# Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

## Лекція 23: Дуальний простір

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S + T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v});$$

$$(aS)(\overrightarrow{v}) = a \cdot (S(\overrightarrow{v})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S + T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T \colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S,T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v});$$
$$(aS)(\overrightarrow{v}) = a \cdot (S(\overrightarrow{v})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v});$$
$$(aS)(\overrightarrow{v}) = a \cdot (S(\overrightarrow{v})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v});$$

$$(aS)(\overrightarrow{v}) = a \cdot (S(\overrightarrow{v})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v});$$

$$(aS)(\overrightarrow{v}) = a \cdot (S(\overrightarrow{v})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$

$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a\cdot(S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S,T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v});$$

$$(aS)(\overrightarrow{v}) = a \cdot (S(\overrightarrow{v})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}\,.$$

Якщо $S,T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{v}) = S(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{v});$$

$$(aS)(\overrightarrow{v}) = a \cdot (S(\overrightarrow{v})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S,T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$

$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо
$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$
Якщо $S,T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення
$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$
за формулами
$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$
Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення
$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$
є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо
$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$
Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення
$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$
за формулами
$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$
Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення
$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$
є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S,T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$

$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in \mathrm{k}$, то визначимо відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$ називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S,T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a\cdot(S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

### Теорема 1.12.1

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

### Означення 1.12.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$

$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a\cdot(S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S+T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо
$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$
Якщо $S,T\in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a\in$ k, то визначимо відображення
$$S+T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$$
за формулами
$$(S+T)(\vec{\boldsymbol{v}}) = S(\vec{\boldsymbol{v}}) + T(\vec{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\vec{\boldsymbol{v}}) = a\cdot(S(\vec{\boldsymbol{v}})).$$
Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

## Теорема 1.12.1

Відображення
$$S+T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$$
є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

## Означення 1.12.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V}\to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$
$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k. Означимо

$$L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \mid T - \text{ лінійне перетворення}\}.$$

Якщо $S, T \in L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ і $a \in$ k, то визначимо відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

за формулами

$$(S+T)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}});$$

$$(aS)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = a \cdot (S(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

Безпосередньо перевіркою доводиться така теорема:

**Теорема 1.12.1**

Відображення

$$S + T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \qquad \text{і} \qquad aS\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$$

є лінійними перетвореннями, і такі операції додавання та множення на скаляр перетворюють множину $L(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ на векторний простір над полем k.

**Означення 1.12.2**

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k. Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to$ k називається *лінійним функціоналом* на $\boldsymbol{V}$. Векторний простір лінійних функціоналів на векторному просторі $\boldsymbol{V}$ називається *дуальним простором* векторного простору $\boldsymbol{V}$ і позначається $\boldsymbol{V}^*$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$.

Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*\colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\vec{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathrm{k}$$

за формулою

$$\vec{\boldsymbol{v}}_i^*(\vec{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\vec{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\vec{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\vec{\boldsymbol{v}}_1^*, \vec{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\vec{\boldsymbol{v}}_i^*(\vec{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\vec{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\vec{\boldsymbol{v}}_i$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — базис у $\boldsymbol{V}$. Означимо лінійні функціонали

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^* \colon \boldsymbol{V} \to \mathsf{k}$$

за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Доведення теореми 1.12.3 очевидне.

**Теорема 1.12.3**

Відображення з $\boldsymbol{V}$ у $\boldsymbol{V}^*$, яке ставить у відповідність базисному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*$, є ізоморфізмом лінійних просторів.

Ізоморфізм у теоремі 1.12.3 між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^*$, очевидно, залежить від базису простору $\boldsymbol{V}$.

**Означення 1.12.4**

Базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1^*, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2^*, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n^*$ називається *дуальним базисом* до базису $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ лінійного простору $\boldsymbol{V}$.

Зауважимо, якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i,$$

то $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i^*(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = a_i$, а отже, $i$-й елемент дуального базису просто виділяє $i$-у компоненту коефіцієнта розкладу вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ через базисний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

# Дуальний простір

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^* : \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**} : \vec{\boldsymbol{v}} \mapsto \vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

# Дуальний простір

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^* : \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**} : \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення
$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$
визначене за формулою
$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$
є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так
$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$
Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \vec{\boldsymbol{v}} \mapsto \vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення
$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$
визначене за формулою
$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$
є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так
$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$
Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \vec{\boldsymbol{v}} \mapsto \vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{v}) = \alpha(T(\overrightarrow{v})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{v}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{v}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{v}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

# Дуальний простір

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \vec{\boldsymbol{v}} \mapsto \vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

# Дуальний простір

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення
$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$
визначене за формулою
$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$
є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так
$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$
Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

# Дуальний простір

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \vec{\boldsymbol{v}} \mapsto \vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

# Дуальний простір

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \vec{\boldsymbol{v}} \mapsto \vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**} \in \boldsymbol{V}^{**} = (\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha) = \alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha \in \boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \vec{\boldsymbol{v}} \mapsto \vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

Доведення теореми 1.12.5 очевидне.

**Теорема 1.12.5**

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ — векторні простори над полем k і $T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ — лінійне перетворення. Відображення

$$T^*\colon \boldsymbol{W}^*\to\boldsymbol{V}^*,$$

визначене за формулою

$$T^*(\alpha)(\vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha(T(\vec{\boldsymbol{v}})), \qquad \text{для} \quad \vec{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V},$$

є лінійним перетворенням.

**Означення 1.12.6**

Відображення $T^*$, означене в теоремі 1.12.5, називається *дуальним відображенням* лінійного перетворення $T$.

Далі, для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V}$ означимо вектор $\vec{\boldsymbol{v}}^{**}\in\boldsymbol{V}^{**}=(\boldsymbol{V}^*)^*$ так

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{**}(\alpha)=\alpha(\vec{\boldsymbol{v}}), \qquad \text{для} \quad \alpha\in\boldsymbol{V}^*.$$

Наступна теорема очевидна.

**Теорема 1.12.7**

Відображення $\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}^{**}\colon \vec{\boldsymbol{v}}\mapsto\vec{\boldsymbol{v}}^{**}$ є ізоморфізмом векторних просторів.

# Дуальний простір

**Означення 1.12.8**

Відображення $V \to V^{**} : \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $V$ та його двічі дуальним $V^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $V$ і $V^*$ залежав від вибору базису лінійного простору $V$, однак ізоморфізм між лінійними простором $V$ та його другим дуальним $V^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $V$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $V$ і $V^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

# Дуальний простір

**Означення 1.12.8**

Відображення $V \to V^{**}: \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $V$ та його двічі дуальним $V^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $V$ і $V^{*}$ залежав від вибору базису лінійного простору $V$, однак ізоморфізм між лінійними простором $V$ та його другим дуальним $V^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $V$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $V$ і $V^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

**Означення 1.12.8**

Відображення $V \to V^{**}$: $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $V$ та його двічі дуальним $V^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $V$ і $V^*$ залежав від вибору базису лінійного простору $V$, однак ізоморфізм між лінійними простором $V$ та його другим дуальним $V^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $V$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $V$ і $V^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

**Означення 1.12.8**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $\boldsymbol{V}$ та його двічі дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{*}$ залежав від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$, однак ізоморфізм між лінійними простором $\boldsymbol{V}$ та його другим дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

**Означення 1.12.8**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**} \colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $\boldsymbol{V}$ та його двічі дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{*}$ залежав від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$, однак ізоморфізм між лінійними простором $\boldsymbol{V}$ та його другим дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

**Означення 1.12.8**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**} \colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $\boldsymbol{V}$ та його двічі дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{*}$ залежав від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$, однак ізоморфізм між лінійними простором $\boldsymbol{V}$ та його другим дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

**Означення 1.12.8**

Відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}\colon \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{**}$ називається *природним ізоморфізмом* між лінійним простором $\boldsymbol{V}$ та його двічі дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$.

Зауважимо, що, хоча ізоморфізм між лінійними просторами $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{*}$ залежав від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$, однак ізоморфізм між лінійними простором $\boldsymbol{V}$ та його другим дуальним $\boldsymbol{V}^{**}$ не залежить від вибору базису лінійного простору $\boldsymbol{V}$. Це дозволяє нам ототожнювати лінійні простори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V}^{**}$ природним шляхом, і дуже часто на практиці вони ототожнюються.

# Дякую за увагу!