Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 22: Власні значення та власні вектори

Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}. \qquad (1)$$

Кожен вектор $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \qquad (1)$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n\times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n\to\mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T-\lambda I\colon \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \qquad (1)$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Власні значення та власні вектори

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір над полем k і $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення.

Означення 1.11.1

Скаляр λ поля k називається *власним значенням* лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, якщо існує ненульовий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ такий, що

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{v}}. \tag{1}$$

Кожен вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$, який задовольняє рівняння (1) називається *власним вектором* для власного значення λ. Множина власних векторів для власного значення λ називається *власним підпростором* власного значення λ. Якщо A — $n \times n$-матриця над полем k, то *власні значення* та *власні вектори* матриці A є власними значеннями та власними векторами, відповідно, лінійного перетворення $T\colon \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}^n$ пов'язаного з матрицею A.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.11.2

Власний підпростір власного значення λ лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ є ядром лінійного перетворення $T - \lambda I\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, а отже є підпростором векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon V \to V$ векторного простору V, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору V будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon V \to V$ векторного простору V є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір V має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення векторного простору V. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на $\Bbbk^n$ є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на $\Bbbk^n$ є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon V \to V$ векторного простору V є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір V має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення векторного простору V. Якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon V \to V$ векторного простору V є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір V має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення векторного простору V. Якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на $\Bbbk^n$ є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на $\Bbbk^n$ є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на $\Bbbk^n$ є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на $\Bbbk^n$ є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні.

Означення 1.11.3

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$, яке можна зобразити діагональною матрицею стосовно деякого базису простору $\boldsymbol{V}$ будемо називати *діагоналізованим*, або *зведеним до діагонального вигляду*, або просто *діагоналізовним*. $n \times n$-матриця називається *діагоналізовною*, якщо відповідне її лінійне перетворення на k^n є діагоналізовне.

Очевидно, що справджується така теорема:

Теорема 1.11.4

Лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ є діагоналізовним тоді і лише тоді, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ має базис з власних векторів перетворення T. Тоді діагональні елементи матриці стосовно базису, який діагоналізує перетворення T, є його власними значеннями.

Теорема 1.11.5

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ — ненульові власні вектори перетворення T, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні.

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m=1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{v}_1) + a_2 T(\overrightarrow{v}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{v}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{v}_m = -(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{v}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ виконується рівність

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m\overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= T(\overrightarrow{0}) = T(a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m\overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{v}_1) + a_2 T(\overrightarrow{v}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1\lambda_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\lambda_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m\lambda_m\overrightarrow{v}_m.\end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m\overrightarrow{v}_m = -(a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}\overrightarrow{v}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= a_1\lambda_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\lambda_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}\lambda_{m-1}\overrightarrow{v}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m(a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}\overrightarrow{v}_{m-1}) = \\ &= a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\overrightarrow{v}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_m)\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\overrightarrow{v}_{m-1}\end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m=1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= T(\overrightarrow{0}) = T(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{v}_1) + a_2 T(\overrightarrow{v}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{v}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{v}_m = -(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{v}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m=1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}, \qquad (2)$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= T(\overrightarrow{0}) = T(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{v}_1) + a_2 T(\overrightarrow{v}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{v}_m) = \qquad (3) \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{v}_m. \end{aligned}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{v}_m = -(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{v}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m - 1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}} = T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) &= T(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{v}_1) + a_2 T(\overrightarrow{v}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{v}_m.\end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{v}_m = -(a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{v}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{v}_{m-1}\end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ виконується рівність

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m\overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \Bbbk$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} = T(\overrightarrow{0}) &= T(a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m\overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1T(\overrightarrow{v}_1) + a_2T(\overrightarrow{v}_2) + \cdots + a_mT(\overrightarrow{v}_m) = \\ &= a_1\lambda_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\lambda_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m\lambda_m\overrightarrow{v}_m.\end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m\overrightarrow{v}_m = -(a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}\overrightarrow{v}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= a_1\lambda_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\lambda_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}\lambda_{m-1}\overrightarrow{v}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m(a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}\overrightarrow{v}_{m-1}) = \\ &= a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\overrightarrow{v}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_m)\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\overrightarrow{v}_{m-1}\end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m=1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m.\end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}\end{aligned}$$

Власні значення та власні вектори

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \Bbbk$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \Bbbk$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m=1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \Bbbk$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathrm{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Власні значення та власні вектори

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m = 1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m - 1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{0}} &= T(\vec{\mathbf{0}}) = T(a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\vec{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\vec{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\vec{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \vec{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо теорему індукцією по m. Випадок $m=1$ очевидний. Доведемо, що з того, що твердження теореми правильне для $m-1$ випливає, що воно вірне і для m. Припустимо, що для m власних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ виконується рівність

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathsf{k}$. Подіявши перетворенням на обидві частини рівності (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= T(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = T(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1) + a_2 T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2) + \cdots + a_m T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m) = \\ &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \lambda_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m. \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (2) маємо, що

$$a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = -(a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1})$$

і підставивши це значення у рівність (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{0}} &= a_1 \lambda_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \lambda_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} - \\ &\quad - \lambda_m (a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}) = \\ &= a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1} \end{aligned}$$

Власні значення та власні вектори

За припущенням індукції вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \dots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \dots + a_m \overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \qquad (2)$$

випливає, що $a_m=0$, а отже вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.
Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

Власні значення та власні вектори

За припущенням індукції вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_m \vec{v}_m = \vec{0}, \qquad (2)$$

випливає, що $a_m=0$, а отже вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_m \vec{v}_m = \vec{0}, \qquad (2)$$

випливає, що $a_m = 0$, а отже вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.
Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \dots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m=0$, а отже вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_m \vec{v}_m = \vec{0}, \qquad (2)$$

випливає, що a_m=0, а отже вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m{=}0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = \vec{\mathbf{0}}, \qquad (2)$$

випливає, що $a_m=0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ∎

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.
Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m=0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ∎

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

Власні значення та власні вектори

За припущенням індукції вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m=0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T \colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T \colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_m \vec{v}_m = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m{=}0$, а отже вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_m \vec{v}_m = \vec{0}, \qquad (2)$$

випливає, що $a_m{=}0$, а отже вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай V — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon V \to V$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon V \to V$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m{=}0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \qquad (2)$$

випливає, що $a_m{=}0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

Власні значення та власні вектори

За припущенням індукції вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m = \overrightarrow{\mathbf{0}}, \qquad (2)$$

випливає, що $a_m{=}0$, а отже вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = \vec{\boldsymbol{0}}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m = 0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.

Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

За припущенням індукції вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{m-1}$ лінійно незалежні, а, отже,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0,$$

оскільки жоден з виразів $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$ не дорівнює нулю. Звідси та рівності (2)

$$a_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + a_m \vec{\boldsymbol{v}}_m = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

випливає, що $a_m=0$, а отже вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$ лінійно незалежні. ■

Наслідок 1.11.6

Нехай $\boldsymbol{V}$ — n-вимірний векторний простір. Якщо лінійне перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ має різні власні значення, то воно є діагоналізовним.

З теореми 1.11.4 випливає, що знаходження власних значень та власних векторів лінійного перетворення є важливою задачею для діагоналізації лінійних перетворень.
Справджується така теорема:

Теорема 1.11.7

Скаляр λ є власним значенням лінійного перетворення $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ тоді і тільки тоді, коли перетворення $T - \lambda I$ вироджене.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення векторного простору V і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в V, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення векторного простору V. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в V, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Власні значення та власні вектори

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Означення 1.11.8

Нехай A — $n \times n$-матриця. Многочлен

$$\det(\lambda I_n - A), \tag{4}$$

де I_n — одинична $n \times n$-матриця, називається *характеристичним многочленом* матриці A. Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$ і A — матриця, що його зображає стосовно деякого базису в $\boldsymbol{V}$, то характеристичний многочлен матриці A називається *характеристичним многочленом* лінійного перетворення T.

З теореми 1.10.12 та властивостей визначника матриці випливає

Лема 1.11.9

Характеристичний многочлен лінійного перетворення коректно визначений і він не залежить від матриці, яка вибрана для його зображення.

З теореми 1.11.7 і теореми 1.10.3(10) випливає

Теорема 1.11.10

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Скаляр λ є власним значенням перетворення T тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена лінійного перетворення T.

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1+\lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1+\lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1+\lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$(1 - \lambda)x + y = 0,$$
$$3x - (1 + \lambda)y = 0.$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$(1 - \lambda)x + y = 0,$$
$$3x - (1 + \lambda)y = 0.$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$(1 - \lambda)x + y = 0,$$
$$3x - (1 + \lambda)y = 0.$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$(1 - \lambda)x + y = 0,$$
$$3x - (1 + \lambda)y = 0.$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$(1 - \lambda)x + y = 0,$$
$$3x - (1 + \lambda)y = 0.$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1+\lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$(1 - \lambda)x + y = 0,$$
$$3x - (1 + \lambda)y = 0.$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.11.11

Проаналізувати лінійне перетворення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в термінах власних значень, власних векторів і власних просторів.

Розв'язок. Нам необхідно розв'язати рівняння

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 1 & \lambda - (-1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

стосовно змінної λ. Розв'язками цього рівняння є $\lambda = 2$ і $\lambda = -2$, які є власними значеннями лінійного перетворення T. Далі, для знаходження власних векторів, нам потрібно розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

тобто систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ 3x - (1 + \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Власні значення та власні вектори

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ◼

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему
$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$
розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему
$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$
розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Власні значення та власні вектори

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Власні значення та власні вектори

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему
$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$
розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему
$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$
розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення.

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1,1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1,-3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Власні значення та власні вектори

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему
$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ 3x - 3y &= 0, \end{aligned}$$
розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему
$$\begin{aligned} 3x + y &= 0, \\ 3x + y &= 0, \end{aligned}$$
розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Якщо $\lambda = 2$, то маємо систему

$$-x + y = 0,$$
$$3x - 3y = 0,$$

розв'язками якої є $x = y$. Іншими словами, вектор $(1, 1)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. Аналогічно, у випадку $\lambda = -2$ маємо систему

$$3x + y = 0,$$
$$3x + y = 0,$$

розв'язками якої є $-3x = y$. Отже, вектор $(1, -3)$ є власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda = -2$, є і базисом власного підпростору для цього власного значення. ■

Ми можемо використати теорему 1.11.10, щоб показати, що не кожне лінійне перетворення векторного простору над полем дійсних чисел є діагоналізовним (зводиться до діагонального вигляду). Наприклад, розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^2$, яке зображається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом цієї матриці є $\lambda^2 + 1$, який, очевидно, немає дійсних коренів. Звичайно, над комплексними числами кожен поліном має корінь, а отже, лінійні перетворення над комплексними векторними просторами завжди мають власні значення та власні вектори.

Власні значення та власні вектори

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A))\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$

є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)

$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$

Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Власні значення та власні вектори

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\mathrm{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}(A))\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \qquad (4)$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Власні значення та власні вектори

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Власні значення та власні вектори

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Власні значення та власні вектори

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Власні значення та власні вектори

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Власні значення та власні вектори

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \qquad (4)$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$

є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)

$$\det(\lambda I_n - A). \qquad (4)$$

Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$

є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)

$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$

Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$

є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)

$$\det(\lambda I_n - A). \qquad (4)$$

Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)

$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$

Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ◻

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ∎

Наступне твердження перелічує дві властивості характеристичного многочлена, які іноді стають у нагоді, особливо у двовимірному випадку, коли вони повністю характеризують характеристичний многочлен.

Твердження 1.11.12

Нехай $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матриця і
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
— її характеристичний многочлен. Тоді:

(1) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;

(2) $a_0 = (-1)^n \det(A)$;

(3) якщо $n = 2$, то
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)).$$

Доведення. Використовуючи властивості визначника, легко переконатися, що
$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$$
є многочленом від змінної λ степеня n. З цієї рівності та означення сліду матриці випливає рівність (1). Щоб довести рівність (2), просто підставимо 0 замість λ у формулу (4)
$$\det(\lambda I_n - A). \tag{4}$$
Твердження (3) безпосередньо випливає з тверджень (1) і (2). ■

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення векторного простору V. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійне перетворення векторного простору V. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Ось фундаментальна теорема про діагоналізацію перетворень.

Теорема 1.11.13

Нехай $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ — лінійне перетворення векторного простору $\boldsymbol{V}$. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — різні власні значення лінійного перетворення T і $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — виміри відповідних власних підпросторів. Нехай $p(\lambda)$ — характеристичний многочлен перетворення T. Тоді лінійне перетворення T діагоналізовне тоді і лише тоді, коли

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{d_m}.$$

Доведення теореми 1.11.13 безпосередньо випливає з теорем 1.11.4 і 1.11.10.

Дякую за увагу!