet T^*(\overrightarrow{u}_j) = T^*(\overrightarrow{u}_j) \bullet \overrightarrow{u}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ — ортонормований базис лінійного простору V. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$ і $T^*(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i \bullet T^*(\overrightarrow{u}_j) = T^*(\overrightarrow{u}_j) \bullet \overrightarrow{u}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$ і $T^*(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) \bullet \overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{u}_i \bullet T^*(\overrightarrow{u}_j) = T^*(\overrightarrow{u}_j) \bullet \overrightarrow{u}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ∎

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ∎

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ∎

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ∎

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ∎

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i, j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. $\blacksquare$

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною.

Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i, j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.8

Нехай $\boldsymbol{V}$ — дійсний векторний простір і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення. Якщо M — матриця перетворення T стосовно ортонормованого базису, то M^T — матриця спряженого до нього перетворення T^* стосовно цього ж базису.

Доведення. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормований базис лінійного простору $\boldsymbol{V}$. З означення матриці лінійного перетворення та властивостей ортонормованого базису випливає, що на (i,j) місці матриць T і T^* є елементи $T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$ і $T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j$, відповідно. Однак, маємо, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_j = \vec{\boldsymbol{u}}_i \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) = T^*(\vec{\boldsymbol{u}}_j) \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i,$$

звідки випливає твердження теореми. ■

З теореми 1.13.8 випливає

Наслідок 1.13.9

Матриця для самоспряженого лінійного перетворення на дійсному векторному просторі стосовно ортонормованого базису є симетричною. Навпаки, якщо матриця для лінійного перетворення над дійсним векторним простором стосовно ортонормованого базису симетрична, то лінійне перетворення є самоспряженим.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^{*}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^{*}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^{*}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ■

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ■

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^{*}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^{*}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ■

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі V з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^{*}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ■

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{u}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}=T(\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\bullet T^*(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\bullet\lambda\overrightarrow{u}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}).$$

Позаяк $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}).$$

Позаяк $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним.

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}).$$

Позаяк $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ■

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}).$$

Позаяк $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Самоспряжені перетворення дійсного векторного простору іноді називають *симетричними* перетвореннями через наслідок 1.13.9. Комплексні аналоги теореми 1.13.8 і наслідку 1.13.9 просто замінюють транспонування комплексним спряженим транспонуванням, і самоспряжені перетворення в цьому випадку іноді називають *ермітовими*.

Тепер ми повернемося до проблеми, коли лінійне перетворення може бути діагоналізоване. Ми будемо мати справу з дійсними та комлексними векторними просторами окремо. Причина полягає в тому, що власні значення є коренями характеристичного многочлена лінійного перетворення. Хоча многочлени завжди розкладаються на лінійні множники над комплексними числами, це не завжди може виконуватися над дійсними числами. Многочлен може взагалі не мати коренів над полем дійсних чисел.

Лема 1.13.10

Кожне власне значення самоспряженого лінійного перетворення T на комплексному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ з внутрішнім добутком $\bullet$ є дійсним.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого лінійного перетворення T і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ — ненульовий власний вектор для λ. Тоді

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}=\overline{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}).$$

Позаяк $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\neq 0$ і $\lambda=\overline{\lambda}$, то маємо, що число λ є дійсним. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі V, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.
Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu \overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu \overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ і $T(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \mu\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \mu\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mu(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ ортогональні. ■

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \mu\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet \mu\overrightarrow{v} = \mu(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{u}$ та $\overrightarrow{v}$ ортогональні.

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \mu\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \mu\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mu(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ ортогональні.

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \mu \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \mu \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mu(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ ортогональні. ■

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\vec{\boldsymbol{u}}) = \lambda\vec{\boldsymbol{u}}$ і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \mu\vec{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}) = \lambda\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mu\vec{\boldsymbol{v}} = \mu(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{u}}$ та $\vec{\boldsymbol{v}}$ ортогональні.

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\vec{\boldsymbol{u}}) = \lambda\vec{\boldsymbol{u}}$ і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \mu\vec{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}) = \lambda\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mu\vec{\boldsymbol{v}} = \mu(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{u}}$ та $\vec{\boldsymbol{v}}$ ортогональні. ∎

Лема 1.13.11

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення визначене на дійсному n-вимірному векторному просторі $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$, з внутрішнім добутком $\bullet$. Тоді

(1) характеристичний многочлен лінійного перетворення T є добутком лінійних множників;

(2) власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Доведення. Переходячи до матриці A для лінійного перетворення T, твердження (1) безпосередньо випливає з леми 1.13.10, оскільки ми можемо вважати, що матриця A визначає комплексне перетворення на $\mathbb{C}^n$ і кожен многочлен степеня n розкладається на лінійні множники над полем комплексних чисел.

Для доведення твердження (2), припустимо, що $T(\vec{\boldsymbol{u}}) = \lambda\vec{\boldsymbol{u}}$ і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \mu\vec{\boldsymbol{v}}$ для $\lambda \neq \mu$. Тоді отримуємо, що

$$\lambda(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}) = \lambda\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{u}}) \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mu\vec{\boldsymbol{v}} = \mu(\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}).$$

Оскільки $\lambda \neq \mu$, то звідси випиває, що $\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = 0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{u}}$ та $\vec{\boldsymbol{v}}$ ортогональні. ■

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору V, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі V існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) = \lambda_i \overrightarrow{u}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{v}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{u}_1 = \dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n-1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)
Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n-1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \vec{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n-1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n-1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n-1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \vec{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема 1.13.12 (про зведення дійснозначної матриці самоспряженого лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — самоспряжене лінійне перетворення n-вимірного дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доведення. Доведення теореми проведемо індукцією по n. Твердження теореми очевидне у випадку $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для виміру $n - 1$, $n > 1$. Решту доведення проведемо у два етапи.

По-перше, нам необхідно знати, що лінійне перетворення T насправді має принаймні одне дійсне власне значення λ. Це було доведено в лемі 1.13.11(1). Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий власний вектор для власного значення λ і нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{w} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T^*(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{w}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ∎

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ∎

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{w} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T^{*}(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{w}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{w} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T^{*}(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{w}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ∎

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ∎

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{v} \bullet T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet T^{*}(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{w}) \in W^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{W^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $W^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ лінійного простору $W^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ∎

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ∎

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ∎

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ∎

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle\vec{\boldsymbol{v}}\rangle = \langle\vec{\boldsymbol{u}}_1\rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \vec{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \lambda \vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \vec{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \lambda \vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \vec{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet T(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\vec{\boldsymbol{w}}) = T(\vec{\boldsymbol{v}}) \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = \lambda \vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A.

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^{*}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A.

Другий крок, щоб використати припущення індукції, полягає в тому, щоб довести, що ортогональне доповнення $\boldsymbol{W}^{\perp}$ підпростору $\boldsymbol{W} = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \rangle$ є інваріантним підпростором лінійного перетворення T дійсного векторного простору $\boldsymbol{V}$. Це випливає з того, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}^{\perp}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet T^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0,$$

а отже, $T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$. Очевидно, звуження $S = T|_{\boldsymbol{W}^{\perp}}$ є самоспряженим перетворенням $(n-1)$-вимірного векторного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$. Застосувавши припущення індукції до лінійного перетворення S, отримуємо, що існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{W}^{\perp}$, що є власними векторами для лінійного перетворення S (а отже, і для лінійного перетворення T). Очевидно, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ є шуканими, а це і завершує доведення теореми. ■

Матричною формою теореми 1.13.12 є

Теорема 1.13.13

Якщо A — дійсна симетрична $n \times n$-матриця, то існує ортогональна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна дійсна симетрична матриця подібна до діагональної.

Доведення. Побудуємо матрицю P дуже просто: стовпцями матриці P будуть вектори, які утворюють ортонормований базис з власних векторів матриці A. ■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2-A)=\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix}=(t-2)^2-1=t^2-4t+3$$

є $t_1=1$ і $t_2=3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r - s$ від'ємні елементи, а потім $n - r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r - s$ від'ємні елементи, а потім $n - r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.

У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2-A)=\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix}=(t-2)^2-1=t^2-4t+3$$

є $t_1=1$ і $t_2=3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r - s$ від'ємні елементи, а потім $n - r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r - s$ від'ємні елементи, а потім $n - r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r - s$ від'ємні елементи, а потім $n - r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2-A)=\begin{vmatrix} t-2 & 1\\ 1 & t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2-1=t^2-4t+3$$

є $t_1=1$ і $t_2=3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Зауважимо, що теорема 1.13.13 дає лише достатні умови, щоб матриця була подібною до діагональної. Несиметричні матриці також можуть бути подібними до діагональних.
У теоремі 1.13.13 кількість s додатних діагональних елементів матриці D однозначно визначається матрицею A. Ми можемо припускати, що діагональ матриці D має спочатку s додатних діагональних елементів, за якими йдуть $r-s$ від'ємні елементи, а потім $n-r$ — нулів.

Приклад 1.13.14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^2$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$$

є $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{і} \quad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\vec{v}_1 = (1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{і} \qquad \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}(1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}(3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{і} \quad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$-x + y = 0,$$
$$x - y = 0$$

і

$$x + y = 0,$$
$$x + y = 0.$$

Іншими словами, вектори $\vec{v}_1 = (1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{і} \qquad \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Іншими словами, вектори $\vec{v}_1 = (1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \qquad \text{і} \qquad \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Іншими словами, вектори $\vec{v}_1 = (1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \qquad \text{і} \qquad \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Для знаходження відповідних власних векторів, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (1 \cdot I_2 - A) = 0$$

і

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} (3 \cdot I_2 - A) = 0.$$

Це зводиться до двох пар рівнянь

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Іншими словами, вектори $\vec{v}_1 = (1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (1, -1)$ є власними векторами, які відповідають власним значенням $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$, відповідно. Нехай

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{і} \qquad \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Якщо матриця P складена з векторів $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$ як із стовпців, то

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1}=-1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Якщо матриця P складена з векторів $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$ як із стовпців, то

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1}=-1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Якщо матриця P складена з векторів $\vec{\boldsymbol{u}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{u}}_2$ як із стовпців, то

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1}=-1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Якщо матриця P складена з векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ як із стовпців, то

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1}=-1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця P складена з векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ як із стовпців, то

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1}=-1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Якщо матриця P складена з векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ як із стовпців, то

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\begin{aligned} \det(tI_3 - A) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \\ &= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) = \\ &= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 = \\ &= (t-1)^2(t-4) \end{aligned}$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) =$$
$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 =$$
$$= (t-1)^2(t-4)$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\begin{aligned} \det(tI_3 - A) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \\ &= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) = \\ &= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 = \\ &= (t-1)^2(t-4) \end{aligned}$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\begin{aligned}\det(tI_3 - A) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \\ &= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) = \\ &= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 = \\ &= (t-1)^2(t-4)\end{aligned}$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) =$$

$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 =$$

$$= (t-1)^2(t-4)$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) =$$
$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 =$$
$$= (t-1)^2(t-4)$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) =$$
$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 =$$
$$= (t-1)^2(t-4)$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Приклад 1.13.15

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) =$$
$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 =$$
$$= (t-1)^2(t-4)$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) =$$
$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 =$$
$$= (t-1)^2(t-4)$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\begin{aligned} \det(tI_3 - A) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \\ &= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) = \\ &= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 = \\ &= (t-1)^2(t-4) \end{aligned}$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Приклад 1.13.15

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ортогональну матрицю P таку, щоб $P^{-1}AP$ була діагональною матрицею.

Розв'язок. Вважатимемо, що A є матрицею лінійного перетворення T евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Тоді коренями характерного многочлена

$$\begin{aligned} \det(tI_3 - A) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \\ &= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) = \\ &= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 - 2 - 3t + 6 = \\ &= (t-1)^2(t-4) \end{aligned}$$

є $t_{1,2} = 1$ і $t_3 = 4$, які є власними значеннями лінійного перетворення T.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}(1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y-z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків X має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини X.

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Для знаходження відповідних власних векторів, які відповідають власному значенню 1, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (1 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0, \\ -x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

Множина розв'язків $\boldsymbol{X}$ має вигляд

$$\{(-y - z, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Застосувавши алгоритм Грама–Шмідта для базису $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, отримуємо ортонормований базис

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

для множини $\boldsymbol{X}$.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\overrightarrow{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\overrightarrow{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\overrightarrow{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\overrightarrow{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\overrightarrow{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Далі для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню 4, ми маємо розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (4 \cdot I_3 - A) = 0,$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0, \\ -x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(1, 1, 1)$. Нехай

$$\vec{\boldsymbol{u}}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Нарешті, якщо стовпцями матриці P є власні вектори $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$, то

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, якщо стовпцями матриці P є власні вектори $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, то

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Нарешті, якщо стовпцями матриці P є власні вектори $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, то

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Нарешті, якщо стовпцями матриці P є власні вектори $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, то

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Нарешті, якщо стовпцями матриці P є власні вектори $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, то

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Нарешті, якщо стовпцями матриці P є власні вектори $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, то

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору V, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі V існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) = \lambda_i \overrightarrow{u}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору V, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі V існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) = \lambda_i \overrightarrow{u}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору V, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі V існує ортонормований базис $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{u}_i) = \lambda_i \overrightarrow{u}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \vec{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \vec{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \vec{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Теорема про зведення до діагонального вигляду

Означення 1.13.16

Лінійне перетворення T векторного простору називається *нормальним*, якщо воно комутує зі своїм спряженим, тобто $TT^* = T^*T$.

Теорема 1.13.17 (про зведення комплеснозначної матриці нормального лінійного перетворення до діагонального вигляду)

Нехай T — нормальне лінійне перетворення n-вимірного комплексного векторного простору $\boldsymbol{V}$, $n \geqslant 1$. Тоді в просторі $\boldsymbol{V}$ існує ортонормований базис $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$, складений з власних векторів лінійного перетворення T таких, що

$$T(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \lambda_i \vec{\boldsymbol{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для деяких комплексних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Матричною формою теореми 1.13.17 є

Теорема 1.13.18

Якщо A — комплексна нормальна $n \times n$-матриця, то існує унітарна матриця P така, що $D = P^{-1}AP$ є діагональною матрицею. Зокрема, кожна комплексна нормальна матриця подібна до діагональної.

Доведення теорем 1.13.17 і 1.13.18 можна знайти в кожному академічному курсі лінійної алгебри.

Дякую за увагу!