Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 18: Площини

Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але “зсуви” цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{p} + t_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \right\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \right\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але “зсуви” цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але “зсуви” цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Площини

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Далі ми визначимо лінійні підпростори більш високих вимірів евклідового простору. Безумовно, що векторні підпростори в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ повинні бути такими просторами, але "зсуви" цих просторів також повинні враховуватися.

Означення 1.7.1

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{p} + t_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \right\}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$, називається *k-вимірною площиною* (*яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*). Число k називається *виміром* площини $\boldsymbol{X}$ і позначається через $\dim \boldsymbol{X}$. Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ називаються *базою* площини $\boldsymbol{X}$.

Зрозуміло, що альтернативним означенням k-вимірної площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$, можна було б назвати довільну множину $\boldsymbol{X}$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \right\}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{V}$ — k-вимірний векторний підпростір в $\mathbb{R}^n$. Крім того, підпростір $\boldsymbol{V}$ однозначно визначається простором $\boldsymbol{X}$.

Площини

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина X в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$X = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{n}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{p}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина X складається з таких точок $\overrightarrow{p}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{n}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Площини

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина X в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$X = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{n}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{p}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина X складається з таких точок $\overrightarrow{p}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{n}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Площини

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Особливо цікавими є $(n-1)$-вимірні площини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7.2

Довільна підмножина $\boldsymbol{X}$ в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\right\}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ — фіксований ненульовий вектор у $\mathbb{R}^n$ і d — фіксоване дійсне число, називається *гіперплощиною*.

Зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^n$, то рівність (3) еквівалентна звичайній формі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{4}$$

рівняння для гіперплощини. Зауважимо також, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ належить до гіперплощини, то за означенням $d = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ і ми можемо переписати рівняння для гіперплощини у вигляді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0. \tag{5}$$

Рівність (3) стверджує, що гіперплощина $\boldsymbol{X}$ складається з таких точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ з властивістю, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0$ є ортогональним до вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ (див. рис.).

Площини

Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0 \tag{5}$$

називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

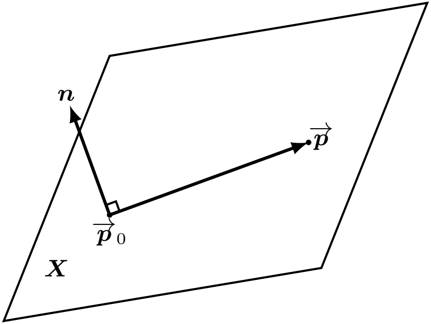
$$X = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d\}, \tag{3}$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \tag{4}$$

Вектор $\overrightarrow{n}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.

Площини



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0 \tag{5}$$

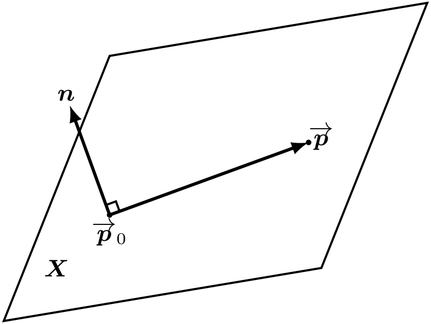
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$X = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d\}, \tag{3}$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \tag{4}$$

Вектор $\overrightarrow{n}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \qquad (5)$$

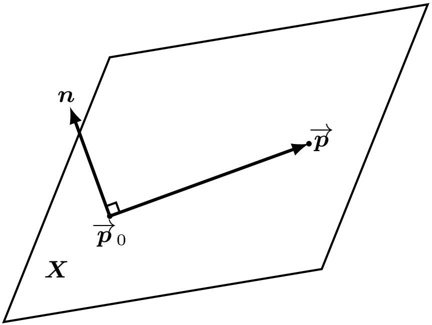
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \qquad (3)$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \qquad (4)$$

Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \tag{5}$$

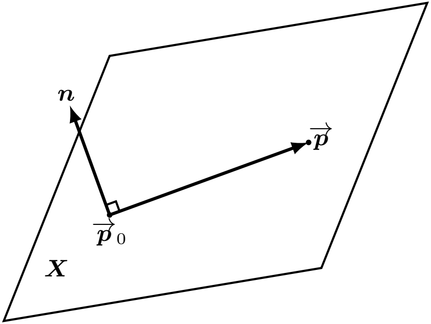
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \tag{3}$$

або (4)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = d. \tag{4}$$

Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0 \tag{5}$$

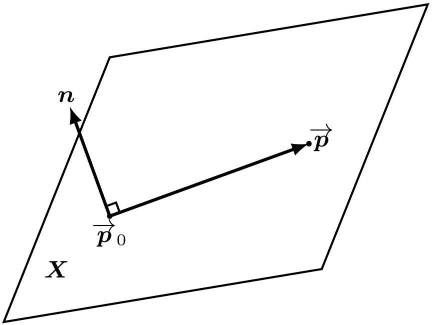
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$X = \{\vec{p} \mid \vec{n} \bullet \vec{p} = d\}, \tag{3}$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \tag{4}$$

Вектор $\vec{n}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \qquad (5)$$

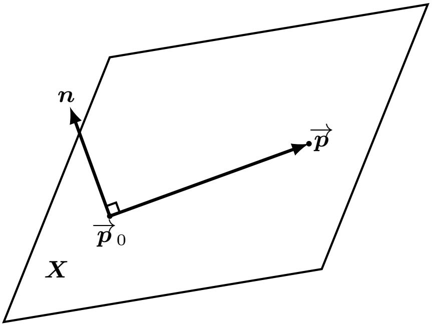
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d \right\}, \qquad (3)$$

або (4)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = d. \qquad (4)$$

Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0 \qquad (5)$$

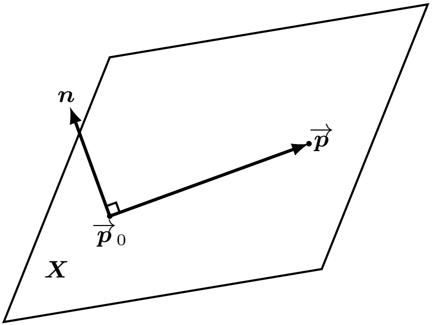
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$X = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d\}, \qquad (3)$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \qquad (4)$$

Вектор $\overrightarrow{n}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \tag{5}$$

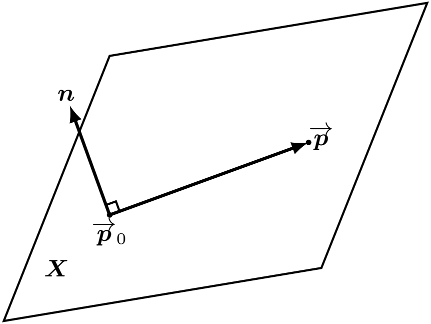
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \tag{4}$$

Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \tag{5}$$

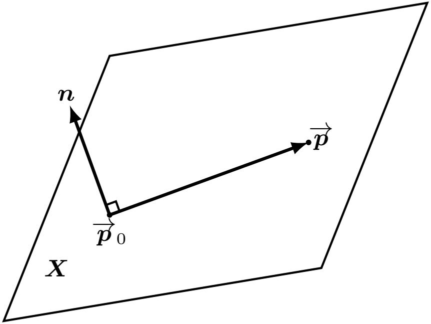
називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \tag{4}$$

Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.



Означення 1.7.3

Рівняння (5)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \tag{5}$$

називається *рівнянням гіперплощини в точково-нормальному вигляді* визначеної рівнянням (3)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d\}, \tag{3}$$

або (4)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d. \tag{4}$$

Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ називається *нормальним* вектором до гіперплощини.

Площини

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0, 0, 0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0, 0, 1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення “площина” у слові “гіперплощина”.

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0, 0, 0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0, 0, 1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення “площина” у слові “гіперплощина”.

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0, 0, 0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0, 0, 1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення "площина" у слові "гіперплощина".

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0.$$

Зауважимо, що $(0,0,0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0,0,1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення "площина" у слові "гіперплощина".

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0,0,0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0,0,1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення “площина” у слові “гіперплощина”.

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0, 0, 0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0, 0, 1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення "площина" у слові "гіперплощина".

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0.$$

Зауважимо, що $(0,0,0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0,0,1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення "площина" у слові "гіперплощина".

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0, 0, 0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0, 0, 1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення "площина" у слові "гіперплощина".

Приклад 1.7.4

Розглянемо гіперплощину, яка визначається рівнянням

$$z = 0.$$

Це рівняння можна переписати також у такому вигляді

$$0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0.$$

Зауважимо, що $(0,0,0)$ є точкою на гіперплощині, а $(0,0,1)$ є нормальним вектором до цієї гіперплощини.

Наступне твердження виправдовує словосполучення “площина” у слові “гіперплощина”.

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\mathcal{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\mathcal{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$

є базою для $\mathcal{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина X у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина X визначається рівнянням $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$K = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = 0\}$$

є базою для X.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що K є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що K — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що K є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon V \to W$ — лінійне відображення векторних просторів V і W над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів V і W, відповідно. Більше того,

$$\dim V = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору
$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$
є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення
$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
означеного за формулою
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$
Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина X у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина X визначається рівнянням $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$K = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = 0\}$$

є базою для X.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що K є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що K — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що K є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon V \to W$ — лінійне відображення векторних просторів V і W над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів V і W, відповідно. Більше того,

$$\dim V = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Площини

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору
$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$
є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення
$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
означеного за формулою
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$
Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \left\{ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0 \right\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору
$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$
є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення
$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
означеного за формулою
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$
Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \left\{ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0 \right\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору
$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$
є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення
$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
означеного за формулою
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$
Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору
$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$
є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення
$$T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
означеного за формулою
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$
Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору
$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$
є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення
$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
означеного за формулою
$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$
Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,
$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\right\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Твердження 1.7.5

(1) Гіперплощина $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$ є $(n-1)$-вимірною площиною. Якщо гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівнянням $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d$, то кожна база для векторного підпростору

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0\}$$

є базою для $\boldsymbol{X}$.

(2) Навпаки, кожна $(n-1)$-вимірна площина в $\mathbb{R}^n$ є гіперплощиною.

Доведення. (1) Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{K}$ є векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$. Це можна зробити або прямим доведенням, або ж насправді це випливає з того факту, що $\boldsymbol{K}$ — ядро лінійного перетворення

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

означеного за формулою

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередньо з теореми 1.2.43 випливає, що $\boldsymbol{K}$ є $(n-1)$-вимірним векторним підпростором у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.43

Якщо $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ — лінійне відображення векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ над полем k, то ядро та образ відображення T є векторними підпросторами векторним просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно. Більше того,

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \operatorname{im}(T) + \dim \ker(T).$$

Площини

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K} \right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ∎

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Площини

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ∎

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K} \right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \;\text{ для }\; 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Площини

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K} \right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ∎

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ∎

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \;\text{ для }\; 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Площини

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K} \right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність
$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$
звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$
і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$
Отже,
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$
звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$
Тоді
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$
звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ∎

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що
$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Площини

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n - k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n - k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ■

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність
$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$
звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$
і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$
Отже,
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$
звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$
Тоді
$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$
звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.
Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що
$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K} \right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ∎

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \;\; \text{для} \;\; 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то неважко довести таку рівність

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{K}\right\},$$

звідки випливає перше твердження. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = d,$$

і оскільки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$, то аналогічно маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Отже,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = d - d = 0,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{K}$. Навпаки, нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}$. Оскільки $\boldsymbol{p}_0 \in \boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = d.$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 = 0 + d = d,$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \in \boldsymbol{X}$.

Висловлення (2) випливає з теореми 1.6.10. ∎

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини X в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{n} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра K лінійного оператора

$$\overrightarrow{p} \mapsto \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $p_0, p_1, p_2 \in X$ і покладемо $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{p_0 p_1}$ і $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{p_0 p_2}$. Для прикладу візьмемо $p_0 = (1, 1, -1)$, $p_1 = (3, 0, 0)$ і $p_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{v}_1$ та $\overrightarrow{v}_2$, також будуть базою для ядра K. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням. ∎

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини X в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{n} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра K лінійного оператора

$$\overrightarrow{p} \mapsto \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $p_0, p_1, p_2 \in X$ і покладемо $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{p_0 p_1}$ і $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{p_0 p_2}$. Для прикладу візьмемо $p_0 = (1, 1, -1)$, $p_1 = (3, 0, 0)$ і $p_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{v}_1$ та $\overrightarrow{v}_2$, також будуть базою для ядра K. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням. $\blacksquare$

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{n} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{p} \mapsto \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{v}_1$ та $\overrightarrow{v}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням. ∎

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{n} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{p} \mapsto \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{v}_1$ та $\overrightarrow{v}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{n} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора
$$\overrightarrow{p} \mapsto \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}.$$
Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = 0$, тобто рівняння
$$2x + y - 3z = 0,$$
для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{v}_1$ і $\overrightarrow{v}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{v}_1$ та $\overrightarrow{v}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням. ∎

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\vec{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\vec{\boldsymbol{p}} \mapsto \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ та $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора
$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння
$$2x + y - 3z = 0,$$
для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння
$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння
$$2x + y - 3z = 0,$$
для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням.

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння
$$2x + y - 3z = 0,$$
для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням. ∎

Приклад 1.7.6

Знайдіть базу для гіперплощини $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, яка визначається рівнянням
$$2x + y - 3z = 6.$$

Розв'язок. Буде два вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ в нашій базі. Ми скористаємося твердженням 1.7.5(1). Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (2, 1, -3)$ є нормальним до нашої площини. Таким чином, знайти вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ рівносильно тому, що знайти базу для ядра $\boldsymbol{K}$ лінійного оператора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}.$$

Безпосередній підхід полягає у розв'язку рівняння $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$, тобто рівняння

$$2x + y - 3z = 0,$$

для двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$. Як варіант, обчислимо три неколінеарні точки $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{X}$ і покладемо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$. Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{p}_0 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{p}_1 = (3, 0, 0)$ і $\boldsymbol{p}_2 = (0, 6, 0)$, то з них отримуємо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, 5, 1)$. За побудовою ці вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$, також будуть базою для ядра $\boldsymbol{K}$. Перший підхід, який передбачає розв'язання рівняння лише для двох точок, а не розв'язок рівняння $2x + y - 3z = 6$ для трьох точок є очевидно простішим. Однак, в інших задачах площину не можна визначити рівнянням. ■

Площини

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

Площини

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1), \qquad (6)$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

Площини

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)\,, \tag{6}$$

де $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ і $\vec{\boldsymbol{k}}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \tag{6}$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \qquad (6)$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\vec{v} \times \vec{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)\,, \tag{6}$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\vec{v} \times \vec{w}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

У прикладі 1.7.6 показано, як можна знайти базу для площини, якщо в ній відомі деякі точки. Питання, що стосується гіперплощин, полягає у тому, щоб знайти для нього рівняння з урахуванням деяких точок. Для відповіді на це запитання в $\mathbb{R}^3$ можна скористатися векторним добутком.

Означення 1.7.7

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$. Означимо *векторний добуток* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^3$ за формулою

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)\,, \qquad (6)$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2, w_3)$.

Для запам'ятовування формула (6) є достатньо складною. Наступна формула представляє собою більш простіший варіант для обчислення векторного добутку векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі через $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ позначаються x-, y- і z-компоненти векторного добутку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$.

Ми розглянемо векторний добуток і його властивості більш детально пізніше. Зараз ми скористаємося лише тим, що векторний добуток двох векторів це — вектор, який ортогональний обом цим векторам, що легко перевіряється з формули обчислення векторного добутку.

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (1-1, 2-0, 0-1) = (0, 2, -1),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = (0-1, 0-0, 3-1) = (-1, 0, 2)$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0{\cdot}0{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1){\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1){\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0{\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} =$$

$$= (4, 1, 2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1,0,1)$, $\boldsymbol{q} = (1,2,0)$ і $\boldsymbol{r} = (0,0,3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} &= (1-1, 2-0, 0-1) = (0,2,-1),\\ \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} &= (0-1, 0-0, 3-1) = (-1,0,2)\end{aligned}$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0{\cdot}0{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1){\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1){\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0{\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} =$$

$$= (4,1,2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1,0,1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4,1,2)$, має вигляд

$$(4,1,2) \bullet ((x,y,z) - (1,0,1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{pq} &= (1-1, 2-0, 0-1) = (0, 2, -1),\\ \overrightarrow{pr} &= (0-1, 0-0, 3-1) = (-1, 0, 2)\end{aligned}$$

і

$$\overrightarrow{pq} \times \overrightarrow{pr} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}&= 2\cdot 2\cdot \overrightarrow{i} + 0\cdot 0\cdot \overrightarrow{k} + (-1)\cdot(-1)\cdot \overrightarrow{j} - (-1)\cdot 2\cdot \overrightarrow{k} - 0\cdot 2\cdot \overrightarrow{j} - 0\cdot(-1)\cdot \overrightarrow{i} =\\ &= 4\overrightarrow{i} + 0\cdot\overrightarrow{k} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} + 0\cdot\overrightarrow{j} + 0\cdot\overrightarrow{i} =\\ &= 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} =\\ &= (4, 1, 2).\end{aligned}$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\overrightarrow{pq} = (1 - 1, 2 - 0, 0 - 1) = (0, 2, -1),$$
$$\overrightarrow{pr} = (0 - 1, 0 - 0, 3 - 1) = (-1, 0, 2)$$

і

$$\overrightarrow{pq} \times \overrightarrow{pr} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{i} + 0{\cdot}0{\cdot}\overrightarrow{k} + (-1){\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{j} - (-1){\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{k} - 0{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{j} - 0{\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{i} =$$
$$= 4\overrightarrow{i} + 0 \cdot \overrightarrow{k} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} + 0 \cdot \overrightarrow{j} + 0 \cdot \overrightarrow{i} =$$
$$= 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} =$$
$$= (4, 1, 2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\overrightarrow{pq} = (1-1, 2-0, 0-1) = (0, 2, -1),$$
$$\overrightarrow{pr} = (0-1, 0-0, 3-1) = (-1, 0, 2)$$

і

$$\overrightarrow{pq} \times \overrightarrow{pr} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{i} + 0{\cdot}0{\cdot}\overrightarrow{k} + (-1){\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{j} - (-1){\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{k} - 0{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{j} - 0{\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{i} =$$
$$= 4\overrightarrow{i} + 0 \cdot \overrightarrow{k} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} + 0 \cdot \overrightarrow{j} + 0 \cdot \overrightarrow{i} =$$
$$= 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} =$$
$$= (4, 1, 2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Площини

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (1-1, 2-0, 0-1) = (0, 2, -1),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = (0-1, 0-0, 3-1) = (-1, 0, 2)$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 2\cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0\cdot 0\cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1)\cdot(-1)\cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1)\cdot 2\cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0\cdot 2\cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0\cdot(-1)\cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} =$$

$$= (4, 1, 2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (1-1, 2-0, 0-1) = (0, 2, -1),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = (0-1, 0-0, 3-1) = (-1, 0, 2)$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0{\cdot}0{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1){\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1){\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0{\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$

$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} =$$

$$= (4, 1, 2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} &= (1 - 1, 2 - 0, 0 - 1) = (0, 2, -1),\\ \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} &= (0 - 1, 0 - 0, 3 - 1) = (-1, 0, 2)\end{aligned}$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}&= 2{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0{\cdot}0{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1){\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1){\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0{\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} =\\ &= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =\\ &= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} =\\ &= (4, 1, 2).\end{aligned}$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (1 - 1, 2 - 0, 0 - 1) = (0, 2, -1),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = (0 - 1, 0 - 0, 3 - 1) = (-1, 0, 2)$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0{\cdot}0{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1){\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1){\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0{\cdot}2{\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0{\cdot}(-1){\cdot}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$
$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$
$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} =$$
$$= (4, 1, 2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Приклад 1.7.8

Запишіть рівняння гіперплощини, яка містить точки $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{q} = (1, 2, 0)$ і $\boldsymbol{r} = (0, 0, 3)$.

Розв'язок. Маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (1-1, 2-0, 0-1) = (0, 2, -1),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = (0-1, 0-0, 3-1) = (-1, 0, 2)$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{pr}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + (-1) \cdot (-1) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - (-1) \cdot 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} - 0 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 0 \cdot (-1) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$
$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{k}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{i}} =$$
$$= 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{k}} =$$
$$= (4, 1, 2).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (4, 1, 2)$, має вигляд

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Площини

$$(4,1,2) \bullet ((x,y,z) - (1,0,1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4,1,2) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0,$$

$$4(x-1) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Площини

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4, 1, 2) \bullet (x - 1, y - 0, z - 1) = 0,$$

$$4(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Площини

$$(4,1,2) \bullet ((x,y,z) - (1,0,1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4,1,2) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0,$$

$$4(x-1) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Площини

$$(4,1,2) \bullet ((x,y,z) - (1,0,1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4,1,2) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0,$$

$$4(x-1) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Площини

$$(4,1,2) \bullet ((x,y,z) - (1,0,1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4,1,2) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0,$$

$$4(x-1) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Площини

$$(4,1,2) \bullet ((x,y,z) - (1,0,1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4,1,2) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0,$$

$$4(x-1) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Площини

$$(4,1,2)\bullet((x,y,z)-(1,0,1))=0.$$

Провівши обчислення:

$$(4,1,2)\bullet(x-1,y-0,z-1)=0,$$

$$4(x-1)+1(y-0)+2(z-1)=0,$$

$$4x-4+y+2z-2=0,$$

$$4x+y+2z-6=0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x+y+2z=6.$$

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4, 1, 2) \bullet (x - 1, y - 0, z - 1) = 0,$$

$$4(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4, 1, 2) \bullet (x - 1, y - 0, z - 1) = 0,$$

$$4(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

Площини

$$(4, 1, 2) \bullet ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = 0.$$

Провівши обчислення:

$$(4, 1, 2) \bullet (x - 1, y - 0, z - 1) = 0,$$

$$4(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0,$$

$$4x - 4 + y + 2z - 2 = 0,$$

$$4x + y + 2z - 6 = 0,$$

отримуємо рівняння шуканої площини:

$$4x + y + 2z = 6.$$

■

Площини

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k \right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді.*

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k \right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k \right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Площини

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k \right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді.*

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k \right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\}\,. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді.*

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 \right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k \right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\right\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Якщо порівнювати довільні k-вимірні площини та гіперплощини, то бачимо, що перші мають поки лише чітке означення з точки зору параметризації, тоді як останні також можуть бути визначені неявно за допомогою рівняння, використовуючи нормальний вектор. Власне, теорема 1.6.10 виправляє цю ситуацію та стверджує, що довільну k-вимірну площину $\boldsymbol{X}$ можна також визначити за допомогою нормальних векторів, а отже, і рівняння в такому значенні: якщо $\boldsymbol{p}_0$ — довільна точка площини, то існують $n-k$ ортонормованих вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\}. \tag{7}$$

Означення 1.7.9

Рівняння (7) називається рівнянням площини в *точково-нормальному вигляді*.

Нормальні вектори для гіперплощин не є єдиними, оскільки будь-який ненульовий кратний до нормального вектор визначатиме ту саму гіперплощину.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини X, то $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина X визначається рівняннями

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{n}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{p} \in X$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

і

$$\overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину Y. Але гіперплощина Y є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина Y має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ∎

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини X, то $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина X визначається рівняннями

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{n}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{p} \in X$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

і

$$\overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину Y. Але гіперплощина Y є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина Y має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ■

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини X, то $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина X визначається рівняннями

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{n}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{p} \in X$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

і

$$\overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину Y. Але гіперплощина Y є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина Y має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ∎

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ∎

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини X, то $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина X визначається рівняннями

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{n}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{p} \in X$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

і

$$\overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину Y. Але гіперплощина Y є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина Y має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\vec{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \vec{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\vec{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\vec{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\vec{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ∎

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини X, то $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина X визначається рівняннями

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{n}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = \overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{p} \in X$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

і

$$\overrightarrow{n}_2 \bullet \overrightarrow{p} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину Y. Але гіперплощина Y є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина Y має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ∎

Лема 1.7.10

Якщо $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини X, то $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина X визначається рівняннями

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \vec{n}_2 \bullet \vec{p} = d_2.$$

Замінивши вектор $\vec{n}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{p} = \vec{n}_2 \bullet \vec{p}$$

для всіх векторів $\vec{p} \in X$. Звідси випливає, що рівняння

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{p} = 0$$

і

$$\vec{n}_2 \bullet \vec{p} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину Y. Але гіперплощина Y є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина Y має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини X, то $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина X визначається рівняннями

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \vec{n}_2 \bullet \vec{p} = d_2.$$

Замінивши вектор $\vec{n}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{p} = \vec{n}_2 \bullet \vec{p}$$

для всіх векторів $\vec{p} \in X$. Звідси випливає, що рівняння

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{p} = 0$$

і

$$\vec{n}_2 \bullet \vec{p} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину Y. Але гіперплощина Y є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина Y має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ∎

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ∎

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\vec{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \vec{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\vec{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\vec{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\vec{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\vec{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має едине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ і $\vec{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми.

Лема 1.7.10

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ — два нормальні вектори для гіперплощини $\boldsymbol{X}$, то $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ паралельні.

Доведення. За припущенням гіперплощина $\boldsymbol{X}$ визначається рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2.$$

Замінивши вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ кратним до нього вектором, якщо це потрібно, то ми можемо вважати, що $d_1 = d_2$. Отже, маємо, що виконується рівність

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}$$

для всіх векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = 0$$

визначають одну і ту ж саму гіперплощину $\boldsymbol{Y}$. Але гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ є $(n-1)$-вимірний векторний підпростір у $\mathbb{R}^n$, а отже за теоремою 1.6.8 гіперплощина $\boldsymbol{Y}$ має єдине одно-вимірне ортогональне доповнення у $\mathbb{R}^n$. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$ належать до цього доповнення, то вони мають бути кратними один одному, що і завершує доведення твердження леми. ■

Площини

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків “орієнтованих” гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Площини

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай X і Y — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо Y має базу $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_t$ таку, що $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s$ є базою для X, то ми будемо говорити, що площина X *є паралельною до* Y і площина Y *є паралельною до* X.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай X і Y — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо Y має базу $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_t$ таку, що $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s$ є базою для X, то ми будемо говорити, що площина X *є паралельною до* Y і площина Y *є паралельною до* X.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай X і Y — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо Y має базу $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_t$ таку, що $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s$ є базою для X, то ми будемо говорити, що площина X є *паралельною до* Y і площина Y є *паралельною до* X.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків "орієнтованих" гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\vec{n} \bullet \vec{p} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \vec{n} \bullet \vec{p} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай X і Y — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо Y має базу $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_t$ таку, що $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s$ є базою для X, то ми будемо говорити, що площина X *є паралельною до* Y і площина Y *є паралельною до* X.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків “орієнтованих” гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Хоча ми тут цього робити не будемо (за винятком випадків “орієнтованих” гіперплощину згодом), насправді можна визначити кут між довільними площинами. Тоді можна було б визначити паралельні та ортогональні площини з точки зору кута, як ми це зробили для векторів. У будь-якому випадку, за нашим означенням, ми називаємо будь-які дві гіперплощини, визначені рівняннями

$$\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_1 \qquad \text{і} \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{p}} = d_2,$$

відповідно, паралельними. Вони також мають однакові бази. Ці означення корисно узагальнити.

Означення 1.7.11

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — s- і t-вимірні площини, відповідно, з $s \leqslant t$. Якщо $\boldsymbol{Y}$ має базу $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_t$ таку, що $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s$ є базою для $\boldsymbol{X}$, то ми будемо говорити, що площина $\boldsymbol{X}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{Y}$ *є паралельною до* $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{n}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n}_i \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_1 = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_2 = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{n}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n}_i \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_1 = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_2 = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{n}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n}_i \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_1 = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p} = d_2 = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{p}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.
Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0\right) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\right\} \qquad (7)$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}\right) = 0\right\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}\right) = 0\right\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12
У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.
Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.
Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.
Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.
Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними.

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, n-k\} \tag{7}$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ∎

Лема 1.7.12

У випадку гіперплощин два поняття паралельності площин збігаються.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$. Тоді вони мають однакові бази, а отже за означенням є паралельними, як $(n-1)$-вимірні площини.
Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — паралельні гіперплощини в $\mathbb{R}^n$, як $(n-1)$-вимірні площини. Тоді кожна з них має $(n-1)$-елементну базу, і за означенням паралельних $(n-1)$-вимірних площин їх бази збігаються, а отже мають однакове ортогональне доповнення в $\mathbb{R}^n$, яке є лінійною оболонкою деякого одиничного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Тоді за формулою (7)

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-k\} \qquad (7)$$

маємо, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}}) = 0\}$$

і

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}}) = 0\}$$

для деяких радіус-векторів точок $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді гіперплощини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ визначаються рівняннями

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X}} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}} = d_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{Y}},$$

відповідно, а отже, є паралельними. ■

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми.

Площини

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми.

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми.

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми.

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ∎

Далі ми хочемо розширити поняття ортогональної проекції та ортогонального доповнення векторів до площин. Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірна площина з базою $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$. Нехай $\boldsymbol{X}_0$ — векторний підпростір, породжений векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$, тобто

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right).$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{X}_0$ — це площина, яка проходить через початок координат і паралельна до площини $\boldsymbol{X}$.

Лема 1.7.13

Площина $\boldsymbol{X}_0$ не залежить від вибору бази площини $\boldsymbol{X}$.

Доведення. Нехай

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

і

$$\boldsymbol{X} = \left\{\boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ — фіксовані точки площини $\boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ — фіксовані лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної фіксованої точки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ існують $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\boldsymbol{p} + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}' + s_1\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1 + s_2\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2 + \ldots + s_m\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m.$$

Оскільки точки $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{p}'$ вибрано довільним чином у $\boldsymbol{X}$, то взявши $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$, отримуємо, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m\right),$$

а отже $k = m$. Тоді з лінійної незалежності систем векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_m$ випливає твердження леми. ■

Означення 1.7.14

Нехай $\overrightarrow{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора* $\overrightarrow{v}$ *на площину* X називається ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора* $\overrightarrow{v}$ *стосовно площини* X називається ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\overrightarrow{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\overrightarrow{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину X_0.
Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини X називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}$* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина $\boldsymbol{X}$ називається *паралельною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є паралельний до площини $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{X}$ називається *ортогональною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до площини $\boldsymbol{Y}$.

Площини

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}$* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}$* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.

Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Площини

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}$* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина $\boldsymbol{X}$ називається *паралельною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є паралельний до площини $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{X}$ називається *ортогональною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до площини $\boldsymbol{Y}$.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}$* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина $\boldsymbol{X}$ називається *паралельною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є паралельний до площини $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{X}$ називається *ортогональною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до площини $\boldsymbol{Y}$.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}$* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$.
Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$ називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина $\boldsymbol{X}$ називається *паралельною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є паралельний до площини $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{X}$ називається *ортогональною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до площини $\boldsymbol{Y}$.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}$* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину $\boldsymbol{X}_0$.
Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}$ називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини $\boldsymbol{X}_0$.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина $\boldsymbol{X}$ називається *паралельною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є паралельний до площини $\boldsymbol{Y}$ і площина $\boldsymbol{X}$ називається *ортогональною* до площини $\boldsymbol{Y}$, якщо кожен вектор бази простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до площини $\boldsymbol{Y}$.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Означення 1.7.14

Нехай $\vec{v}$ — вектор. *Ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на площину X* називається ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на площину X_0. *Ортогональним доповненням вектора $\vec{v}$ стосовно площини X* називається ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно площини X_0.

За лемою 1.7.13 ортогональна проекція вектора на площину та її ортогональне доповнення коректно визначені. Ми можемо використовувати теорему 1.6.12 для їх обчислень.
Пов'язаним з цим є наступне означення.

Означення 1.7.15

Будемо говорити, що *вектор є паралельним до площини*, якщо він лежить у підпросторі, який є лінійною оболонкою довільної бази на площині. Також казатимемо, що *вектор є ортогональним до площини*, якщо він є ортогональним до всіх векторів довільної бази цієї площини. Більш загально, площина X називається *паралельною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є паралельний до площини Y і площина X називається *ортогональною* до площини Y, якщо кожен вектор бази простору X є ортогональним до площини Y.

Площини

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).

Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Площини

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).

Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Площини

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин.

Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).

Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).

Зокрема, для довільної площини X у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{v}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині X, і частину, ортогональну їй.

Площини

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).

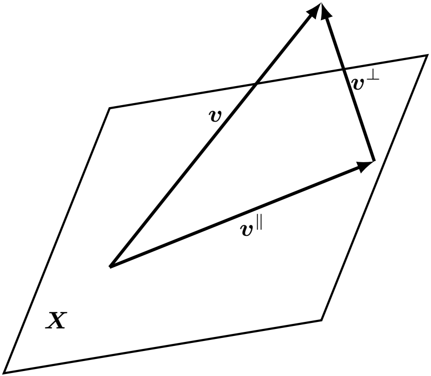
Зокрема, для довільної площини X у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\vec{v}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині X, і частину, ортогональну їй.

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).

Зокрема, для довільної площини X у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{v}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині X, і частину, ортогональну їй.

Площини

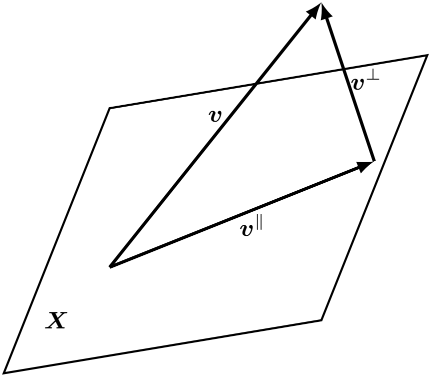
Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).



Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

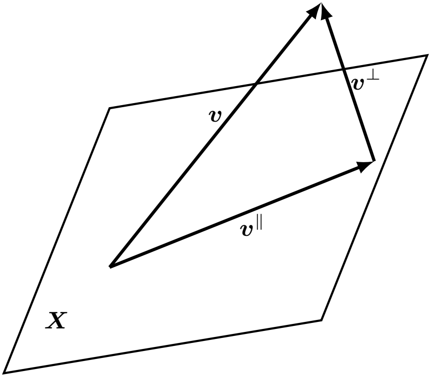
Площини

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).



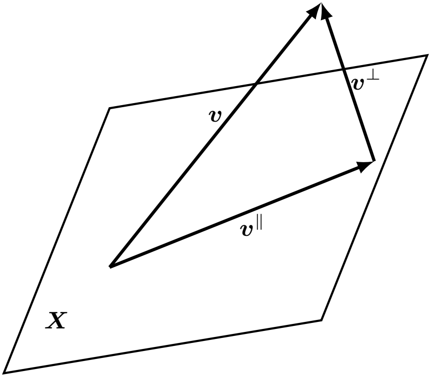
Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).



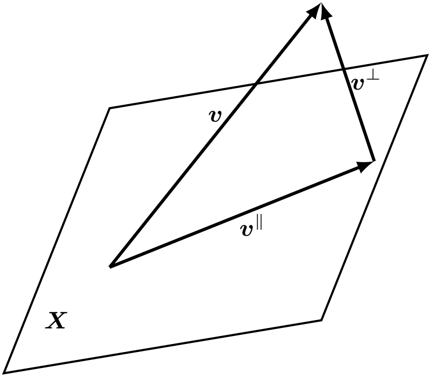
Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).



Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Неважко довести, що поняття вектора чи площини, паралельних або ортогональних іншій площині, не залежить від вибору баз для площин. Зауважимо, що, як особливий випадок, вектор буде паралельний прямій тоді і лише тоді, коли він паралельний будь-якому напрямному вектору цієї прямої. Ще одне корисне спостереження узагальнює та робить більш точним коментар в останній лекції (див. рис.).



Зокрема, для довільної площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, будь-який вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ у $\mathbb{R}^n$ може бути розкладений на частину, паралельну площині $\boldsymbol{X}$, і частину, ортогональну їй.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини X у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $p_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\vec{n} = (a,b,c)$ — нормаль до площини X, то вектор $\vec{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a,3a,a)$ є нормальним до площини X. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини X. ■

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$. ∎

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{n} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a,3a,a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$. ◻

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$. ∎

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{n} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c)\bullet(3,-1,0) = (a,b,c)\bullet(1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a,3a,a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1)\bullet((x,y,z)-(1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1)\bullet(x-1,y-3,z-2) = 0,$$
$$1\cdot(x-1) + 3\cdot(y-3) + 1\cdot(z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій
$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$
і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що
$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$
а отже,
$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$
Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що
$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$
Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:
$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$
а отже,
$$x + 3y + z = 12$$
є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$. ■

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{n}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$. ■

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t, \\ y &= -t, \\ z &= 7 \end{aligned}$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$\begin{gathered} (1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0, \\ 1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0, \\ x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0, \end{gathered}$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій
$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$
і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що
$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$
а отже,
$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$
Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що
$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$
Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:
$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$
а отже,
$$x + 3y + z = 12$$
є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a,3a,a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a,3a,a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій
$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$
і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що
$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$
а отже,
$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$
Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що
$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$
Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:
$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$
а отже,
$$x + 3y + z = 12$$
є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій
$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$
і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що
$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$
а отже,
$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$
Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що
$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$
Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:
$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$
а отже,
$$x + 3y + z = 12$$
є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1, 3, 2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3, -1, 0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1, 0, -1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a, b, c) \bullet (3, -1, 0) = (a, b, c) \bullet (1, 0, -1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a, 3a, a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1, 3, 1) \bullet ((x, y, z) - (1, 3, 2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1, 3, 1) \bullet (x - 1, y - 3, z - 2) = 0,$$
$$1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.7.16

Запишіть рівняння для площини $\boldsymbol{X}$ у $\mathbb{R}^n$, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}_0 = (1,3,2)$, паралельна прямій

$$x = 2 + 3t,$$
$$y = -t,$$
$$z = 7$$

і ортогональна площині $x - z = 2$.

Розв'язок. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = (a,b,c)$ — нормаль до площини $\boldsymbol{X}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ має бути ортогональним до напрямного вектора $(3,-1,0)$ взятої прямої і є ортогональним до нормалі $(1,0,-1)$ для взятої площини, тобто маємо, що

$$(a,b,c) \bullet (3,-1,0) = (a,b,c) \bullet (1,0,-1) = 0,$$

а отже,

$$3a - b = 0 \qquad \text{і} \qquad a - c = 0.$$

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо, що $b = 3a$ і $c = a$. Іншими словами, вектор $(a,3a,a)$ є нормальним до площини $\boldsymbol{X}$. Звідси випливає, що

$$(1,3,1) \bullet ((x,y,z) - (1,3,2)) = 0.$$

Провівши звичайні розрахунки, отримуємо:

$$(1,3,1) \bullet (x-1, y-3, z-2) = 0,$$
$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$
$$x - 1 + 3y - 9 + z - 2 = 0,$$

а отже,

$$x + 3y + z = 12$$

є рівнянням площини $\boldsymbol{X}$. ■

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{p}_0, \overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. Множини

$$\{\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{p}_0, \overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. Множини

$$\{\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{p}_0, \overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. Множини

$$\{\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{n} \bullet (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\vec{\boldsymbol{p}}_0, \vec{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\vec{\boldsymbol{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\vec{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{\boldsymbol{n}} \bullet (\vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\vec{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{\boldsymbol{n}} \bullet (\vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\vec{\boldsymbol{n}} \bullet (\vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її “боків”. На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини
$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$
і
$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$
називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\vec{p}_0, \vec{n} \in \mathbb{R}^n$ з $\vec{n} \neq \vec{0}$. Множини

$$\{\vec{p} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{p}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\vec{p} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{p}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Площини

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.

Завершуємо цю лекцію ще двома означеннями. Перше узагальнює напівплощини $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^n_-$.

Означення 1.7.17

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^n$ з $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Множини

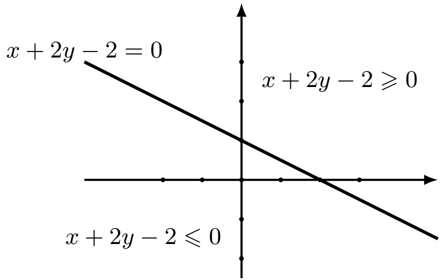
$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \geqslant 0\}$$

і

$$\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) \leqslant 0\}$$

називаються *півплощинами*, визначеними гіперплощиною $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} \bullet (\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0) = 0$. *Півпряма* — це півплощина в $\mathbb{R}$.

Гіперплощина в $\mathbb{R}^n$ ділить простір $\mathbb{R}^n$ на три частини: її саму та дві півплощини з двох її "боків". На рис. зображено дві півплощини на площині, які визначаються прямою (гіперплощиною) $x + 2y - 2 = 0$.



Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай X — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини X, позначається через $\operatorname{aff}(X)$, визначається за формулою
$$\operatorname{aff}(X) = \bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо X — площина, то $\operatorname{aff}(X) = X$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap X_i$ набору площин X_i є непорожнім. Тоді існує точка $p_0 \in \bigcap X_i$. Тоді за означенням $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap X_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ в $\bigcap X_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що
$$\bigcap X_i = \{p_0 + t_1\overrightarrow{v}_1 + t_2\overrightarrow{v}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{v}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$
є площиною.
(2) Оскільки серед елементів перетину
$$\bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}.$$
є сама площина X, то $\operatorname{aff}(X) \subseteq X$. Включення $X \subseteq \operatorname{aff}(X)$ очевидне. ■

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай X — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини X, позначається через $\operatorname{aff}(X)$, визначається за формулою
$$\operatorname{aff}(X) = \bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}\,.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо X — площина, то $\operatorname{aff}(X) = X$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap X_i$ набору площин X_i є непорожнім. Тоді існує точка $p_0 \in \bigcap X_i$. Тоді за означенням $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap X_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ в $\bigcap X_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що
$$\bigcap X_i = \{p_0 + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \ldots + t_k\vec{v}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$
є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину
$$\bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}\,.$$
є сама площина X, то $\operatorname{aff}(X) \subseteq X$. Включення $X \subseteq \operatorname{aff}(X)$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай X — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини X, позначається через $\operatorname{aff}(X)$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(X) = \bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо X — площина, то $\operatorname{aff}(X) = X$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap X_i$ набору площин X_i є непорожнім. Тоді існує точка $p_0 \in \bigcap X_i$. Тоді за означенням $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap X_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ в $\bigcap X_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap X_i = \{p_0 + t_1\overrightarrow{v}_1 + t_2\overrightarrow{v}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{v}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}.$$

є сама площина X, то $\operatorname{aff}(X) \subseteq X$. Включення $X \subseteq \operatorname{aff}(X)$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай X — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини X, позначається через $\operatorname{aff}(X)$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(X) = \bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо X — площина, то $\operatorname{aff}(X) = X$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap X_i$ набору площин X_i є непорожнім. Тоді існує точка $p_0 \in \bigcap X_i$. Тоді за означенням $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap X_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap X_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ в $\bigcap X_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap X_i = \{p_0 + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \ldots + t_k\vec{v}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{P \mid P - \text{ площина, яка містить } X\}.$$

є сама площина X, то $\operatorname{aff}(X) \subseteq X$. Включення $X \subseteq \operatorname{aff}(X)$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{v}_1 + t_2\overrightarrow{v}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{v}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ∎

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Площини

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}\,.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Іноді потрібно говорити про найменшу площину, яка є лінійною оболонкою множини.

Означення 1.7.18

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підмножина в $\mathbb{R}^n$. *Афінна оболонка* або *афінне замикання* множини $\boldsymbol{X}$, позначається через $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$, визначається за формулою

$$\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

Наступна лема виправдовує означення афінної оболонки множини:

Лема 1.7.19

(1) Непорожній перетин довільної кількості площин є площиною.

(2) Якщо $\boldsymbol{X}$ — площина, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.

Доведення. (1) Припустимо, що перетин $\bigcap \boldsymbol{X}_i$ набору площин $\boldsymbol{X}_i$ є непорожнім. Тоді існує точка $\boldsymbol{p}_0 \in \bigcap \boldsymbol{X}_i$. Тоді за означенням $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором для кожної площини $\bigcap \boldsymbol{X}_i$. Оскільки перетин довільного набору векторних підпросторів у $\mathbb{R}^n$ є векторним простором, то $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$ є векторним простором. Зафіксуємо довільні базу $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k$ в $\bigcap \boldsymbol{X}_{i0}$. Тоді за означенням 1.7.1 маємо, що

$$\bigcap \boldsymbol{X}_i = \{\boldsymbol{p}_0 + t_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + t_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + t_k\vec{\boldsymbol{v}}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

є площиною.

(2) Оскільки серед елементів перетину

$$\bigcap \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} - \text{ площина, яка містить } \boldsymbol{X}\}.$$

є сама площина $\boldsymbol{X}$, то $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Включення $\boldsymbol{X} \subseteq \operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ очевидне. ■

Площини

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. $\blacksquare$

Площини

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

Площини

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

Площини

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. $\blacksquare$

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ■

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ■

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ■

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0,\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k)=\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})=\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0+t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}+\ldots+t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k\in\mathbb{R}\},$$

що і завершує доведення теореми. ■

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \operatorname{aff}(\boldsymbol{X}) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ∎

З леми 1.7.19 випливає, що афінні оболонки — це насправді площини. Можна також легко побачити, що $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ міститься в будь-якій площині, що містить множину $\boldsymbol{X}$, а тому слід відноситься до $\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})$ як до "найменшої" такої площини.

Теорема 1.7.20

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0 + t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доведення. За лемою 1.7.19 афінна оболонка $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)$ є деякою площиною $\boldsymbol{X}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що точки $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k$ є лінійно незалежними в $\mathbb{R}^n$, а отже і в $\boldsymbol{X}$. Звідси та означення 1.7.1 випливають наступні дві рівності

$$\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0,\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_1,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_k\right)=\operatorname{aff}(\boldsymbol{X})=\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}}_0+t_1\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}+\ldots+t_k\overrightarrow{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_k} \mid t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{R}\right\},$$

що і завершує доведення теореми. ■

Площини

Нехай X і Y — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що X і Y є зсувами єдиних векторних просторів V і W, відповідно, тобто

$$X = \{\overrightarrow{p} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v} \in V\} \qquad \text{і} \qquad Y = \{\overrightarrow{q} + \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{w} \in W\}$$

для деяких $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори V і W є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин V і W повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Площини

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Площини

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\right\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\right\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Площини

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Площини

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Площини

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Площини

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Площини

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ — дві площини в $\mathbb{R}^n$. Тоді з означення площини випливає, що $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ є зсувами єдиних векторних просторів $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$, відповідно, тобто

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{p}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}\} \qquad \text{і} \qquad \boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{W}\}$$

для деяких $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Інтуїтивно дві площини є *поперечними* (*осьовими*), якщо пов'язані з ними підпростори $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ є лінійними оболонками максимально вимірного простору, як тільки можливого взятого їх виміру. Інакше кажучи, перетин $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ повинен бути якомога меншим. Іноді ці площини називають площинами, що розташовані в *загальному положенні*. Наприклад, осі x і y є поперечними в $\mathbb{R}^n$, але вісь x і паралельна їй пряма, означена $y = 1$, не є такими. Площини xy і yz є поперечними в $\mathbb{R}^3$, але не є в $\mathbb{R}^4$.

Дякую за увагу!