

Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік



Лекція 16: Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку.

Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір \mathbb{R}^n " або "векторний підпростір \mathbb{C}^n ", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$.

Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною базою в V* , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою базою*. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення \bullet для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожен фразу “векторний простір” фразою “векторний підпростір \mathbb{R}^n ” або “векторний підпростір \mathbb{C}^n ”, але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку. Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V . Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V , і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V .

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається **алгоритмом Грама-Шмідта**, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається **алгоритмом Грама-Шмідта**, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор \vec{v} через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

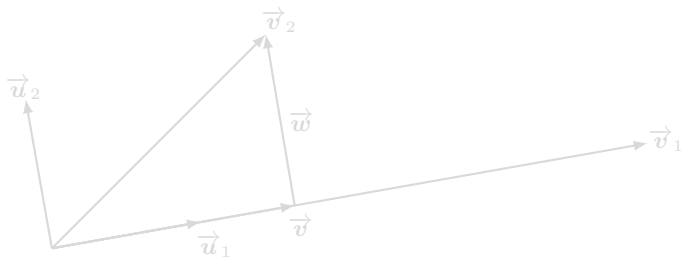
$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Алгоритм Грама-Шмідта

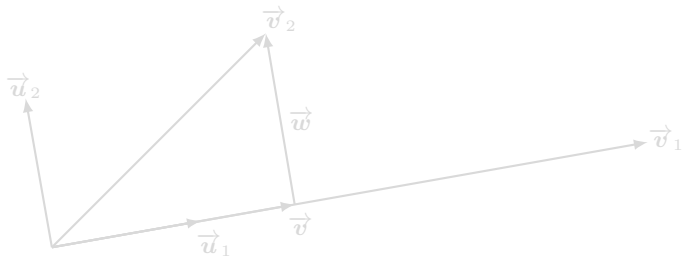
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

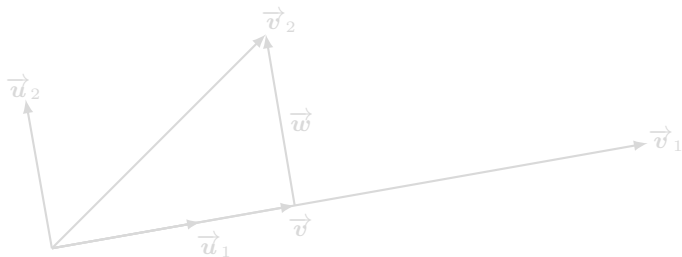
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

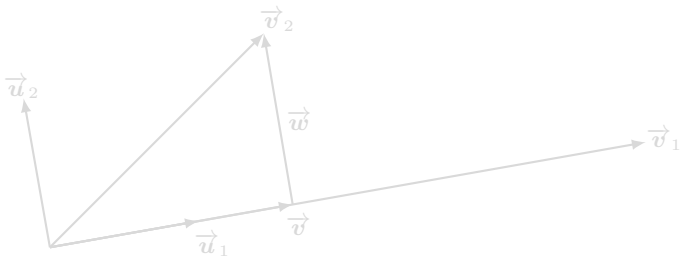
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

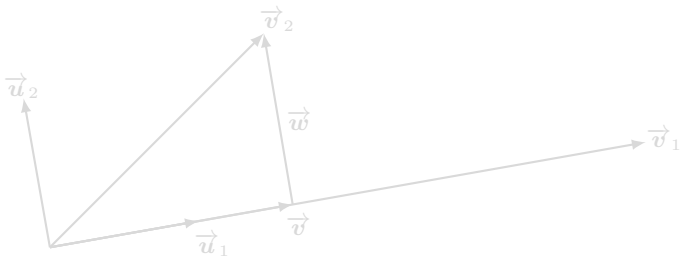
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

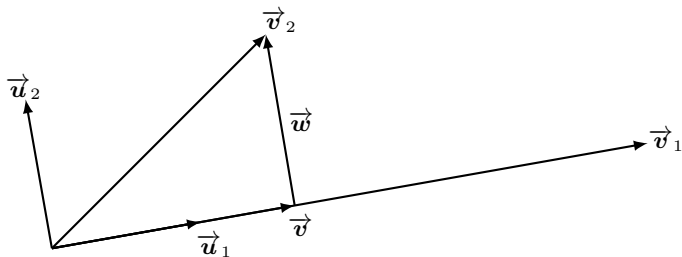
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

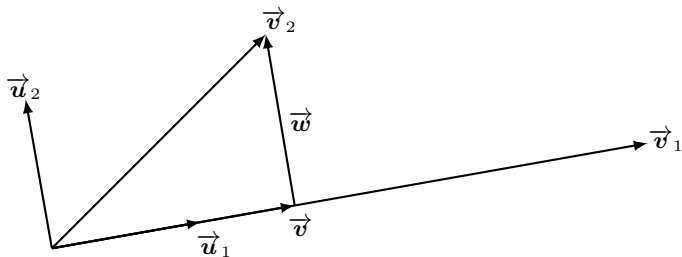
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з "ортогональної проекції" \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

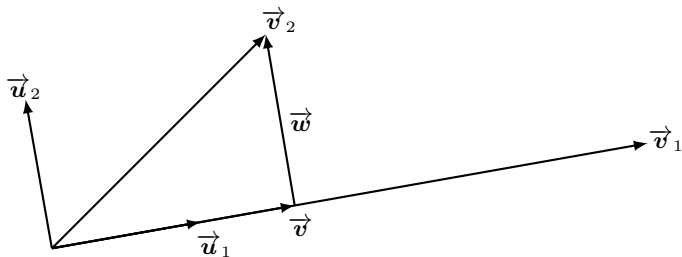
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з "ортогональної проекції" \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

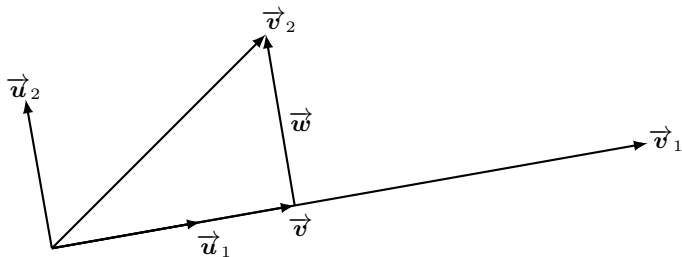
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

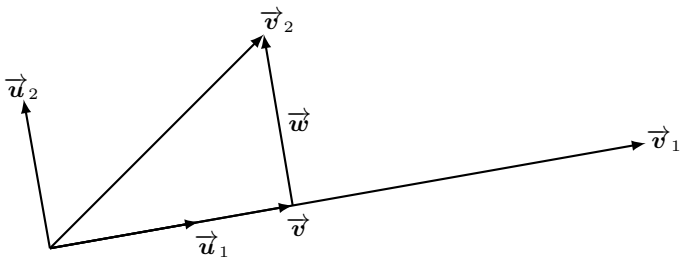
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з "ортогональної проекції" \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

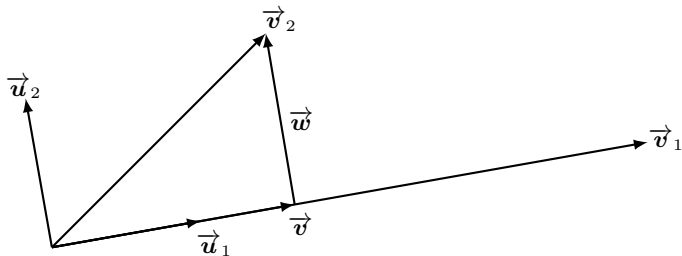
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з "ортогональної проекції" \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

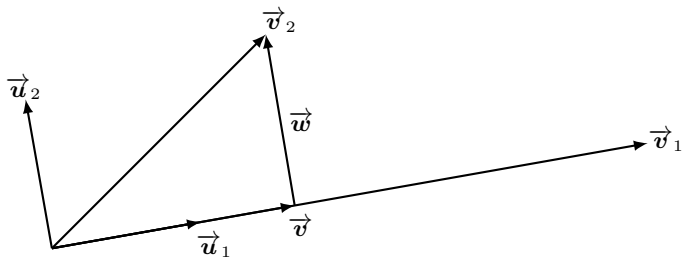
Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

Нехай \vec{v}_1 і \vec{v}_2 — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор \vec{u}_2 , що є ортогональним до вектора \vec{u}_1 , а отже лінійні оболонки векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 і векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор \vec{w} до вектора \vec{u}_1 , то все, що нам потрібно щоб отримати вектор \vec{u}_2 , це зробити вектор \vec{w} одиничної довжини, за умови, що вектор \vec{w} не є нульовим. Але вектор \vec{w} можна легко обчислити з “ортогональної проекції” \vec{v} вектора \vec{v}_2 на вектор \vec{u}_1 , і як ми вказували в лекції 15, що вектор \vec{v} можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w},\end{aligned}\tag{1}$$

де

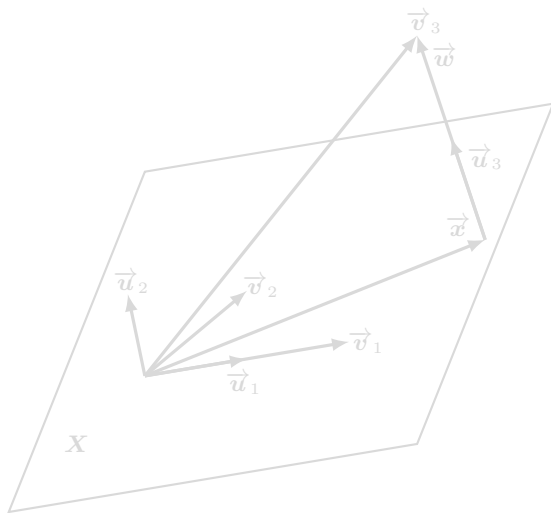
$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів \vec{w} і \vec{u}_1 дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

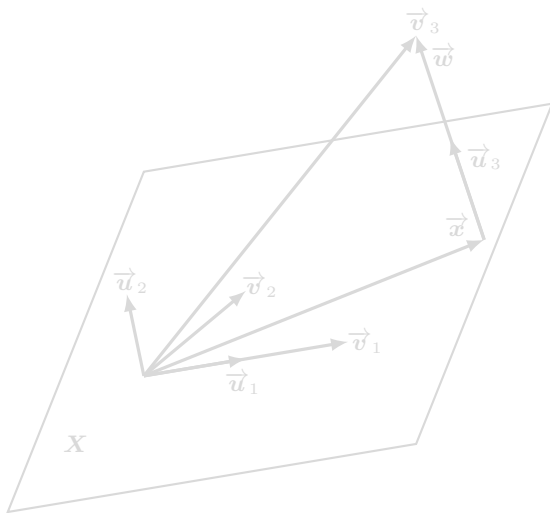
Алгоритм Грама-Шмідта

Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів \vec{v}_1 , \vec{v}_2 і \vec{v}_3 (див. рис.).



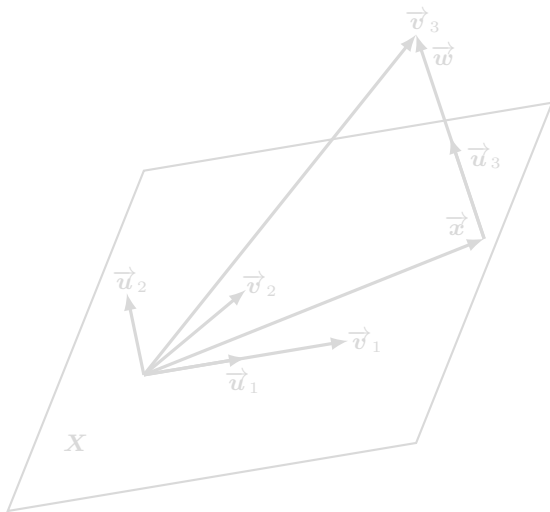
Алгоритм Грама-Шмідта

Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів \vec{v}_1 , \vec{v}_2 і \vec{v}_3 (див. рис.).



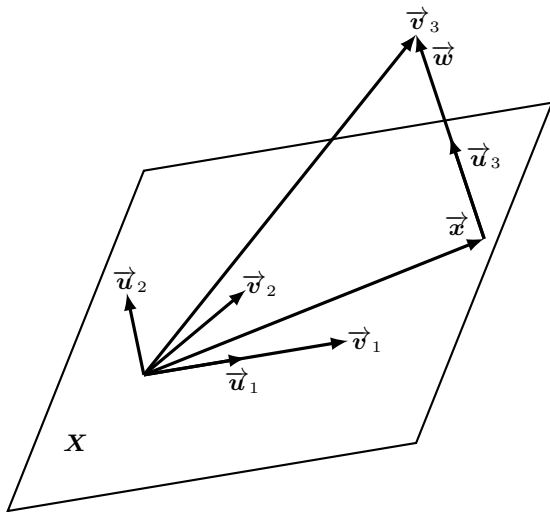
Алгоритм Грама-Шмідта

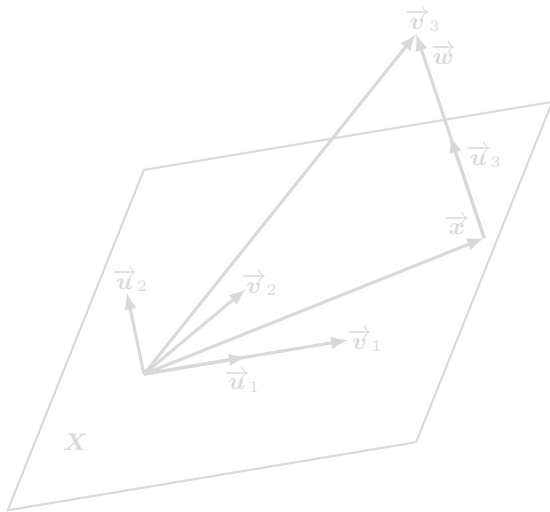
Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів \vec{v}_1 , \vec{v}_2 і \vec{v}_3 (див. рис.).



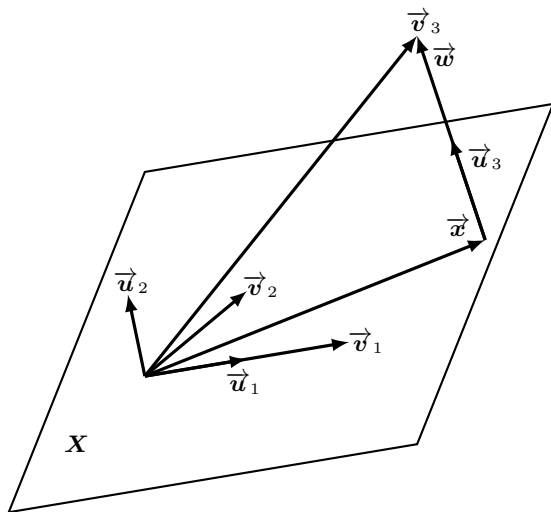
Алгоритм Грама-Шмідта

Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів \vec{v}_1 , \vec{v}_2 і \vec{v}_3 (див. рис.).

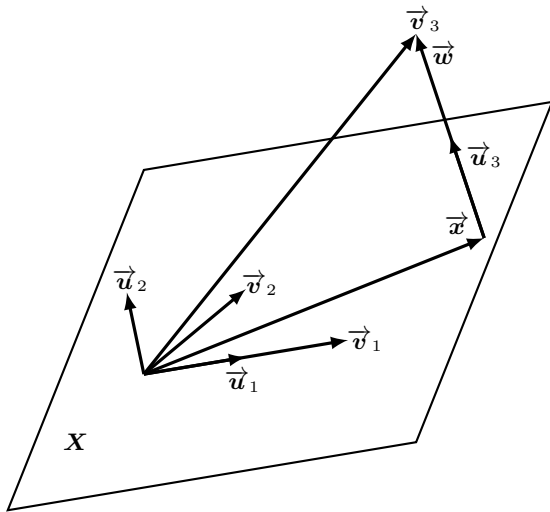




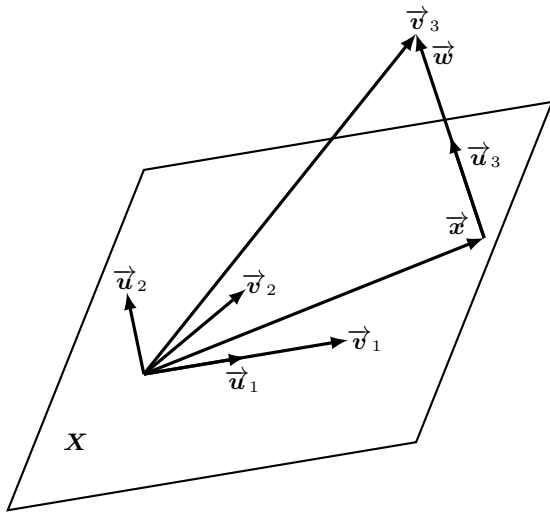
Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Припустимо, що вектори \vec{u}_1 і \vec{u}_2 утворюють такий базис.



Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Припустимо, що вектори \vec{u}_1 і \vec{u}_2 утворюють такий базис.

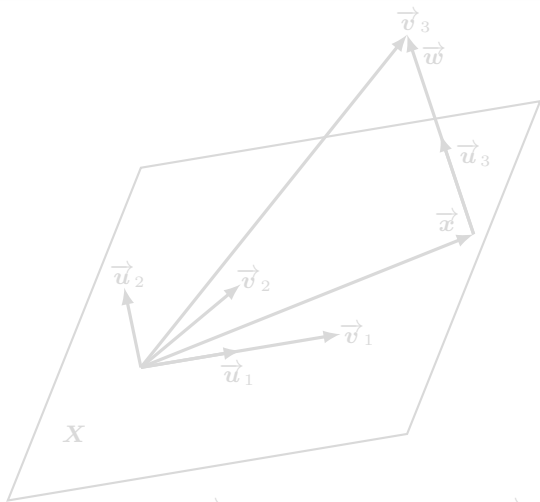


Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Припустимо, що вектори \vec{u}_1 і \vec{u}_2 утворюють такий базис.

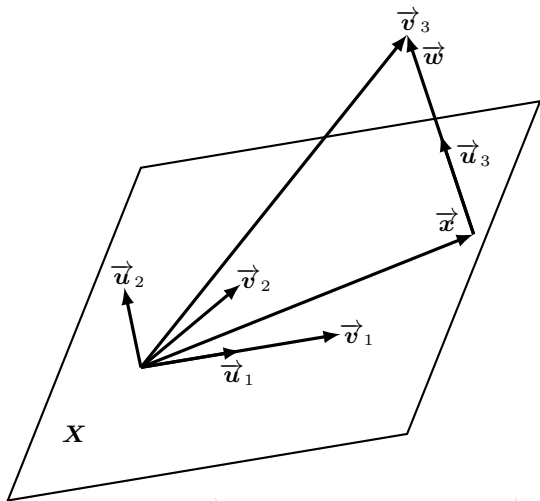


Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Припустимо, що вектори \vec{u}_1 і \vec{u}_2 утворюють такий базис.

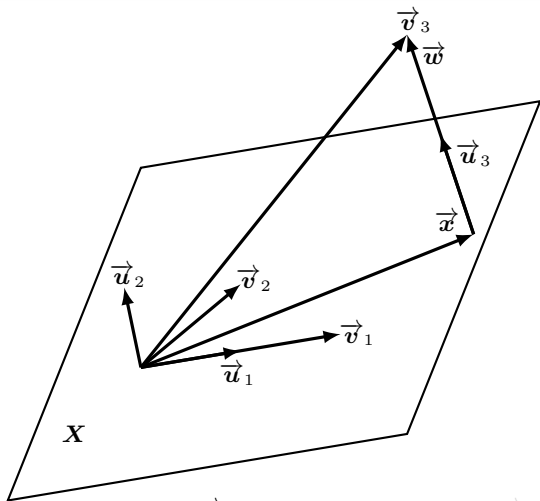
Алгоритм Грама-Шмідта



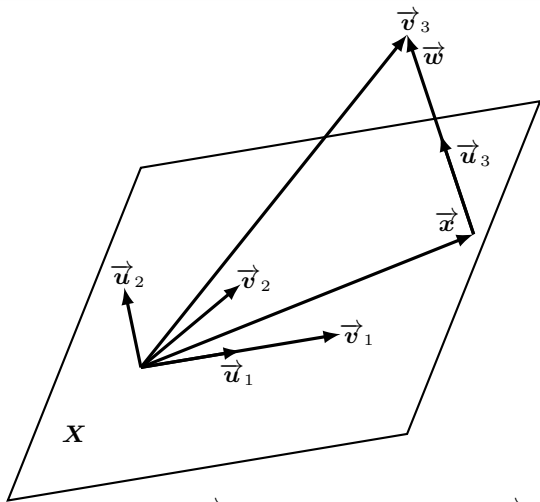
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



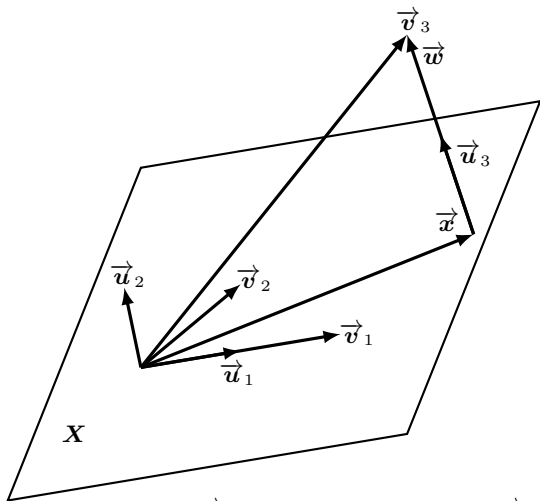
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



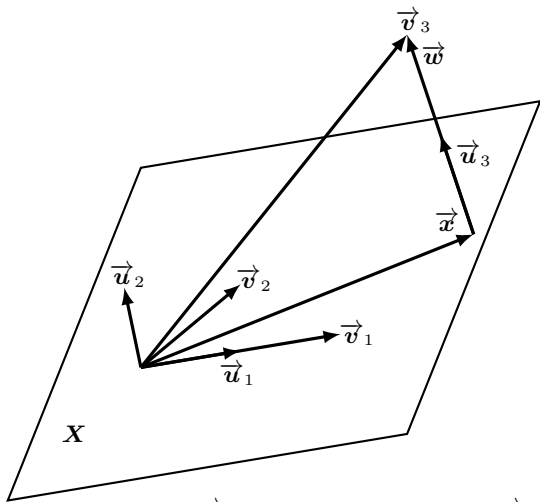
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



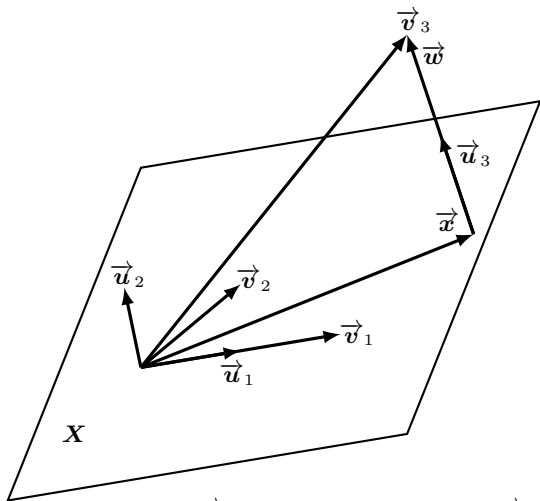
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



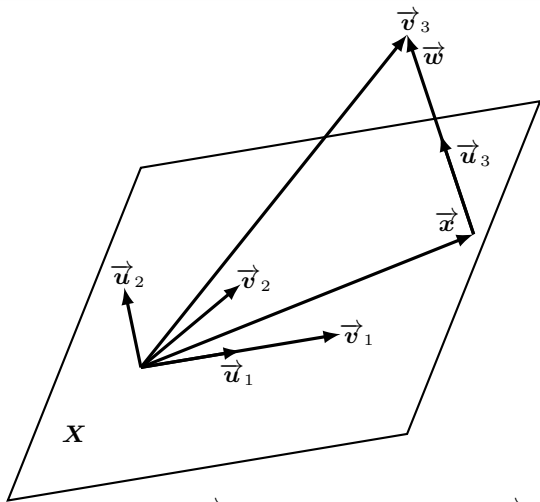
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



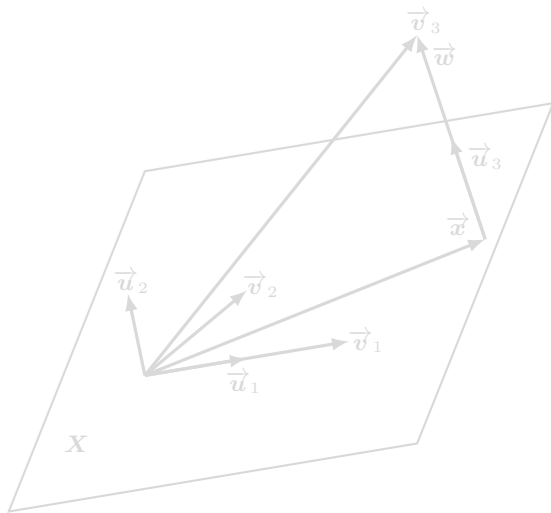
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



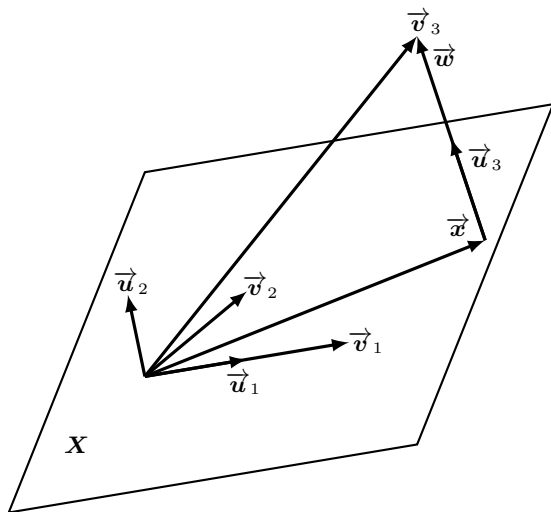
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



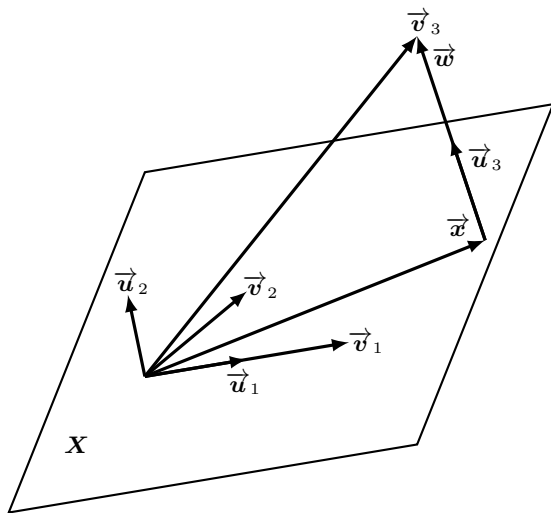
Тепер знайдемо третій вектор \vec{u}_3 , спроектувавши вектор \vec{v}_3 на вектор \vec{x} у підпросторі X , що є лінійною оболонкою векторів \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X , який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



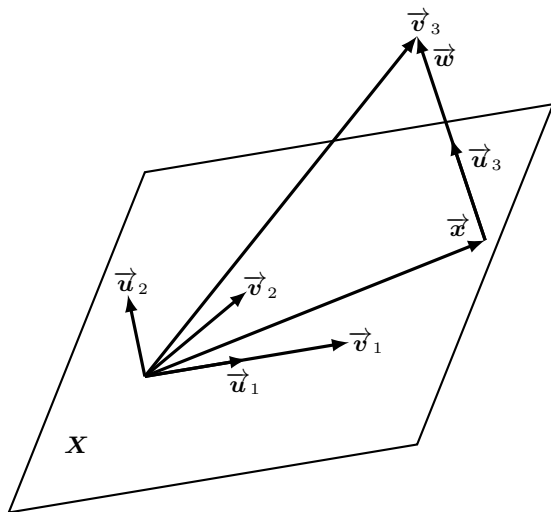
Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор \vec{x} ?*



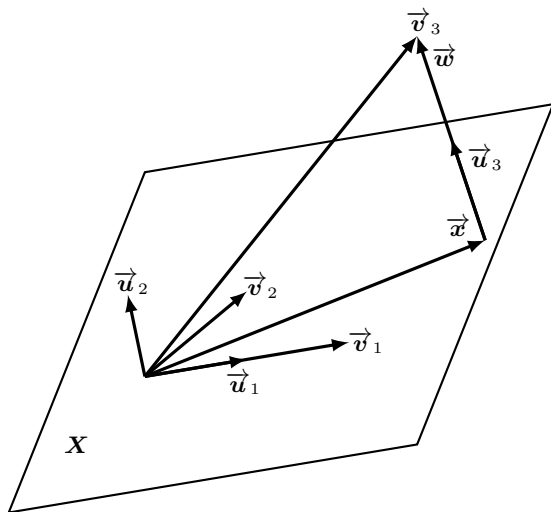
Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор \vec{x} ?*



Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор \vec{x} ?*



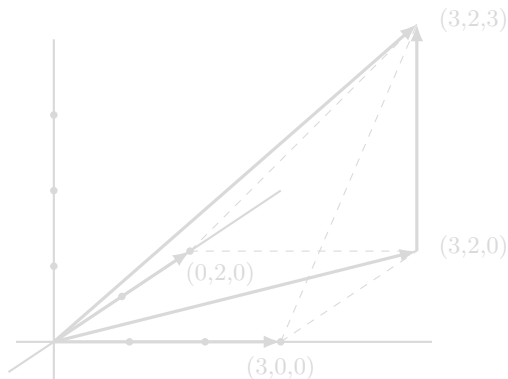
Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор \vec{x} ?*



Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор \vec{x} ?*

Алгоритм Грама-Шмідта

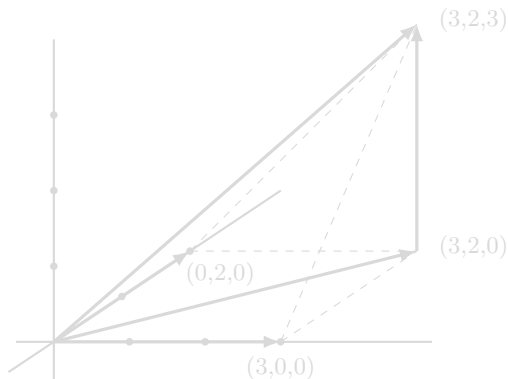
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

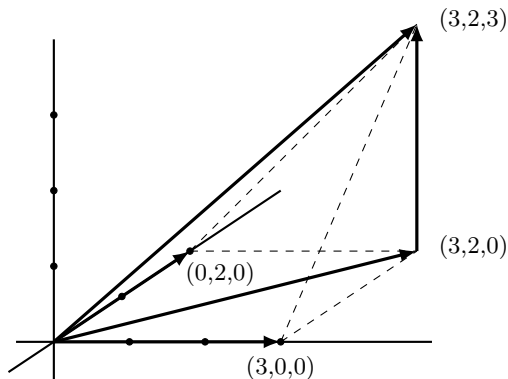
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

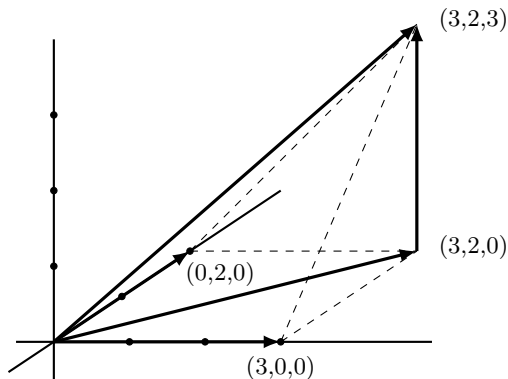
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

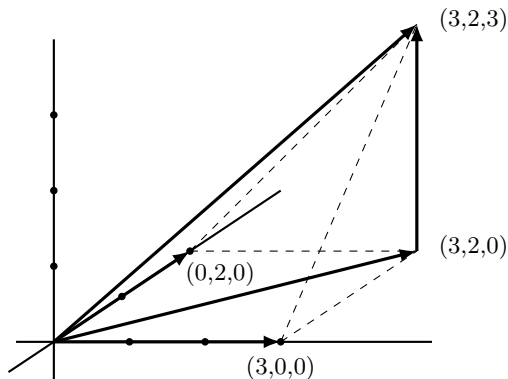
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

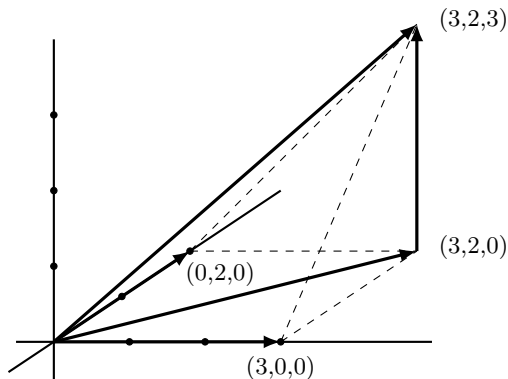
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

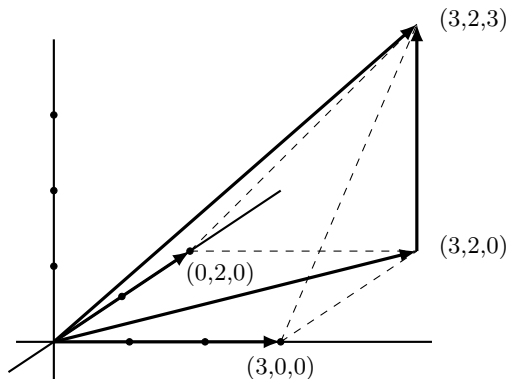
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

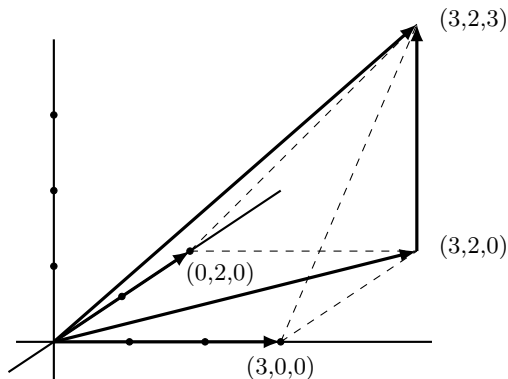
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

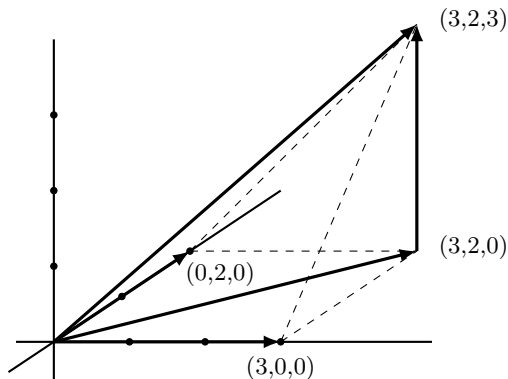
Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Вектори

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

в базисі

простору

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проекції

векторів $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід:

Вивід:

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \cdot \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B .

Крок 2: Нехай

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_2) \vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_m) \vec{u}_m.$$

Якщо $\vec{w} \neq \vec{0}$, то додаємо $\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w}$ до B і приріст m .

Приріст s .

Йти до кроку 1.

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{v}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори \vec{u}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$,

$i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s .

Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$,

$i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$,

$i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s .

Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

- (1) вектори \vec{u}_i утворюють ортонормовану множину,
- (2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і вектори \vec{v}_i .

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m). \quad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що

$$\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}) \subseteq \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s). \quad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора \vec{w} в кроці 2 алгоритму для вектора \vec{v}_s . Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор \vec{v}_s лежить у лінійній оболонці $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор \vec{w} в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{s-1}) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) \quad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s) \subseteq \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{m+1}). \quad (4)$$

Також, вектор \vec{w} належить до лінійної оболонки $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора \vec{u}_{m+1} . З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) \right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) \right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{w} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) \right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) \right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу \vec{u}_1 і \vec{u}_2 для підпростору X в \mathbb{R}^3 , який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора \vec{u}_2 покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 = \frac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Дякую за увагу!