Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 17: Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.7

Нехай X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору X у V, яке позначається через $X^{\perp}$, визначається так

$$X^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{w} \in X\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $X^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору X.

Теорема 1.6.8

Якщо X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $X^{\perp}$ простору X є підпростором у V і

$$V = X \oplus X^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$V = X \oplus Y,$$

де Y — підпростір з властивістю, що кожен вектор з Y є нормальним до X, то $Y = X^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $X^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі V зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in X$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $X^{\perp}$ — підпростір векторного простору V.

Означення 1.6.7

Нехай X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору X у V, яке позначається через $X^{\perp}$, визначається так
$$X^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{w} \in X\}.$$
Кожен вектор у підпросторі $X^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору X.

Теорема 1.6.8

Якщо X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $X^{\perp}$ простору X є підпростором у V і
$$V = X \oplus X^{\perp}.$$
Навпаки, якщо
$$V = X \oplus Y,$$
де Y — підпростір з властивістю, що кожен вектор з Y є нормальним до X, то $Y = X^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $X^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі V зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in X$ і довільного скаляра α маємо
$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$
$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$
а отже $X^{\perp}$ — підпростір векторного простору V.

Означення 1.6.7

Нехай X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору X у V, яке позначається через $X^{\perp}$, визначається так

$$X^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{w} \in X\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $X^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору X.

Теорема 1.6.8

Якщо X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $X^{\perp}$ простору X є підпростором у V і

$$V = X \oplus X^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$V = X \oplus Y,$$

де Y — підпростір з властивістю, що кожен вектор з Y є нормальним до X, то $Y = X^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $X^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі V зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in X$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $X^{\perp}$ — підпростір векторного простору V.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \ \text{ для всіх } \ \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору X у V, яке позначається через $X^{\perp}$, визначається так

$$X^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \ \text{ для всіх } \ \overrightarrow{w} \in X\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $X^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору X.

Теорема 1.6.8

Якщо X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $X^{\perp}$ простору X є підпростором у V і

$$V = X \oplus X^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$V = X \oplus Y,$$

де Y — підпростір з властивістю, що кожен вектор з Y є нормальним до X, то $Y = X^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $X^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі V зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in X$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $X^{\perp}$ — підпростір векторного простору V.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \ \text{ для всіх } \ \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \ \text{ для всіх } \ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$
$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \ \text{ для всіх } \ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \left\{\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{X}\right\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \ \text{ для всіх } \ \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{X} \right\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0 \ \text{ для всіх } \ \overrightarrow{w} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{z} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{z} = \alpha(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \ \text{для всіх} \ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp}=\{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\boldsymbol{V}\mid\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{w}}=0\ \text{ для всіх }\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}}\in\boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{X}\oplus\boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{X}\oplus\boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\in\boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}}\in\boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}+\overrightarrow{\boldsymbol{y}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{z}}=\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{z}}+\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{z}}=0+0=0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}})\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{z}}=\alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{z}})=\alpha\cdot 0=0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\right\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.7

Нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. *Ортогональне доповнення* підпростору $\boldsymbol{X}$ у $\boldsymbol{V}$, яке позначається через $\boldsymbol{X}^{\perp}$, визначається так

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0 \text{ для всіх } \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Кожен вектор у підпросторі $\boldsymbol{X}^{\perp}$ називається *нормальним вектором* для підпростору $\boldsymbol{X}$.

Теорема 1.6.8

Якщо $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, то ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$ є підпростором у $\boldsymbol{V}$ і

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Навпаки, якщо

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Доведення. Очевидно, що $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір у векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Справді, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, то для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{X}$ і довільного скаляра α маємо

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = 0 + 0 = 0,$$
$$(\alpha \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = \alpha(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{z}}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

а отже $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ■

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}_1)\, \overrightarrow{u}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}_2)\, \overrightarrow{u}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}_k)\, \overrightarrow{u}_k$$

і $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{w} - T(\overrightarrow{w}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v} - T(\overrightarrow{v})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y} = 0$, а отже $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ∎

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ∎

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{w} - T(\overrightarrow{w}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{w} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v} - T(\overrightarrow{v})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y} = 0$, а отже $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ∎

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\, \vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\, \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\, \vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ∎

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\,\vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\,\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\,\vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\, \vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\, \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\, \vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\, \vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\, \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\, \vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ∎

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\, \vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\, \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\, \vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\,\vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\,\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\,\vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\, \vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\, \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\, \vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - T(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ■

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\, \vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\, \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\, \vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Далі доведемо, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_k$ — ортонормована база векторного простору $\boldsymbol{X}$. Визначимо лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ наступним чином:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\,\vec{\boldsymbol{u}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\,\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_k)\,\vec{\boldsymbol{u}}_k$$

і $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ якщо $k = 0$. З означення лінійного оператора $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ випливає, що $T(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, а отже $\ker(T) = \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{w}} - T(\vec{\boldsymbol{w}}) \in \ker(T)$ для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{V}$. Ми також маємо, що

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{v}}) + (\vec{\boldsymbol{v}} - T(\vec{\boldsymbol{v}})).$$

З цієї рівності випливає, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}.$$

Припустимо, що

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y},$$

де $\boldsymbol{Y}$ — підпростір з властивістю, що кожен вектор з $\boldsymbol{Y}$ є нормальним до $\boldsymbol{X}$. Зафіксуємо довільний вектор $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{Y}$. Тоді для довільного вектора $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ маємо, що $\vec{\boldsymbol{x}} \bullet \vec{\boldsymbol{y}} = 0$, а отже $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$. Навпаки, якщо $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, то оскільки $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{X}^{\perp} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$, використавши рівність $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{Y}$, отримуємо, що $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. ∎

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір V зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів X і Y, якщо він є прямою сумою просторів X і Y та кожен вектор простору X є ортогональним до кожного вектору простору Y.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір V зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів X і Y, то $Y = X^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай X — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_{n-k}$ такі, що

$$X = \{\overrightarrow{u} \in V \mid \overrightarrow{n}_i \bullet \overrightarrow{u} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору X. ∎

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір V зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів X і Y, якщо він є прямою сумою просторів X і Y та кожен вектор простору X є ортогональним до кожного вектору простору Y.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір V зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів X і Y, то $Y = X^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай X — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_{n-k}$ такі, що

$$X = \{\overrightarrow{u} \in V \mid \overrightarrow{n}_i \bullet \overrightarrow{u} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору X. ■

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір V зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів X і Y, якщо він є прямою сумою просторів X і Y та кожен вектор простору X є ортогональним до кожного вектору простору Y.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір V зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів X і Y, то $Y = X^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай X — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_{n-k}$ такі, що

$$X = \{\overrightarrow{u} \in V \mid \overrightarrow{n}_i \bullet \overrightarrow{u} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору X. ∎

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ■

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \vec{\boldsymbol{n}}_i \bullet \vec{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ■

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-k\right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Означення 1.6.9

Будемо говорити, що векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є *ортогональною прямою сумою* двох підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, якщо він є прямою сумою просторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ та кожен вектор простору $\boldsymbol{X}$ є ортогональним до кожного вектору простору $\boldsymbol{Y}$.

За теоремою 1.6.8 якщо векторний простір $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком є ортогональною прямою сумою підпросторів $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$. Іншим наслідком теореми 1.6.8 є те, що підпростори можна визначати неявно.

Теорема 1.6.10

Нехай $\boldsymbol{X}$ — k-вимірний підпростір n-вимірного векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді існують $n-k$ ортогональних векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$ такі, що

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{V} \mid \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n-k \right\}.$$

Доведення. Виберемо вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_{n-k}$, як ортонормовану базу для ортогонального доповнення підпростору $\boldsymbol{X}$. ∎

Тепер, нехай X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком і $\overrightarrow{v} \in V$. Оскільки $V = X \oplus X^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{v}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} \oplus \overrightarrow{y}$, де $\overrightarrow{x} \in X$ і $\overrightarrow{y} \in X^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{x} \in X$, який позначається через $\overrightarrow{v}_X^{\parallel}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{v} \in V$ на підпростір X, а вектор $\overrightarrow{y} \in X^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{v}_X^{\perp}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{v} \in V$ стосовно підпростору X.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір X векторного простору V йде мова, то через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{v}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{v}$ на підпростір X, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно підпростору X, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{v}_X^{\perp}$ вектора $\overrightarrow{v}$ по відношенню до підпростору X є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{v}$ на підпростір $X^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком і $\vec{v} \in V$. Оскільки $V = X \oplus X^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\vec{v}$ однозначно у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\vec{x} \in X$, який позначається через $\vec{v}_X^{\parallel}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\vec{v} \in V$ на підпростір X, а вектор $\vec{y} \in X^{\perp}$, який позначається через $\vec{v}_X^{\perp}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\vec{v} \in V$ стосовно підпростору X.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір X векторного простору V йде мова, то через $\vec{v}^{\parallel}$ і $\vec{v}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\vec{v}$ на підпростір X, і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\vec{v}_X^{\perp}$ вектора $\vec{v}$ по відношенню до підпростору X є також ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на підпростір $X^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\vec{v}$ однозначно у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\vec{x} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\vec{v}_{\boldsymbol{X}}^{\parallel}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\vec{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\vec{v}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\vec{v}^{\parallel}$ і $\vec{v}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\vec{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\vec{v}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$ вектора $\vec{v}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \oplus \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\parallel}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \oplus \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\|}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\|}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\vec{v}$ однозначно у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\vec{x} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\vec{v}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\vec{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\vec{v}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\vec{v}^{\parallel}$ і $\vec{v}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\vec{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\vec{v}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\vec{v}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \oplus \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{v}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} \oplus \overrightarrow{y}$, де $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{v}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{v}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{v}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{v}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \oplus \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\parallel}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \oplus \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно. Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай X — підпростір векторного простору V зі скалярним добутком і $\vec{v} \in V$. Оскільки $V = X \oplus X^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\vec{v}$ однозначно у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\vec{x} \in X$, який позначається через $\vec{v}^{\,\parallel}_{X}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\vec{v} \in V$ на підпростір X, а вектор $\vec{y} \in X^{\perp}$, який позначається через $\vec{v}^{\,\perp}_{X}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\vec{v} \in V$ стосовно підпростору X.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір X векторного простору V йде мова, то через $\vec{v}^{\,\parallel}$ і $\vec{v}^{\,\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\vec{v}$ на підпростір X, і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, відповідно.

Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\vec{v}^{\,\perp}_{X}$ вектора $\vec{v}$ по відношенню до підпростору X є також ортогональною проекцією вектора $\vec{v}$ на підпростір $X^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \oplus \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.

Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \oplus \overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, де $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Тепер, нехай $\boldsymbol{X}$ — підпростір векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком і $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$. Оскільки $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$, то ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{v}$ однозначно у вигляді $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} \oplus \overrightarrow{y}$, де $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$.

Означення 1.6.11

Вище означений вектор $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$, який позначається через $\overrightarrow{v}_{\boldsymbol{X}}^{\parallel}$, називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, а вектор $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, який позначається через $\overrightarrow{v}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$, називається *ортогональним доповненням* вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Зауважимо, у випадку, коли відомо про який підпростір $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ йде мова, то через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$ і $\overrightarrow{v}^{\perp}$, відповідно, ми будемо позначати ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$, і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, відповідно.
Зауважимо, враховуючи симетрію операції прямої суми векторного простору зі скалярним добутком, то в означенні 1.6.11 ортогональне доповнення $\overrightarrow{v}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}$ вектора $\overrightarrow{v}$ по відношенню до підпростору $\boldsymbol{X}$ є також ортогональною проекцією вектора $\overrightarrow{v}$ на підпростір $\boldsymbol{X}^{\perp}$. Наступна теорема показує як обчислювати ортогональні проекції та ортогональні доповнення векторів.

Теорема 1.6.12

Нехай $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком ($k \geqslant 1$) і $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{v}^{\parallel} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\, \overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\, \overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\, \overrightarrow{n}_k \tag{1}$$

і

$$\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\, \overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\, \overrightarrow{n}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\, \overrightarrow{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\, \overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\, \overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\, \overrightarrow{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} \oplus \overrightarrow{y}$, де $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком ($k \geqslant 1$) і $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\overrightarrow{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то

$$\overrightarrow{v}^{\parallel} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \tag{1}$$

і

$$\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2, \ldots, \overrightarrow{n}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\overrightarrow{v} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} \oplus \overrightarrow{y}$, де $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{X}$ і $\overrightarrow{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком ($k \geqslant 1$) і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком ($k \geqslant 1$) і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (2). ■

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\,\vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\,\vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\,\vec{\boldsymbol{n}}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\,\vec{\boldsymbol{n}}_1 - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\,\vec{\boldsymbol{n}}_2 - \ldots - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\,\vec{\boldsymbol{n}}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\,\vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\,\vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\,\vec{\boldsymbol{n}}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} \oplus \vec{\boldsymbol{y}}$, де $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (2). ■

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ◻

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 - \ldots - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} \oplus \vec{\boldsymbol{y}}$, де $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k \qquad (1)$$

і

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 - \ldots - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} \oplus \vec{\boldsymbol{y}}$, де $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (2). ∎

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k \qquad (1)$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ■

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — довільна ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$. Якщо $\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір $\boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{\boldsymbol{v}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$, то

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k \qquad (1)$$

і

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 - \ldots - (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k. \qquad (2)$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}^{\perp}$. Оскільки $\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{n}}_k$ — ортонормована база підпростору $\boldsymbol{X}$, то визначивши лінійний оператор $T\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, який є проекцією на підпростір $\boldsymbol{X}$, за формулою:

$$T(\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_1)\, \vec{\boldsymbol{n}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_2)\, \vec{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_k)\, \vec{\boldsymbol{n}}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ у вигляді $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}} \oplus \vec{\boldsymbol{y}}$, де $\vec{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ і $\vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$, випливає рівність (2). ■

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Теорема 1.6.12

Нехай $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — довільна ортонормована база підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком $(k \geqslant 1)$ і $\vec{v} \in V$. Якщо $\vec{v}^{\parallel}$ — ортогональна проекція на підпростір X і $\vec{v}^{\perp}$ — і ортогональне доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно підпростору X, то

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k \tag{1}$$

і

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою 1.6.8 маємо, що $V = X \oplus X^{\perp}$. Оскільки $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_k$ — ортонормована база підпростору X, то визначивши лінійний оператор $T\colon V \to V$, який є проекцією на підпростір X, за формулою:

$$T(\vec{v}) = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\, \vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\, \vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\, \vec{n}_k,$$

отримуємо рівність (1). Також з однозначності розкладу вектора $\vec{v} \in V$ у вигляді $\vec{v} = \vec{x} \oplus \vec{y}$, де $\vec{x} \in X$ і $\vec{y} \in X^{\perp}$, випливає рівність (2). ■

Зауважимо, що у теоремі 1.6.12 суттєво, що ми маємо ортонормовану базу, інакше легко знайти приклади, які показують, що рівності (1) і (2) є хибними.

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ і $\overrightarrow{v}$ — довільні два вектори векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ і $\overrightarrow{v}$ — довільні два вектори векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ і $\overrightarrow{v}$ — довільні два вектори векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $\overrightarrow{v}$ — довільні два вектори векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільні два вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\vec{u} \neq \vec{0}$ і $\vec{v}$ — довільні два вектори векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$, яку ми будемо позначати через $\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$, яке будемо позначати через $\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{3}$$

і

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільні два вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\vec{u} \neq \vec{\mathbf{0}}$ і $\vec{v}$ — довільні два вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$, яку ми будемо позначати через $\vec{v}^{\,\parallel}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\,\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$, яке будемо позначати через $\vec{v}^{\,\perp}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\,\perp}$, визначаються за формулами

$$\vec{v}^{\,\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\,\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{3}$$

і

$$\vec{v}^{\,\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\,\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\,\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\vec{u} \neq \vec{0}$ і $\vec{v}$ — довільні два вектори векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$, яку ми будемо позначати через $\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$, яке будемо позначати через $\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{3}$$

і

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \tag{4}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\vec{u} \neq \vec{0}$ і $\vec{v}$ — довільні два вектори векторного простору V зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$, яку ми будемо позначати через $\vec{v}^{\,\|}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\,\|}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$, яке будемо позначати через $\vec{v}^{\,\perp}_{\vec{u}}$, або просто через $\vec{v}^{\,\perp}$, визначаються за формулами

$$\vec{v}^{\,\|}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\,\|} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{3}$$

і

$$\vec{v}^{\,\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\,\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\,\|} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $\overrightarrow{v}$ — довільні два вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}}$, або просто через $\overrightarrow{v}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільні два вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}. \tag{4}$$

Наступне означення формалізує деяку спільну термінологію.

Означення 1.6.13

Нехай $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — довільні два вектори векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Тоді *ортогональна проекція вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яку ми будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}$, і *ортогональне доповнення вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, яке будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$, або просто через $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}$, визначаються за формулами

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|} \tag{3}$$

і

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}\right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|}. \tag{4}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$.

Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$.

Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$. Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$.

Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\vec{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\vec{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$.

Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\vec{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\vec{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\vec{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$. Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\vec{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\vec{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\vec{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$.

Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\vec{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

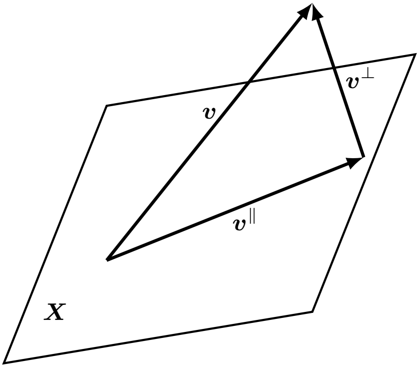
Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\vec{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\vec{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\vec{v}$ стосовно вектора $\vec{u}$. Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору X векторного простору V зі скалярним добутком, кожен вектор $\vec{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору X, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$.

Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору $\boldsymbol{X}$, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$. Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору $\boldsymbol{X}$, а друга ортогональна їй (див. рис.).

Очевидно, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$ є такою ж, як ортогональна проекція $\overrightarrow{v}$ на підпростір, який є лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{u}$, а, отже, ця ортогональна проекція насправді є лише особливим випадком означення, введеного раніше. Аналогічний коментар стосується ортогонального доповнення вектора $\overrightarrow{v}$ стосовно вектора $\overrightarrow{u}$. Інший спосіб погляду на те, що ми встановили, полягає в тому, що, для даного підпростору $\boldsymbol{X}$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком, кожен вектор $\overrightarrow{v}$ може бути розкладений на дві частини, одна "паралельна" простору $\boldsymbol{X}$, а друга ортогональна їй (див. рис.).



Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо

$$AA^T = A^T A = I,$$

тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо

$$AA^T = A^T A = I,$$

тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо

$$AA^T = A^T A = I,$$

тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Ми завершуємо цю лекцію поглядом на деякі дуже важливі класи матриць.

Означення 1.6.14

Дійсна $n \times n$-матриця A називається *ортогональною*, якщо
$$AA^T = A^T A = I,$$
тобто обернена матриця до такої матриці є транспонована до неї матриця.

Доведення тверджень наступної леми є безпосередніми наслідками означення ортогональних матриць і операції звичайного множення матриць.

Лема 1.6.15

(1) Транспонована до ортогональної матриці є ортогональною матрицею.

(2) Ортогональні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант ортогональної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх ортогональних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $GL(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $O(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $O(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $SO(n)$.

Групи $SO(n)$ і $O(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Означення 1.6.16

Група невироджених дійсних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*дійсною*) *лінійною групою*, і позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{R})$. Підгрупа ортогональних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{O}(n)$. Ортогональна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною ортогональною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{O}(n)$, яка складається з усіх спеціальних ортогональних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається через $\boldsymbol{SO}(n)$.

Групи $\boldsymbol{SO}(n)$ і $\boldsymbol{O}(n)$ відіграють важливу роль у багатьох областях математики і про них та про їх структуру відомо багато. Ось дві корисні характеризації ортогональних матриць.

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ■

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ■

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$.
Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Теорема 1.6.17

Існує взаємно однозначна відповідність між ортогональними матрицями та ортогональними базами векторного простору зі скалярним добутком.

Доведення. Якщо вважати рядки матриці векторами, то отримуємо відповідність поставивши кожній ортогональній $n \times n$-матриці базис в просторі $\mathbb{R}^n$, який складається з рядків цієї матриці. Подібну відповідність отримуємо з використанням стовпчиків матриці. З означення ортогональної матриці випливає, що скалярний добуток однакових рядків (стовпчиків) ортогональної матриці дорівнює 1, а добуток різних — 0. З вище сказаного випливає, що так визначене відображення ставить кожній ортогональній матриці ортонормовану базу векторного простору $\mathbb{R}^n$. Також очевидно, що таке відображення є бієктивним. ∎

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ і $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\overrightarrow{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \overrightarrow{u}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \overrightarrow{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

∎

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\vec{u}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\vec{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}a_{tj}.$$

■

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

∎

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Якщо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормована база і якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

■

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

■

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

■

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

∎

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

∎

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{\boldsymbol{u}}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\vec{\boldsymbol{u}}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\vec{\boldsymbol{u}}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}a_{tj}.$$

∎

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{u}}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{\boldsymbol{u}}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{\boldsymbol{u}}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

$\blacksquare$

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі V зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі V.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{u}}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{\boldsymbol{u}}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{\boldsymbol{u}}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

■

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ і $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{u}}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{\boldsymbol{u}}_j \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{\boldsymbol{u}}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

■

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Теорема 1.6.18

Нехай $n \geqslant 1$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — ортонормовані бази в дійсному векторному просторі $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком. Якщо

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{u}_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

то $A = (a_{ij})$ є ортогональною матрицею. Навпаки, нехай $A = (a_{ij})$ — ортогональна матриця. Якщо $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ортонормована база і якщо $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — вектори, які визначаються рівністю (5), то вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ є також ортонормованою базою у векторному просторі $\boldsymbol{V}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з наступної рівності

$$\delta_{st} = \vec{v}_s \bullet \vec{v}_t = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} \vec{u}_j\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj} \vec{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} a_{tj}.$$

∎

Символ Кронекера δ_{st} визначається так: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t; \\ 0, & \text{якщо } s \neq t. \end{cases}$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів “ортогональна матриця” на “унітарна матриця”.

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів “ортогональна матриця” на “унітарна матриця”.

Лема 1.6.15**

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо
$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$
тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів “ортогональна матриця” на “унітарна матриця”.

Лема 1.6.15*

1. Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.
2. Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.
3. Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.
4. Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо
$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$
тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів “ортогональна матриця” на “унітарна матриця”.

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів “ортогональна матриця” на “унітарна матриця”.

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміру з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо
$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$
тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\, A^T = A^T\, \overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо
$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$
тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів “ортогональна матриця” на “унітарна матриця”.

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо
$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$
тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо
$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$
тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Існує комплексний аналог ортогональної дійсної матриці.

Означення 1.6.19

Комплексна $n \times n$-матриця A називається *унітарною*, якщо

$$\overline{A}\,A^T = A^T\,\overline{A} = I,$$

тобто оберненою до такої матриці є саме комплексно спряжена транспонована до неї матриця.

Твердження леми 1.6.15 залишається правильним, якщо ми замінимо вислів "ортогональна матриця" на "унітарна матриця".

Лема 1.6.15*

(1) Транспонована до унітарної матриці є унітарною матрицею.

(2) Унітарні матриці однакового розміру утворюють групу стосовно операції множення матриць.

(3) Детермінант унітарної матриці дорівнює ± 1.

(4) Множина всіх унітарних матриць однакового розміну з детермінантом $+1$ є підгрупою групи унітарних матриць.

Зокрема, унітарні матриці утворюють групу подібно до ортогональних матриць.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $GL(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $U(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $U(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $SU(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку.
Ми опускаємо ці деталі.

Означення 1.6.20

Група невироджених комплексних $n \times n$-матриць стосовно операції множення матриць називається (*комплексною*) *лінійною групою*, і ця група позначається через $\boldsymbol{GL}(n, \mathbb{C})$. Підгрупа унітарних $n \times n$-матриць лінійної групи називається *унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{U}(n)$. Унітарна матриця, детермінант якої дорівнює $+1$ називається *спеціальною унітарною матрицею*. Підгрупа в групі $\boldsymbol{U}(n)$, яка складається з усіх спеціальних унітарних $n \times n$-матриць, називається *спеціальною унітарною групою* і позначається через $\boldsymbol{SU}(n)$.

Аналоги теорем 1.6.17 і 1.6.18 справджуються в комплексному випадку. Ми опускаємо ці деталі.

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору X в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{b}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{b}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{b}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{b}_1|}\overrightarrow{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{b}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{10+20}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= (1,2,3,4),$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1,3,-3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}} \cdot (-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1).$$

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{b}} &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) = \\ &= \frac{10+20}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) = \\ &= (1,2,3,4), \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1,3,-3,1).\end{aligned}$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}} \cdot (-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1).$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{b}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{b}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{b}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{b}_1\right|}\overrightarrow{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{b} &= \left(\overrightarrow{b}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\ &= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\ &= (1,2,3,4), \\ \overrightarrow{w} &= \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b} = (0-1,5-2,0-3,5-4) = (-1,3,-3,1).\end{aligned}$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{b}_1\right|}\overrightarrow{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{b}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 = \frac{0\cdot1+5\cdot2+0\cdot3+5\cdot4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= (1,2,3,4),$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1,3,-3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= (1,2,3,4),$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1,3,-3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{b}_1|}\overrightarrow{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{b}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= (1,2,3,4),$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1,3,-3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1|}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{b}} &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\
&= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\
&= (1,2,3,4), \\
\overrightarrow{\boldsymbol{w}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (0-1,5-2,0-3,5-4) = (-1,3,-3,1).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів
$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \vec{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо
$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{b}}_1|}\vec{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо
$$\vec{\boldsymbol{b}} = \left(\vec{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{0\cdot1+5\cdot2+0\cdot3+5\cdot4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$
$$= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$
$$= (1,2,3,4),$$
$$\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{b}}_2 - \vec{\boldsymbol{b}} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1,3,-3,1).$$

Тоді
$$\vec{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{w}}|}\vec{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{b}} &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{0\cdot1+5\cdot2+0\cdot3+5\cdot4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\ &= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\ &= (1,2,3,4), \\ \overrightarrow{\boldsymbol{w}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (0-1,5-2,0-3,5-4) = (-1,3,-3,1).\end{aligned}$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1|}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= (1,2,3,4),$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (0-1,5-2,0-3,5-4) = (-1,3,-3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Приклад 1.6.21

Знайдіть ортонормовану базу для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$, який є лінійною оболонкою векторів

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \vec{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14).$$

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта, отримуємо

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{b}}_1|}\vec{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4).$$

Для отримання вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{b}} &= \left(\vec{\boldsymbol{b}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1\right)\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{0\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\
&= \frac{10+20}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) = \\
&= (1,2,3,4), \\
\vec{\boldsymbol{w}} &= \vec{\boldsymbol{b}}_2 - \vec{\boldsymbol{b}} = (0-1, 5-2, 0-3, 5-4) = (-1,3,-3,1).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\vec{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{w}}|}\vec{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2+1^2}}\cdot(-1,3,-3,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(-1,3,-3,1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_3$ покладемо

$$\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 + \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_2\right)\overrightarrow{u}_2 =$$

$$= \frac{8\cdot 1 + 10\cdot 2 + (-8)\cdot 3 + 14\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) +$$

$$+ \frac{8\cdot(-1) + 10\cdot 3 + (-8)\cdot(-3) + 14\cdot 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) =$$

$$= \frac{8+20-24+56}{30} \cdot (1,2,3,4) + \frac{-8+30+24+14}{20} \cdot (-1,3,-3,1) =$$

$$= \frac{60}{30} \cdot (1,2,3,4) + \frac{60}{20} \cdot (-1,3,-3,1) =$$

$$= 2 \cdot (1,2,3,4) + 3 \cdot (-1,3,-3,1) =$$

$$= (2,4,6,8) + (-3,9,-9,3) =$$

$$= (-1,13,-3,11),$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b}_3 - \overrightarrow{b} = (8,10,-8,14) - (-1,13,-3,11) = (9,-3,-5,3).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_3 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{81+9+25+9}} \cdot (9,-3,-5,3) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{124}} \cdot (9,-3,-5,3) = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_3$ покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} &= \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 + \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_2\right)\overrightarrow{u}_2 = \\
&= \frac{8\cdot 1 + 10\cdot 2 + (-8)\cdot 3 + 14\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
&\quad + \frac{8\cdot(-1) + 10\cdot 3 + (-8)\cdot(-3) + 14\cdot 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{8+20-24+56}{30}\cdot(1,2,3,4) + \frac{-8+30+24+14}{20}\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{60}{30}\cdot(1,2,3,4) + \frac{60}{20}\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= 2\cdot(1,2,3,4) + 3\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= (2,4,6,8) + (-3,9,-9,3) = \\
&= (-1,13,-3,11),
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b}_3 - \overrightarrow{b} = (8,10,-8,14) - (-1,13,-3,11) = (9,-3,-5,3).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_3 &= \frac{1}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{81+9+25+9}}\cdot(9,-3,-5,3) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{124}}\cdot(9,-3,-5,3) = \frac{1}{2\sqrt{31}}\cdot(9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_3$ покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} &= \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 + \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_2\right)\overrightarrow{u}_2 = \\
&= \frac{8\cdot 1 + 10\cdot 2 + (-8)\cdot 3 + 14\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
&\quad + \frac{8\cdot(-1) + 10\cdot 3 + (-8)\cdot(-3) + 14\cdot 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{8+20-24+56}{30}\cdot(1,2,3,4) + \frac{-8+30+24+14}{20}\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{60}{30}\cdot(1,2,3,4) + \frac{60}{20}\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= 2\cdot(1,2,3,4) + 3\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= (2,4,6,8) + (-3,9,-9,3) = \\
&= (-1,13,-3,11),
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b}_3 - \overrightarrow{b} = (8,10,-8,14) - (-1,13,-3,11) = (9,-3,-5,3).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_3 &= \frac{1}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{81+9+25+9}}\cdot(9,-3,-5,3) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{124}}\cdot(9,-3,-5,3) = \frac{1}{2\sqrt{31}}\cdot(9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_3$ покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} &= \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 + \left(\overrightarrow{b}_3 \bullet \overrightarrow{u}_2\right)\overrightarrow{u}_2 = \\
&= \frac{8\cdot 1 + 10\cdot 2 + (-8)\cdot 3 + 14\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
&\quad + \frac{8\cdot(-1) + 10\cdot 3 + (-8)\cdot(-3) + 14\cdot 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{8+20-24+56}{30} \cdot (1,2,3,4) + \frac{-8+30+24+14}{20} \cdot (-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{60}{30} \cdot (1,2,3,4) + \frac{60}{20} \cdot (-1,3,-3,1) = \\
&= 2\cdot(1,2,3,4) + 3\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= (2,4,6,8) + (-3,9,-9,3) = \\
&= (-1,13,-3,11), \\
\overrightarrow{w} &= \overrightarrow{b}_3 - \overrightarrow{b} = (8,10,-8,14) - (-1,13,-3,11) = (9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_3 &= \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{81+9+25+9}} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{124}} \cdot (9,-3,-5,3) = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Для отримання вектора $\vec{u}_3$ покладемо

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \left(\vec{b}_3 \bullet \vec{u}_1\right)\vec{u}_1 + \left(\vec{b}_3 \bullet \vec{u}_2\right)\vec{u}_2 = \\
&= \frac{8\cdot 1 + 10\cdot 2 + (-8)\cdot 3 + 14\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
&\quad + \frac{8\cdot(-1) + 10\cdot 3 + (-8)\cdot(-3) + 14\cdot 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{8+20-24+56}{30}\cdot(1,2,3,4) + \frac{-8+30+24+14}{20}\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= \frac{60}{30}\cdot(1,2,3,4) + \frac{60}{20}\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= 2\cdot(1,2,3,4) + 3\cdot(-1,3,-3,1) = \\
&= (2,4,6,8) + (-3,9,-9,3) = \\
&= (-1,13,-3,11), \\
\vec{w} &= \vec{b}_3 - \vec{b} = (8,10,-8,14) - (-1,13,-3,11) = (9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\vec{u}_3 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{81+9+25+9}} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{124}} \cdot (9,-3,-5,3) = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\left|\overrightarrow{u}_1\right| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1,$$
$$\left|\overrightarrow{u}_2\right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1,$$
$$\left|\overrightarrow{u}_3\right| = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) + 4\cdot 1\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(-1+6-9+4\right) = 0,\\
\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{u}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left(1\cdot 9 + 2\cdot(-3) + 3\cdot(-5) + 4\cdot 3\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left(9-6-15+12\right) = 0
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{u}_3 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left((-1)\cdot 9 + 3\cdot(-3) + (-3)\cdot(-5) + 1\cdot 3\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left(-9-9+15+3\right) = 0.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1,$$
$$|\vec{u}_2| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1,$$
$$|\vec{u}_3| = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (-1+6-9+4) = 0, \\
\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left(1 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (9-6-15+12) = 0
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left((-1) \cdot 9 + 3 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-5) + 1 \cdot 3\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (-9-9+15+3) = 0.
\end{aligned}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1,$$
$$|\vec{u}_2| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1,$$
$$|\vec{u}_3| = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (-1+6-9+4) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (1 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (9-6-15+12) = 0\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} ((-1) \cdot 9 + 3 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-5) + 1 \cdot 3) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (-9-9+15+3) = 0.\end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\left|\vec{u}_1\right| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1,$$
$$\left|\vec{u}_2\right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1,$$
$$\left|\vec{u}_3\right| = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,$$

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) + 4\cdot 1) = \\ = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (-1+6-9+4) = 0,$$

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (1\cdot 9 + 2\cdot(-3) + 3\cdot(-5) + 4\cdot 3) = \\ = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (9-6-15+12) = 0$$

і

$$\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} ((-1)\cdot 9 + 3\cdot(-3) + (-3)\cdot(-5) + 1\cdot 3) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (-9-9+15+3) = 0.$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1,$$
$$|\vec{u}_2| = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1,$$
$$|\vec{u}_3| = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} (1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) + 4\cdot 1) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} (-1+6-9+4) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} (1\cdot 9 + 2\cdot(-3) + 3\cdot(-5) + 4\cdot 3) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} (9-6-15+12) = 0\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} ((-1)\cdot 9 + 3\cdot(-3) + (-3)\cdot(-5) + 1\cdot 3) = \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} (-9-9+15+3) = 0.\end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\left|\vec{u}_1\right| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1,$$
$$\left|\vec{u}_2\right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1,$$
$$\left|\vec{u}_3\right| = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) + 4\cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (-1+6-9+4) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (1\cdot 9 + 2\cdot(-3) + 3\cdot(-5) + 4\cdot 3) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (9-6-15+12) = 0\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} ((-1)\cdot 9 + 3\cdot(-3) + (-3)\cdot(-5) + 1\cdot 3) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (-9-9+15+3) = 0.\end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\left|\vec{u}_1\right| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{1+4+9+16} = 1,$$
$$\left|\vec{u}_2\right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+9+9+1} = 1,$$
$$\left|\vec{u}_3\right| = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot \sqrt{81+9+25+9} = 1,$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} (-1+6-9+4) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left(1 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (9-6-15+12) = 0\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)\right) \bullet \left(\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3)\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} \left((-1) \cdot 9 + 3 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-5) + 1 \cdot 3\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{31}} (-9-9+15+3) = 0.\end{aligned}$$

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір X є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{b}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{b}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{b}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{u} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $X^{\perp}$ до підпростору X в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{u}\|_{\overrightarrow{b}_1}$ вектора $\overrightarrow{u}$ на вектор $\overrightarrow{b}_1$.

(3) Знайдіть ортогональне доповнення $\overrightarrow{u}\bot_{\overrightarrow{b}_1}$ вектора $\overrightarrow{u}$ стосовно вектора $\overrightarrow{b}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{u}\|_X$ вектора $\overrightarrow{u}$ на підпростір X.

(5) Знайдіть ортогональне доповнення $\overrightarrow{u}\bot_X$ вектора $\overrightarrow{u}$ стосовно підпростору X.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір X є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{b}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \overrightarrow{b}_2 = (0, 5, 0, 5), \quad \overrightarrow{b}_3 = (8, 10, -8, 14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{u} = (4, 3, 2, 1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $X^\perp$ до підпростору X в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1}$ вектора $\overrightarrow{u}$ на вектор $\overrightarrow{b}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{u}^{\perp}_{\overrightarrow{b}_1}$ вектора $\overrightarrow{u}$ стосовно вектора $\overrightarrow{b}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{u}^{\parallel}_{X}$ вектора $\overrightarrow{u}$ на підпростір X.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{u}^{\perp}_{X}$ вектора $\overrightarrow{u}$ стосовно підпростору X.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0, 5, 0, 5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8, 10, -8, 14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4, 3, 2, 1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0, 5, 0, 5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8, 10, -8, 14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4, 3, 2, 1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Приклад 1.6.22

Нехай векторний простір $\boldsymbol{X}$ є лінійною оболонкою векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 = (1,2,3,4), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 = (0,5,0,5), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_3 = (8,10,-8,14),$$

в $\mathbb{R}^4$ (див. приклад 1.6.21) і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (4,3,2,1)$.

(1) Знайдіть ортонормовану базу ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ до підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$.

(2) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(3) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1$.

(4) Знайдіть ортогональну проекцію $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ на підпростір $\boldsymbol{X}$.

(5) Знайдіть ортогональна доповнення $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\perp}_{\boldsymbol{X}}$ вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ стосовно підпростору $\boldsymbol{X}$.

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),\\
\overrightarrow{u}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),\\
\overrightarrow{u}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3),
\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ паралельний деякому вектору $\overrightarrow{a} = (a,b,c,d)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{a}$ ортогональний до елементів бази $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$, то

$$\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_3 \bullet \overrightarrow{a} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) &= 0;\\
\tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) &= 0;\\
\tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) &= 0.
\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),\\ \overrightarrow{u}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),\\ \overrightarrow{u}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\overrightarrow{a} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{a}$ ортогональний до елементів бази $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$, то

$$\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_3 \bullet \overrightarrow{a} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),$$
$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),$$
$$\overrightarrow{u}_3 = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\overrightarrow{a} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{a}$ ортогональний до елементів бази $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$, то

$$\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_3 \bullet \overrightarrow{a} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) = 0.$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),\\ \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),\\ \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\overrightarrow{a} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{a}$ ортогональний до елементів бази $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3 \bullet \overrightarrow{a} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),\\ \overrightarrow{u}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),\\ \overrightarrow{u}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\overrightarrow{a} = (a,b,c,d)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{a}$ ортогональний до елементів бази $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$, то

$$\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_2 \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_3 \bullet \overrightarrow{a} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a+2b+3c+4d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a+3b-3c+1d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a-3b-5c+3d) &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),\\ \vec{u}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),\\ \vec{u}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^\perp$ паралельний деякому вектору $\vec{d} = (a,b,c,d)$. Оскільки вектор $\vec{d}$ ортогональний до елементів бази $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, то

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{d} = \vec{u}_2 \bullet \vec{d} = \vec{u}_3 \bullet \vec{d} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a+2b+3c+4d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a+3b-3c+1d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a-3b-5c+3d) &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),\\ \vec{\boldsymbol{u}}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),\\ \vec{\boldsymbol{u}}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\vec{\boldsymbol{d}} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\vec{\boldsymbol{d}}$ ортогональний до елементів бази $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, $\vec{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{u}}_3 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),\\ \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),\\ \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ ортогональний до елементів бази $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3 = \frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{d}} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{d}}$ ортогональний до елементів бази $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{d}} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) = 0.$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),\\ \vec{\boldsymbol{u}}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),\\ \vec{\boldsymbol{u}}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\vec{\boldsymbol{d}} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\vec{\boldsymbol{d}}$ ортогональний до елементів бази $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, $\vec{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{u}}_3 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) &= 0;\\ \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. (1) З прикладу 1.6.21 випливає, що підпростір $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^4$ має базу, яка складається з трьох векторів

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4), \\
\vec{\boldsymbol{u}}_2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1), \\
\vec{\boldsymbol{u}}_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3),
\end{aligned}$$

а, отже, ортогональне доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{R}^4$. Тому кожен вектор ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ паралельний деякому вектору $\vec{\boldsymbol{d}} = (a, b, c, d)$. Оскільки вектор $\vec{\boldsymbol{d}}$ ортогональний до елементів бази $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, $\vec{\boldsymbol{u}}_3$, то

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{u}}_2 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{u}}_3 \bullet \vec{\boldsymbol{d}} = 0.$$

З останніх рівностей та означення точкового добутку випливає, що виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1a + 2b + 3c + 4d) &= 0; \\
\tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1a + 3b - 3c + 1d) &= 0; \\
\tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9a - 3b - 5c + 3d) &= 0.
\end{aligned}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ -a+3b-3c+d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ 5b+5d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a+2b+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a-3b-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2d+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a+3d-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ -a+3b-3c+d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ 5b+5d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a+2b+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a-3b-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2d+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a+3d-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ -a+3b-3c+d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ 5b+5d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a+2b+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a-3b-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2d+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a+3d-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ -a+3b-3c+d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ 5b+5d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a+2b+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a-3b-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2d+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a+3d-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ -a + 3b - 3c + d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ 5b + 5d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a + 2b + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a - 3b - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2d + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a + 3d - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a - 5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ -a + 3b - 3c + d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ 5b + 5d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a + 2b + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a - 3b - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2d + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a + 3d - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a - 5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ -a + 3b - 3c + d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ 5b + 5d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a + 2b + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a - 3b - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2d + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a + 3d - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a - 5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ -a+3b-3c+d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d &= 0; \\ 5b+5d &= 0; \\ 9a-3b-5c+3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a+2b+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a-3b-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2d+3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a+3d-5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Отже, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ -a + 3b - 3c + d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0. \end{cases}$$

До другого рівняння цієї системи додамо перше рівняння та запишемо цю суму замість другого рівняння:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d &= 0; \\ 5b + 5d &= 0; \\ 9a - 3b - 5c + 3d &= 0, \end{cases}$$

а отже маємо, провівши послідовні обчислення, що

$$\begin{cases} a + 2b + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a - 3b - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2d + 3c &= -4d; \\ b &= -d; \\ 9a + 3d - 5c &= -3d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a - 5c &= -6d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a - 5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a + 27c &= -18d; \\ 9a - 5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a + 27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a + 3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - \frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ b &= -d; \\ 9a-5c &= -6d. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 9 та поміняємо місцями друге та третє рівняння

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ 9a-5c &= -6d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

і від другого рівняння віднімемо перше

$$\begin{cases} 9a+27c &= -18d; \\ -32c &= 12d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

а отже маємо

$$\begin{cases} a+3c &= -2d; \\ c &= -\frac{12}{32}d = -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{9}{8}d &= -2d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= -\frac{7}{8}d; \\ c &= -\frac{3}{8}d; \\ b &= -d. \end{cases}$$

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{r} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{r}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{r}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{r}\right|}\overrightarrow{r} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{r} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{r}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{r}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{r}\right|}\overrightarrow{r} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{r} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $X^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{r}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{r}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{r}\right|}\overrightarrow{r} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $X^{\perp}$ простору X.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d=-8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{7^2+8^2+3^2+(-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

Таким чином, вектор $\left(-\frac{7}{8}d, -d, -\frac{3}{8}d, d\right)$, де d — довільне дійсне число, є розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. Тоді кожен елемент з лінійної оболонки цього вектора є також розв'язком нашої системи лінійних рівнянь. З вище сказаного випливає, що для значення $d = -8$, ця лінійна оболонка збігається з лінійною оболонкою вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (7, 8, 3, -8)$. Отже, $\boldsymbol{X}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$. Тоді одиничний вектор

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 8^2 + 3^2 + (-8)^2}}(7, 8, 3, -8) = \frac{1}{\sqrt{186}}(7, 8, 3, -8)$$

є ортонормованою базою ортогонального доповнення $\boldsymbol{X}^{\perp}$ простору $\boldsymbol{X}$.

(2) За формулою (3)

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (3)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = \left(\vec{u} \bullet \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\right) \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)=$$

$$= \frac{4\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30}\cdot(1,2,3,4) = \frac{2}{3}\cdot(1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (4)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{b}_1} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},0,-\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (3)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = \left(\vec{u} \bullet \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\right)\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)=$$

$$= \frac{4\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30}\cdot(1,2,3,4) = \frac{2}{3}\cdot(1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (4)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{b}_1} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},0,-\frac{5}{3}\right).$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

(2) За формулою (3)

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (3)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = \left(\vec{u} \bullet \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\right) \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) = \frac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (4)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{b}_1} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right).$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

(2) За формулою (3)

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (3)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = \left(\vec{u} \bullet \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\right) \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) = \frac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad (4)$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{b}_1} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = \left(\overrightarrow{u} \bullet \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|}\right) \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)=$$

$$= \frac{4\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30}\cdot(1,2,3,4) = \frac{2}{3}\cdot(1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{4}$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\perp}_{\overrightarrow{b}_1} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},0,-\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{3}$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = \left(\vec{u} \bullet \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\right) \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) = \frac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{4}$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{b}_1} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \qquad (3)$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = \left(\overrightarrow{u} \bullet \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|}\right) \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) = \frac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \qquad (4)$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\perp}_{\overrightarrow{b}_1} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = \left(\overrightarrow{u} \bullet \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|}\right) \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) = \frac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{4}$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\perp}_{\overrightarrow{b}_1} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{3}$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = \left(\vec{u} \bullet \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\right) \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{4\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30}\cdot(1,2,3,4) = \frac{2}{3}\cdot(1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{4}$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{b}_1} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},0,-\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\parallel} = \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{3}$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = \left(\overrightarrow{u} \bullet \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|}\right) \frac{\overrightarrow{b}_1}{|\overrightarrow{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) = \frac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\overrightarrow{v}^{\perp}_{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}^{\parallel} = \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \bullet \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right) \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \tag{4}$$

маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\perp}_{\overrightarrow{b}_1} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}^{\parallel}_{\overrightarrow{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right).$$

(2) За формулою (3)

$$\vec{v}^{\parallel}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\parallel} = \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{3}$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = \left(\vec{u} \bullet \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\right) \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} =$$

$$= \left((4,3,2,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}\cdot(1,2,3,4)=$$

$$=\frac{4\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot(1,2,3,4) =$$

$$=\frac{20}{30}\cdot(1,2,3,4) = \frac{2}{3}\cdot(1,2,3,4) = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right).$$

(3) За формулою (4)

$$\vec{v}^{\perp}_{\vec{u}} = \vec{v}^{\perp} = \vec{v} - \vec{v}^{\parallel} = \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{4}$$

маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{b}_1} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\vec{b}_1} = (4,3,2,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2,\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},0,-\frac{5}{3}\right).$$

(4) За формулою (1)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),$$
$$\overrightarrow{n}_2 = \overrightarrow{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),$$
$$\overrightarrow{n}_3 = \overrightarrow{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{20}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9, -3, -5, 3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{2 \cdot 31 + 45 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{4 \cdot 31 - 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{2 \cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8 \cdot 31 + 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(4) За формулою (1)

$$\vec{v}^{\,\|} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\,\|}_{\boldsymbol{X}} = (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\vec{n}_1 = \vec{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),$$
$$\vec{n}_2 = \vec{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),$$
$$\vec{n}_3 = \vec{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\,\|}_{\boldsymbol{X}} = {} & \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) + \\
& + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \\
& + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
= {} & \tfrac{20}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
= {} & \tfrac{2}{3} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9, -3, -5, 3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
= {} & \left(\tfrac{2 \cdot 31 + 45 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{4 \cdot 31 - 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{2 \cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8 \cdot 31 + 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}\right) = \\
= {} & \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(4) За формулою (1)

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{X} = (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в X. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\vec{n}_1 = \vec{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),$$
$$\vec{n}_2 = \vec{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),$$
$$\vec{n}_3 = \vec{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\parallel}_{X} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
&= \tfrac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1,3,-3,1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9,-3,-5,3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{2\cdot 31 + 45\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{4\cdot 31 - 15\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{2\cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8\cdot 31 + 15\cdot 3}{3\cdot 31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

(4) За формулою (1)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\, \overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\, \overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\, \overrightarrow{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{X} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\, \overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\, \overrightarrow{n}_2 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_k)\, \overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в X. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n}_1 &= \overrightarrow{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),\\
\overrightarrow{n}_2 &= \overrightarrow{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),\\
\overrightarrow{n}_3 &= \overrightarrow{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3).
\end{aligned}$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{\parallel}_{X} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{20}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9, -3, -5, 3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{2 \cdot 31 + 45 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{4 \cdot 31 - 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{2 \cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8 \cdot 31 + 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(4) За формулою (1)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{X} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в X. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),$$
$$\overrightarrow{n}_2 = \overrightarrow{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),$$
$$\overrightarrow{n}_3 = \overrightarrow{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{\parallel}_{X} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{20}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9, -3, -5, 3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{2 \cdot 31 + 45 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{4 \cdot 31 - 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{2 \cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8 \cdot 31 + 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(4) За формулою (1)

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\vec{n}_1 = \vec{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),$$
$$\vec{n}_2 = \vec{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),$$
$$\vec{n}_3 = \vec{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1)\cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot 1)\cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
&= \tfrac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1,3,-3,1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9,-3,-5,3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{2\cdot 31 + 45\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{4\cdot 31 - 15\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{2\cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8\cdot 31 + 15\cdot 3}{3\cdot 31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

(4) За формулою (1)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),$$
$$\overrightarrow{n}_2 = \overrightarrow{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),$$
$$\overrightarrow{n}_3 = \overrightarrow{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4)+\\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1)\cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1)+\\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot 1)\cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3) =\\
&= \tfrac{20}{30}\cdot(1,2,3,4) + \tfrac{0}{20}\cdot(-1,3,-3,1) + \tfrac{20}{124}\cdot(9,-3,-5,3) =\\
&= \tfrac{2}{3}\cdot(1,2,3,4) + \tfrac{5}{31}\cdot(9,-3,-5,3) = \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3}-\tfrac{15}{31}, 2-\tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3}+\tfrac{15}{31}\right) =\\
&= \left(\tfrac{2\cdot 31+45\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{4\cdot 31-15\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{2\cdot 31-25}{31}, \tfrac{8\cdot 31+15\cdot 3}{3\cdot 31}\right) =\\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(4) За формулою (1)

$$\vec{v}^{\,\|} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\,\|}_{\boldsymbol{X}} = (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\begin{aligned}
\vec{n}_1 &= \vec{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),\\
\vec{n}_2 &= \vec{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),\\
\vec{n}_3 &= \vec{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\,\|}_{\boldsymbol{X}} = {} & \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
& + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) + \\
& + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
= {} & \tfrac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1,3,-3,1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
= {} & \tfrac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9,-3,-5,3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
= {} & \left(\tfrac{2\cdot 31 + 45\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{4\cdot 31 - 15\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{2\cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8\cdot 31 + 15\cdot 3}{3\cdot 31}\right) = \\
= {} & \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

(4) За формулою (1)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^{\parallel} = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 + \ldots + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1)\, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2)\, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 + (\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_k)\, \overrightarrow{\boldsymbol{n}}_3,$$

де $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_1 &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),\\
\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_2 &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),\\
\overrightarrow{\boldsymbol{n}}_3 &= \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3).
\end{aligned}$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) +\\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1) +\\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3) =\\
&= \tfrac{20}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9, -3, -5, 3) =\\
&= \tfrac{2}{3} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9, -3, -5, 3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) =\\
&= \left(\tfrac{2\cdot 31 + 45 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{4 \cdot 31 - 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}, \tfrac{2 \cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8 \cdot 31 + 15 \cdot 3}{3 \cdot 31}\right) =\\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

(4) За формулою (1)

$$\overrightarrow{v}^{\parallel} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + \ldots + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \qquad (1)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\parallel}_{X} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в X. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n}_1 &= \overrightarrow{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4),\\
\overrightarrow{n}_2 &= \overrightarrow{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1),\\
\overrightarrow{n}_3 &= \overrightarrow{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3).
\end{aligned}$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{\parallel}_{X} = {} & \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1,2,3,4) + \\
& + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1,3,-3,1) + \\
& + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
= {} & \tfrac{20}{30} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1,3,-3,1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9,-3,-5,3) = \\
= {} & \tfrac{2}{3} \cdot (1,2,3,4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9,-3,-5,3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
= {} & \left(\tfrac{2\cdot 31 + 45\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{4\cdot 31 - 15\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{2\cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8\cdot 31 + 15\cdot 3}{3\cdot 31}\right) = \\
= {} & \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(4) За формулою (1)

$$\vec{v}^{\parallel} = (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + \ldots + (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \tag{1}$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 + (\vec{u} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. Враховуючи задачу (1) прикладу, покладемо

$$\vec{n}_1 = \vec{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4),$$
$$\vec{n}_2 = \vec{u}_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1),$$
$$\vec{n}_3 = \vec{u}_3 = \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + 3\cdot 1) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{31}} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{20}{30} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{0}{20} \cdot (-1, 3, -3, 1) + \tfrac{20}{124} \cdot (9, -3, -5, 3) = \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot (1, 2, 3, 4) + \tfrac{5}{31} \cdot (9, -3, -5, 3) = \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{45}{31}, \tfrac{4}{3} - \tfrac{15}{31}, 2 - \tfrac{25}{31}, \tfrac{8}{3} + \tfrac{15}{31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{2\cdot 31 + 45\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{4\cdot 31 - 15\cdot 3}{3\cdot 31}, \tfrac{2\cdot 31 - 25}{31}, \tfrac{8\cdot 31 + 15\cdot 3}{3\cdot 31}\right) = \\
&= \left(\tfrac{197}{93}, \tfrac{79}{93}, \tfrac{37}{31}, \tfrac{293}{93}\right).
\end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} = \vec{u} - (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_3)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\mathbf{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} &= \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\mathbf{X}} = \\
&= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).
\end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}_{\mathbf{X}}^{\perp} = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_3)\,\overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\mathbf{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}_{\mathbf{X}}^{\perp} &= \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}_{\mathbf{X}}^{\parallel} = \\ &= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\ &= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\ &= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).\end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_3)\,\overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} &= \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}^{\parallel}_{\mathbf{X}} = \\
&= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).
\end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}_{\mathbf{X}}^{\perp} = \vec{u} - (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_3)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\mathbf{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{\mathbf{X}}^{\perp} &= \vec{u} - \vec{u}_{\mathbf{X}}^{\parallel} = \\
&= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).
\end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}_{\mathbf{X}}^{\perp} = \vec{u} - (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_3)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\mathbf{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{\mathbf{X}}^{\perp} &= \vec{u} - \vec{u}_{\mathbf{X}}^{\parallel} = \\
&= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).
\end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\, \overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\, \overrightarrow{n}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\, \overrightarrow{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\, \overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\, \overrightarrow{n}_2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_3)\, \overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} &= \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}^{\parallel}_{\mathbf{X}} = \\
&= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).
\end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}_k)\,\overrightarrow{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\overrightarrow{u}^{\perp}_{\boldsymbol{X}} = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_1)\,\overrightarrow{n}_1 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_2)\,\overrightarrow{n}_2 - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{n}_3)\,\overrightarrow{n}_3,$$

де $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, $\overrightarrow{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}^{\perp}_{\boldsymbol{X}} &= \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = \\ &= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\ &= \left(\frac{4 \cdot 93 - 197}{93}, \frac{3 \cdot 93 - 79}{93}, \frac{2 \cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\ &= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).\end{aligned}$$

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази, II

(5) За формулою (2)

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\boldsymbol{X}} = \vec{u} - (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_3)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned} \vec{u}^{\perp}_{\boldsymbol{X}} = \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\boldsymbol{X}} = \\ &= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\ &= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\ &= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right). \end{aligned}$$

(5) За формулою (2)

$$\vec{v}^{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{v} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - \ldots - (\vec{v} \bullet \vec{n}_k)\,\vec{n}_k \qquad (2)$$

з теореми 1.6.12 маємо, що

$$\vec{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} = \vec{u} - (\vec{u} \bullet \vec{n}_1)\,\vec{n}_1 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_2)\,\vec{n}_2 - (\vec{u} \bullet \vec{n}_3)\,\vec{n}_3,$$

де $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ — довільна ортонормована база в $\boldsymbol{X}$. А, отже,

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\perp}_{\mathbf{X}} &= \vec{u} - \vec{u}^{\parallel}_{\mathbf{X}} = \\
&= (4,3,2,1) - \left(\frac{197}{93}, \frac{79}{93}, \frac{37}{31}, \frac{293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{4\cdot 93 - 197}{93}, \frac{3\cdot 93 - 79}{93}, \frac{2\cdot 31 - 37}{31}, \frac{93 - 293}{93}\right) = \\
&= \left(\frac{175}{93}, \frac{200}{93}, \frac{25}{31}, \frac{200}{93}\right).
\end{aligned}$$

Дякую за увагу!