Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 20: Опуклі множини

Опуклі множини

Означення 1.9.1

Підмножина X у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $p, q \in X$ відрізок $[p, q]$ повністю міститься в X, а в протилежному випадку множина X називається *неопуклою*.

Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. (a) і (b), відповідно.

(a)

(b)

Означення 1.9.1

Підмножина X у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $p, q \in X$ відрізок $[p, q]$ повністю міститься в X, а в протилежному випадку множина X називається *неопуклою*.

Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. (a) і (b), відповідно.

(a)

(b)

Означення 1.9.1

Підмножина $\boldsymbol{X}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{X}$ відрізок $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ повністю міститься в $\boldsymbol{X}$, а в протилежному випадку множина $\boldsymbol{X}$ називається *неопуклою*.

Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. (a) і (b), відповідно.

(a)

(b)

Означення 1.9.1

Підмножина $\boldsymbol{X}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{X}$ відрізок $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ повністю міститься в $\boldsymbol{X}$, а в протилежному випадку множина $\boldsymbol{X}$ називається *неопуклою*.

Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. (a) і (b), відповідно.

(a) (b)

Означення 1.9.1

Підмножина $\boldsymbol{X}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{X}$ відрізок $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ повністю міститься в $\boldsymbol{X}$, а в протилежному випадку множина $\boldsymbol{X}$ називається *неопуклою*.

Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. (a) і (b), відповідно.

(a)

(b)

Опуклі множини

Означення 1.9.1

Підмножина $\boldsymbol{X}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{X}$ відрізок $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ повністю міститься в $\boldsymbol{X}$, а в протилежному випадку множина $\boldsymbol{X}$ називається *неопуклою*.

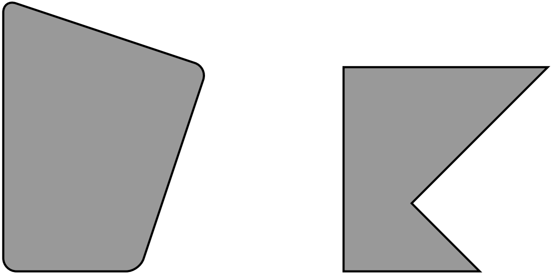
Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. (a) і (b), відповідно.

(a) (b)

Означення 1.9.1

Підмножина $\boldsymbol{X}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо для довільної пари точок $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{X}$ відрізок $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ повністю міститься в $\boldsymbol{X}$, а в протилежному випадку множина $\boldsymbol{X}$ називається *неопуклою*.

Приклади опуклих та неопуклих множин у 2-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ наведені на рис. (a) і (b), відповідно.



(a) (b)

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(*i*) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(*ii*) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(*iii*) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.
Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

- (i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.
- (ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.
- (iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.
Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

- (i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.
- (ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.
- (iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap\{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C : C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.
Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини X у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(X)$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C \colon C - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } X \subseteq C\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(*i*) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(*ii*) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(*iii*) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.
Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.
Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.
Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

Опуклі множини

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожня множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

У наступному твердженні перелічено деякі основні факти про опуклі множини.

Твердження 1.9.2

(i) Порожна множина та $\mathbb{R}^n$ опуклі множини.

(ii) Кожна півплощина в $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

(iii) Перетин довільної кількості опуклих множин у $\mathbb{R}^n$ опукла множина.

Висловлення (i) очевидне, а доведення висловлень (ii) і (iii) ми залишаємо слухачам.

Оскільки опуклі множини мають багато хороших властивостей, то було б зручно ввести поняття найменшої опуклої множини, що містить дану множину.

Означення 1.9.3

Нехай $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Опукла оболонка*, або *опукле замикання*, множини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, позначається через $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$, визначається так:

$$\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{C} \colon \boldsymbol{C} - \text{ опукла в } \mathbb{R}^n \text{ і } \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{C}\}.$$

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають “найменшою” такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Опуклі множини

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Опуклі множини

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Опуклі множини

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

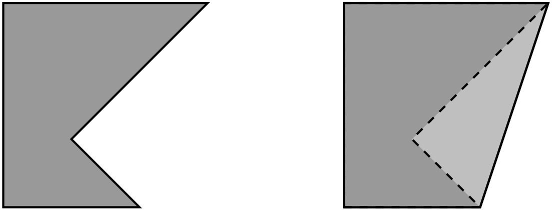
Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Опуклі множини

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)

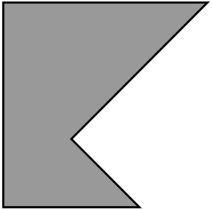


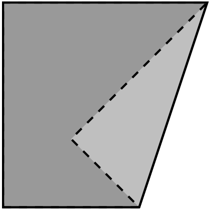
Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)



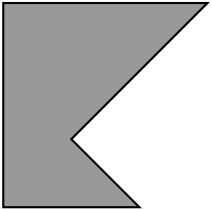


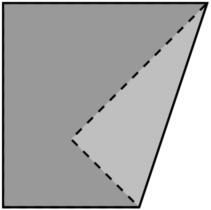
Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням 1.9.2(iii) опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)



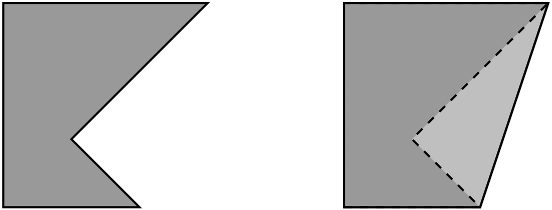


Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення опуклої оболонки подібне до означення афінної оболонки множини. Це підтверджують такі два факти. По-перше, оскільки кожен n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклий, то ми ніколи не отримуємо порожнього перетину. По-друге, за твердженням $1.9.2(iii)$ опуклі оболонки насправді є опуклими множинами. Також, легко побачити, що $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій опуклій множині, яка містить $\boldsymbol{X}$, і саме тому її називають "найменшою" такою множиною (див. рис.)



Твердження 1.9.4

Якщо $\boldsymbol{X}$ — опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення твердження 1.9.4 залишаємо слухачеві як вправу.

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін “обмежений” означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

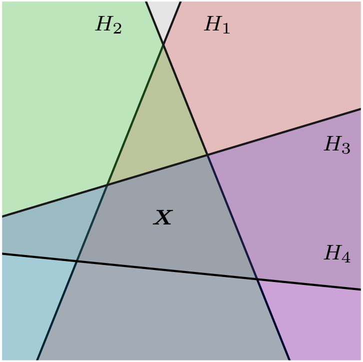
Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).

Означення 1.9.5

Обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка є перетином скінченної кількості півплощин називається *опуклим лінійним многогранником*.

Термін "обмежений" означає, що множина міститься в якомусь замкненому диску фіксованого радіуса з центром в початку координат. Наприклад, ми не хочемо називати сам n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ опуклим лінійним многогранником. Опуклий лінійний многогранник — це окремий випадок лінійного многогранника, який буде визначено пізніше. Виглядає природно давати тут означення для того, щоб показати, що перетин напівплощин утворює багато цікавих і досить загальних множин, і одночасно доводить, що ці множини опуклі (див. рис.).



Опуклі множини

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка σ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $v_0, v_1, \ldots, v_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\sigma = v_0 v_1 \cdots v_k$. Точки $v_0, v_1, \ldots, v_k$ називаються *вершинами k-симплекса σ*. Часто пишуть σ^k, щоб підкреслити вимір симплекса σ. Якщо вимір симплекса σ неважливий, то σ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{w_0, w_1, \ldots, w_j\} \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, то симплекс $\tau = w_0 w_1 \cdots w_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса σ, і ми в цьому випадку писатимемо $\tau \prec \sigma$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка σ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $v_0, v_1, \ldots, v_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\sigma = v_0 v_1 \cdots v_k$. Точки $v_0, v_1, \ldots, v_k$ називаються *вершинами k-симплекса σ*. Часто пишуть σ^k, щоб підкреслити вимір симплекса σ. Якщо вимір симплекса σ неважливий, то σ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{w_0, w_1, \ldots, w_j\} \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, то симплекс $\tau = w_0 w_1 \cdots w_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса σ, і ми в цьому випадку писатимемо $\tau \prec \sigma$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна “k-вимірний симплекс” є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0 \boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0 \boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна "k-вимірний симплекс" є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна “k-вимірний симплекс” є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна “k-вимірний симплекс” є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1\cdots\boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна “k-вимірний симплекс” є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна “k-вимірний симплекс” є виправданим.

Деякі опуклі лінійні многогранники особливо цікаві.

Означення 1.9.6

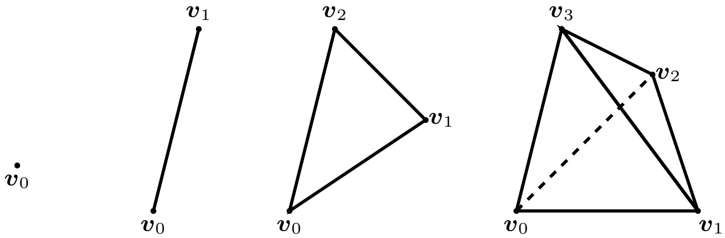
Нехай $k \geqslant 0$. *k-вимірним симплексом*, або просто *k-симплексом*, називається опукла оболонка $\boldsymbol{\sigma}$ $(k+1)$-ї лінійно незалежного набору точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми записуватимемо це так $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$. Точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ називаються *вершинами k-симплекса* $\boldsymbol{\sigma}$. Часто пишуть $\boldsymbol{\sigma}^k$, щоб підкреслити вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$. Якщо вимір симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ неважливий, то $\boldsymbol{\sigma}$ буде називатися просто *симплексом*. Якщо виконується включення $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, то симплекс $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_j$ називається *j-вимірною гранню* симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, і ми в цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\sigma}$.

На рис. наведено декілька прикладів симплексів і показано, що наше вживання терміна “k-вимірний симплекс” є виправданим.

$\sigma^0 = v_0$ $\sigma^1 = v_0v_1$ $\sigma^2 = v_0v_1v_2$ $\sigma^3 = v_0v_1v_2v_3$

$\sigma^0 = v_0$ — точка
$\sigma^1 = v_0v_1$ — відрізок від точки v_0 до точки v_1
$\sigma^2 = v_0v_1v_2$ — повністю весь трикутник
$\sigma^3 = v_0v_1v_2v_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n + 1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $v_0v_1 = v_1v_0$.

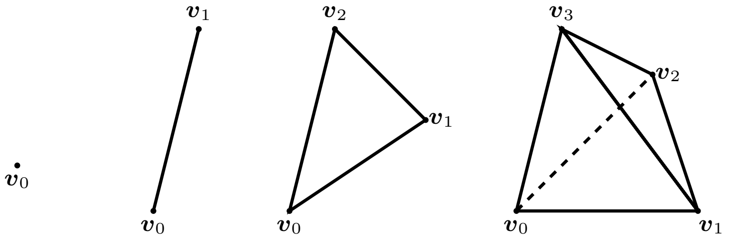


$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ $\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ $\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$

$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ — точка
$\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ — відрізок від точки $\boldsymbol{v}_0$ до точки $\boldsymbol{v}_1$
$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ — повністю весь трикутник
$\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n+1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$.

Опуклі множини

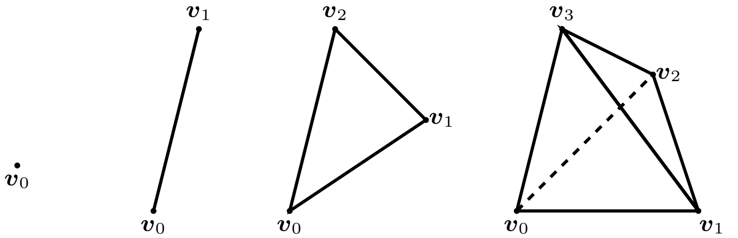


$\sigma^0 = v_0$ $\quad$ $\sigma^1 = v_0 v_1$ $\quad$ $\sigma^2 = v_0 v_1 v_2$ $\quad$ $\sigma^3 = v_0 v_1 v_2 v_3$

$\sigma^0 = v_0$ — точка
$\sigma^1 = v_0 v_1$ — відрізок від точки v_0 до точки v_1
$\sigma^2 = v_0 v_1 v_2$ — повністю весь трикутник
$\sigma^3 = v_0 v_1 v_2 v_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n + 1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $v_0 v_1 = v_1 v_0$.

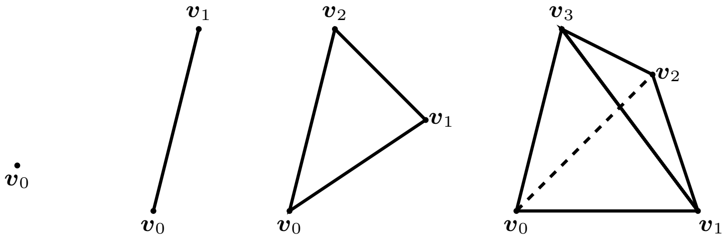
Опуклі множини



$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$

$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ — точка
$\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ — відрізок від точки $\boldsymbol{v}_0$ до точки $\boldsymbol{v}_1$
$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ — повністю весь трикутник
$\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ — повністю весь тетраедр

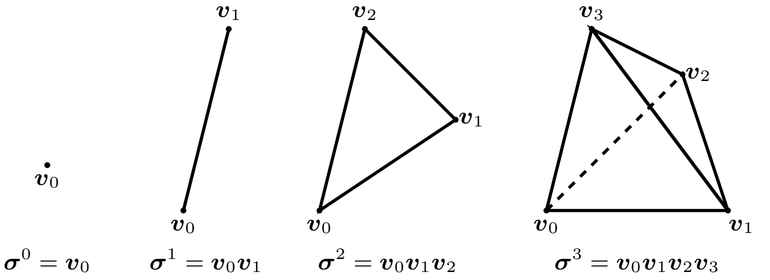
Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n + 1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$.



$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$

$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ — точка
$\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ — відрізок від точки $\boldsymbol{v}_0$ до точки $\boldsymbol{v}_1$
$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ — повністю весь трикутник
$\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n + 1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$.



$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ — точка

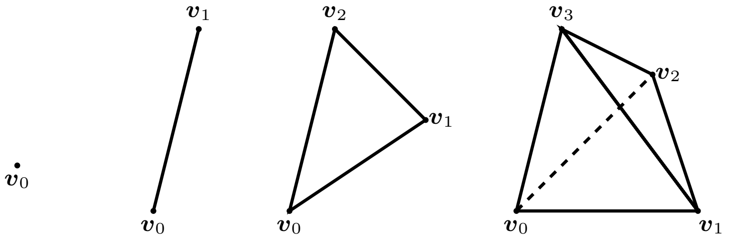
$\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ — відрізок від точки $\boldsymbol{v}_0$ до точки $\boldsymbol{v}_1$

$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ — повністю весь трикутник

$\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n+1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$.

Опуклі множини



$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$

$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ — точка

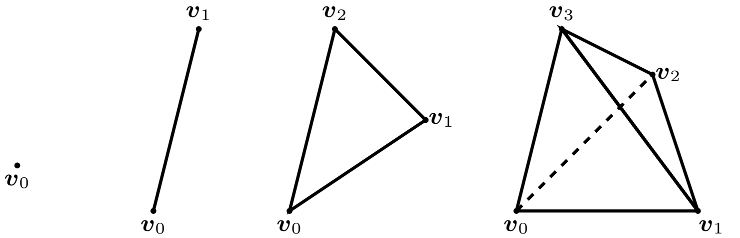
$\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ — відрізок від точки $\boldsymbol{v}_0$ до точки $\boldsymbol{v}_1$

$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ — повністю весь трикутник

$\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n + 1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$.

Опуклі множини



$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$

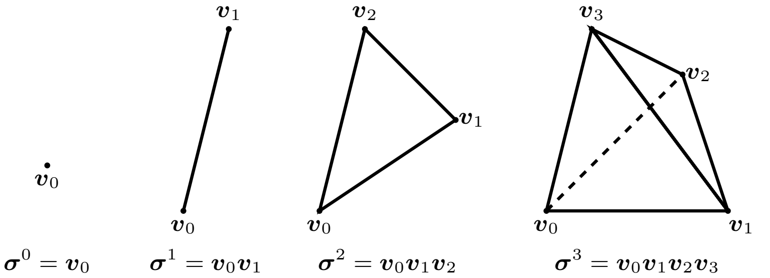
$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ — точка

$\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ — відрізок від точки $\boldsymbol{v}_0$ до точки $\boldsymbol{v}_1$

$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ — повністю весь трикутник

$\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n + 1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$.



$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{v}_0$ — точка

$\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1$ — відрізок від точки $\boldsymbol{v}_0$ до точки $\boldsymbol{v}_1$

$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ — повністю весь трикутник

$\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ — повністю весь тетраедр

Зверніть увагу на те, що 2-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ не містить жодного тривимірного симплексу. У загальному випадку, n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ не містить більших за n-вимірні симплекси, оскільки неможливо знайти j лінійно незалежних точок у $\mathbb{R}^n$ при $j > n + 1$. Крім того, симплекс залежить лише від множини вершин, а не від їхнього порядку запису. Наприклад, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0$.

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(i) Множина $\operatorname{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складається з точок x, які можна записати у вигляді

(ii) Множина $\operatorname{conv}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складається з точок x, які можна записати у вигляді

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(i) Множина $\operatorname{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складається з точок x, які можна записати у вигляді

(ii) Множина $\operatorname{conv}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складається з точок x, які можна записати у вигляді

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(i) Множина $\mathrm{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ [illegible] записати у вигляді

(ii) Множина $\mathrm{conv}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ [illegible] записати у вигляді

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(i) Множина $\operatorname{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складається з точок x, які можна записати у вигляді:

(ii) Множина $\operatorname{conv}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складається з точок x, які можна записати у вигляді:

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(i) Множина $\operatorname{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складаються з точок w, які можна записати у вигляді

(ii) Множина $\operatorname{conv}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складаються з точок w, які можна записати у вигляді

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(*i*) Множина $\operatorname{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складаються з точок w, які можна записати у вигляді

(*ii*) Множина $\operatorname{conv}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$ складаються з точок w, які можна записати у вигляді

Опуклі множини

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(*i*) Множина $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1. \tag{1}$$

(*ii*) Множина $\operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0, 1] \text{ і } \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Опуклі множини

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(i) Множина $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1. \tag{1}$$

(ii) Множина $\operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \text{ і } \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(*i*) Множина $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1. \tag{1}$$

(*ii*) Множина $\operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \text{ і } \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(i) Множина $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1. \tag{1}$$

(ii) Множина $\operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \text{ і } \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

k-симплекси — це найпростіший вид будівельних блоків для лінійних просторів, що називаються *симпліциальними комплексами*, які будуть визначені пізніше, і вони відіграють важливу роль в алгебраїчній топології. Вони мають технічні переваги перед іншими фігурами регулярної форми, зокрема такими як куби. Зокрема, їх точки мають гарне зображення, як ми це незабаром доведемо в теоремі 1.9.9.

Лема 1.9.7

(*i*) Множина $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1. \tag{1}$$

(*ii*) Множина $\operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ складаються з точок $\boldsymbol{w}$, які можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \text{ і } \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$S = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Опуклі множини

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \dots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \dots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \dots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Опуклі множини

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$S = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i v_i : \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка w належить множині $\operatorname{aff}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$w = v_0 + t_1 v_0 v_1 + \cdots + t_k v_0 v_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$w = (1 - t_1 - \ldots - t_k) v_0 + t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k,$$

звідки випливає, що точка w належить множині S. Навпаки, якщо точка w належить множині S, то

$$w = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$w = v_0 + a_1 v_0 v_1 + \cdots + a_k v_0 v_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$S = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Доведення. Для доведення твердження (i) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$, то за теоремою 1.6.8 відомо, що

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

для деяких $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = (1 - t_1 - \ldots - t_k)\boldsymbol{v}_0 + t_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_k \boldsymbol{v}_k,$$

звідки випливає, що точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$. Навпаки, якщо точка $\boldsymbol{w}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, то

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де числа} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \quad \text{такі, що} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Цю рівність можне переписати у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_0 + a_1 \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_k,$$

а це доводить висловлення (i).

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S}=\Big\{\sum_{i=0}^{k}a_i\boldsymbol{v}_i:\quad a_0,a_1,\ldots,a_k\in[0,1]\quad \text{i}\quad \sum_{i=0}^{k}a_i=1\Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w}=\sum_{i=0}^{k}a_i\boldsymbol{v}_i \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{w}'=\sum_{i=0}^{k}b_i\boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t\in[0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p}=t\boldsymbol{w}+(1-t)\boldsymbol{w}'=t\cdot\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\boldsymbol{v}_i\right)+(1-t)\cdot\left(\sum_{i=0}^{k}b_i\boldsymbol{v}_i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\left(ta_i+(1-t)b_i\right)\boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0\leqslant ta_i+(1-t)b_i$ для всіх $i=0,1,\ldots,k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k}(ta_i+(1-t)b_i)=t\cdot\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)+(1-t)\left(\sum_{i=0}^{k}b_i\right)=t\cdot 1+(1-t)\cdot 1=1$$

Це також доводить, що $ta_i+(1-t)b_i\leqslant 1$ для всіх $i=0,1,\ldots,k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i\right) \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Опуклі множини

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (ta_i + (1-t)b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant ta_i + (1-t)b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (ta_i + (1-t)b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $ta_i + (1-t)b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Опуклі множини

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i .$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо
$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$
Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$
в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді
$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i.$$
Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,
$$\sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$
Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i .$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i .$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i)\, \boldsymbol{v}_i .$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \colon \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i.$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Для доведення твердження (ii) покладемо

$$\boldsymbol{S} = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \Big\}.$$

Нам треба довести, що $\boldsymbol{S}$ є найменша опукла множина, яка містить множину точок $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{S}$ — опукла множина. Розглянемо дві точки

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{w}' = \sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i$$

в $\boldsymbol{S}$ і нехай $t \in [0,1]$. Тоді

$$\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{w} + (1-t)\boldsymbol{w}' = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(t a_i + (1-t) b_i \right) \boldsymbol{v}_i .$$

Очевидно, що $0 \leqslant t a_i + (1-t) b_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Крім того,

$$\sum_{i=0}^{k} (t a_i + (1-t) b_i) = t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \right) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

Це також доводить, що $t a_i + (1-t) b_i \leqslant 1$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, k$. Отже, точка $\boldsymbol{p}$ належить множині $\boldsymbol{S}$, звідки випливає опуклість множини $\boldsymbol{S}$, оскільки $\boldsymbol{p}$ є типовою точкою на відрізку від точки $\boldsymbol{w}$ до точки $\boldsymbol{w}'$.

Опуклі множини

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині S. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині S. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині S. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині S. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Опуклі множини

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Опуклі множини

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i\right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Далі ми покажемо, що множина $\boldsymbol{S}$ належить кожній опуклій множині $\boldsymbol{C}$, яка містить точки $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Випадок $k = 0$ є тривіальним. Припустимо, що $k \geqslant 1$ і, що твердження доведено для всіх значень, менших за k. Нехай точка

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$$

належить множині $\boldsymbol{S}$. Оскільки не всі a_i дорівнюють нулю, то не втрачаючи загальності можемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Випадок $a_0 = 1$ тривіальний, а тому припустимо, що $a_0 < 1$. Отож, ми можемо записати

$$\boldsymbol{w} = a_0 \boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i \right).$$

Однак,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} = \frac{1}{1 - a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{1 - a_0} \cdot (1 - a_0) = 1$$

і $0 \leqslant \dfrac{a_i}{1 - a_0} \leqslant 1$. За припущенням індукції точка

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1 - a_0} \boldsymbol{v}_i$$

належить кожній опуклій множині, яка містить точки $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Зокрема точка $\boldsymbol{u}$ належить множині $\boldsymbol{C}$.

Позаяк точка v_0 належить множині C, то точка

$$w = a_0 v_0 + (1 - a_0) u$$

також належить множині C. Отож,

$$S = \mathrm{conv}(\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii).

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $v_0, v_1, \ldots, v_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$w = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i v_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $v_0, v_1, \ldots, v_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $v_0, v_1, \ldots, v_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii). ∎

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0, 1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii). ∎

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii).

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii).

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii).

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0, 1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0, 1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Опуклі множини

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ∎

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка

$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$

також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,

$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$

що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$

замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$

і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Позаяк точка $\boldsymbol{v}_0$ належить множині $\boldsymbol{C}$, то точка
$$\boldsymbol{w} = a_0\boldsymbol{v}_0 + (1 - a_0)\boldsymbol{u}$$
також належить множині $\boldsymbol{C}$. Отож,
$$\boldsymbol{S} = \operatorname{conv}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}),$$
що і завершує доведення висловлення (ii). ■

Цікавим наслідком леми 1.9.7(i) є те, що вона дає нам однорідний спосіб визначення площини. Ми могли б визначити k-вимірну площину як множину, визначену $(k+1)$ лінійно незалежною точкою $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, які задовольняють рівняння (1)
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \tag{1}$$
замість того означення, яке ми формулювали раніше, що стосується точки та базису.

Лема 1.9.7(ii) мотивує таке означення.

Означення 1.9.8

Вираз вигляду
$$\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,$$
і де $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — довільні об'єкти, для яких вираз має сенс, називається *опуклою комбінацією* цих об'єктів $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\sigma = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\ldots\boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\sigma = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a'_i \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\sigma = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Опуклі множини

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\sigma = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в *(i)* та *(ii)*. Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a'_i \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Теорема 1.9.9

Нехай $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ — $(k+1)$ лінійно незалежна точка. Тоді:

(i) кожну точку $\boldsymbol{w} \in \operatorname{aff}(\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

(ii) кожну точку $\boldsymbol{w}$ симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ можна записати єдиним чином у вигляді

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i, \quad \text{де} \quad a_i \in [0,1] \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

Доведення. Лема 1.9.7 стверджує, що кожна точка $\boldsymbol{w}$ має зображення, як показано в (i) та (ii). Потрібно показати, що це зображення єдине. Припустимо, що ми маємо два зображення точки $\boldsymbol{w}$ вигляду

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i.$$

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу. ■

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу. ■

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} &= \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i = \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 = \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).
\end{aligned}
$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$
\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.
$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} &= \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).\end{aligned}$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} &= \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right)\left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right)\left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right)\left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).\end{aligned}$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу.

Тоді

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \boldsymbol{v}_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_i - a_i'\right) \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\right).$$

Передостання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i=0}^{k} \left(a_i - a_i'\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i' = 1 - 1 = 0.$$

Але ж вектори $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ є лінійно незалежними, а отже, $a_1 = a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_k = a_k'$, що також означає, що $a_0 = a_0'$. Це доводить, що зображення для точки $\boldsymbol{w}$ єдине.

Іншу частину (ii) залишаємо читачеві як вправу. ■

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ■

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4, 0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3, 5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1, 0) + a_1(4, 0) + a_2(3, 3) = (3, 1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ∎

Опуклі множини

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ∎

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ∎

Опуклі множини

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *баріцентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ∎

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *баріцентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ■

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4, 0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3, 5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1, 0) + a_1(4, 0) + a_2(3, 3) = (3, 1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ∎

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4, 0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3, 5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1, 0) + a_1(4, 0) + a_2(3, 3) = (3, 1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ■

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4, 0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3, 5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1, 0) + a_1(4, 0) + a_2(3, 3) = (3, 1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ◻

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4,0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3,5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3,1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1,0) + a_1(4,0) + a_2(3,3) = (3,1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \dots, a_k$ називатимемо *баріцентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4, 0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3, 5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1, 0) + a_1(4, 0) + a_2(3, 3) = (3, 1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Означення 1.9.10

Використовуючи позначення в теоремі 1.9.9(i), числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ називатимемо *барицентричними координатами* точки $\boldsymbol{w}$ стосовно точок $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Точка

$$\frac{1}{k+1}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k)$$

називається *барицентром* симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$.

Приклад 1.9.11

Нехай $\boldsymbol{v}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (4, 0)$ $\boldsymbol{v}_2 = (3, 5)$. Ми хочемо знайти барицентричні координати (a_0, a_1, a_2) точки $\boldsymbol{w} = (3, 1)$ стосовно цих вершин.

Розв'язок. Ми повинні розв'язати рівняння

$$a_0(1, 0) + a_1(4, 0) + a_2(3, 3) = (3, 1)$$

для a_0, a_1 та a_2. Оскільки $a_2 = 1 - a_0 - a_1$, то нам насправді доведеться розв'язувати лише два рівняння з двома невідомими. Єдиним розв'язком системи цих є $a_0 = \dfrac{4}{15}$, $a_1 = \dfrac{8}{15}$ та $a_2 = \dfrac{1}{5}$. Барицентром симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ є точка $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. ■

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Опуклі множини

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка w в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\sigma = v_0 v_1 \cdots v_k$ і точку w в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки w. Нехай Δ — об'єм симплекса σ, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_k$ (див. рис.).

Опуклі множини

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

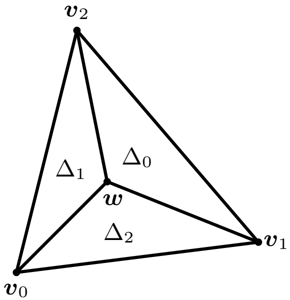
$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).

Теорема 1.9.9 стверджує, що барицентричні координати є ще одним способом параметризації точок, і саме тому використовується така термінологія. Вони є свого роду зваженою сумою та дуже корисні в задачах, що стосуються опуклих множин. У барицентричних координатах точка $\boldsymbol{w}$ в означенні буде представлена впорядкованим набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Барицентр мав би зображення

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Барицентричні координати дають інформацію про співвідношення об'ємів (або площ у вимірі 2). Розглянемо симплекс $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і точку $\boldsymbol{w}$ в ньому. Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ — барицентричні координати точки $\boldsymbol{w}$. Нехай Δ — об'єм симплекса $\boldsymbol{\sigma}$, а Δ_i — об'єм симплекса з вершинами $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (див. рис.).



Опуклі множини

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f|\colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f| \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f| \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f| \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f|\colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1\cdots\boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1\cdots\boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f|\colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| : \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f| \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Виконується таке твердження, яке ми приймемо без доведення.

Теорема 1.9.12

$a_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 0, \ldots, k$, для симплекса $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і довільної точки $\boldsymbol{w}$ в ньому.

Нарешті, барицентричні координати використовуються для описання лінійних відображень між симплексами. Нехай f — відображення з множини вершин симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ на множину вершин іншого симплексу $\boldsymbol{\tau}$. Нехай $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_k$ і $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w}_0\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_s$. Якщо ми виразимо точки симплексу $\boldsymbol{\sigma}$ через (єдині) барицентричні координати стосовно його вершин, то відображення f індукує коректно визначене відображення

$$|f| \colon \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\tau},$$

яке визначається за формулою

$$|f|\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i).$$

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса σ в симплекс τ, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса σ в симплекс τ, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Означення 1.9.13

Відображення $|f|$ називається відображенням з симплекса $\boldsymbol{\sigma}$ в симплекс $\boldsymbol{\tau}$, *індукованим* відображенням вершин f.

Далі в лекціях ми побачимо, що відображення f є спеціальним випадком саме того відображення, яке називається *симпліціальним відображенням* між симпліціальними комплексами та $|f|$ — індуковане відображення на їхні базові простори. Основний момент, на який слід звернути увагу, полягає в тому, що відображення f вершин індукує відображення $|f|$ на весь симплекс. (Це дуже схоже на те, як відображення базисних векторів у векторному просторі індукує коректно визначене лінійне перетворення всього векторного простору). Це дає нам простий абстрактний спосіб визначення лінійних відображень між симплексами, хоча формула для цього відображення в декартових координатах не така вже й проста.

Дякую за увагу!