Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 16: Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{v}_i \bullet \overrightarrow{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку.

Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{v}_i \bullet \overrightarrow{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{v}_i \bullet \overrightarrow{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{v}_i \bullet \overrightarrow{v}_j = 0$ для $i \neq j$.
Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{v}_i \bullet \overrightarrow{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення • для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{v}_i \bullet \overrightarrow{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ векторного простору V зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком і B — база простору V. Якщо B — попарно ортогональна множина векторів, то B називається *ортогональною* базою в V, і якщо, крім того, вектори бази B є одиничними, то B називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір V складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в V.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_i \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_i \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_i \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

Простори зі скалярним добутком: ортонормовані бази

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

У цій лекції розглядаються деякі дуже важливі поняття, пов'язані з довільними векторними просторами зі скалярним добутком. Ми надалі будемо використовувати позначення $\bullet$ для позначення скалярного добутку. Слухач може, задля конкретності, подумки замінити кожну фразу "векторний простір" фразою "векторний підпростір $\mathbb{R}^n$" або "векторний підпростір $\mathbb{C}^n$", але повинен усвідомити, що все, що ми робимо тут, виконується й у більш загальному випадку.

Напевно, єдиним найважливішим аспектом просторів зі скалярним добутком є існування особливо хорошого типу баз.

Означення 1.6.1

Вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ векторного простору $\boldsymbol{V}$ зі скалярним добутком називаються *попарно ортогональними*, якщо $\vec{\boldsymbol{v}}_i \bullet \vec{\boldsymbol{v}}_j = 0$ для $i \neq j$. Множину векторів будемо називати *попарно ортогональною множиною*, якщо вона є або порожньою, або її вектори є попарно ортогональними.

Означення 1.6.2

Нехай $\boldsymbol{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком і $\boldsymbol{B}$ — база простору $\boldsymbol{V}$. Якщо $\boldsymbol{B}$ — попарно ортогональна множина векторів, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортогональною* базою в $\boldsymbol{V}$, і якщо, крім того, вектори бази $\boldsymbol{B}$ є одиничними, то $\boldsymbol{B}$ називається *ортонормованою* базою. У спеціальному випадку, коли векторний простір $\boldsymbol{V}$ складається лише з нуль-вектора, то зручно називати порожню множину ортонормованою базою в $\boldsymbol{V}$.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{v}$ через базис $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \ldots + a_n\overrightarrow{v}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{v}$ через базис $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{v} = a_1 \overrightarrow{v}_1 + a_2 \overrightarrow{v}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{v}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Алгоритм Грама-Шмідта

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Алгоритм Грама-Шмідта

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\vec{v}$ через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_n \vec{v}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\vec{v}$ через базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \vec{v} \bullet \vec{v}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.

Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Ортонормовані бази часто бувають дуже корисними, оскільки вони можуть значно спростити обчислення. Наприклад, якби ми хотіли виразити вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ через базис $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$, то нам зазвичай доведеться розв'язати лінійне рівняння

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a_1 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 + a_2 \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + a_n \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_n$$

для коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. З іншого боку, якщо ми маємо ортонормовану базу, то це дуже легко перевірити, що $a_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$ та не має, що розв'язувати. Нашим першим кроком буде описання алгоритму, який називається *алгоритмом Грама-Шмідта*, що перетворює довільну базу векторного простору в ортонормовану.
Алгоритм Грама-Шмідта — це алгоритм, який фактично може бути застосований до будь-якого набору векторів і створює ортонормовану базу для векторного простору, що є лінійною оболонкою цих векторів. Ми проілюструємо, як працює цей алгоритм у випадку двох і трьох векторів.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).

Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).

Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).

Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

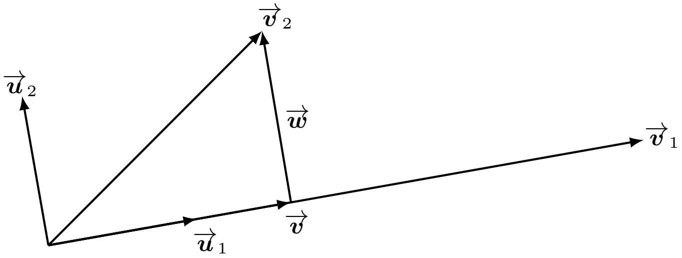
Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).

Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).

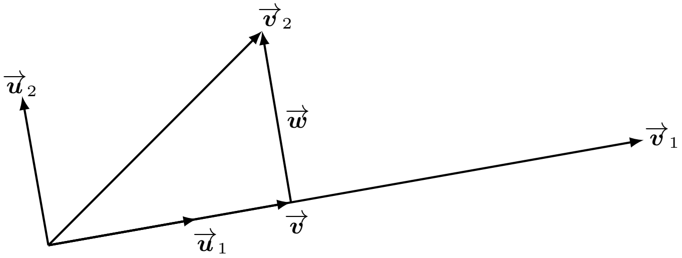
Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).



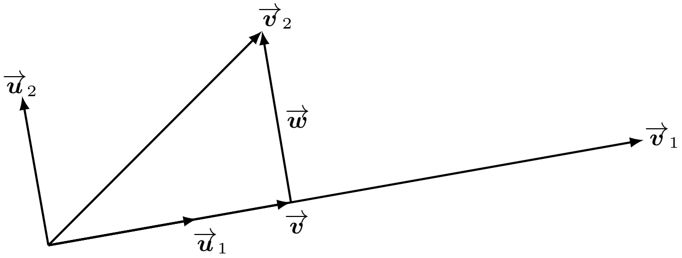
Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).



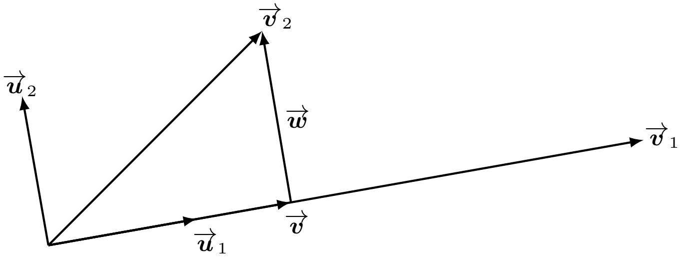
Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).



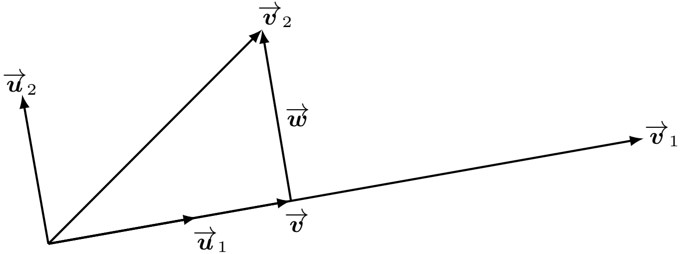
Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).



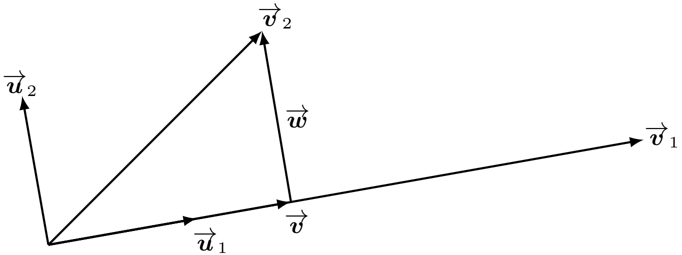
Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).



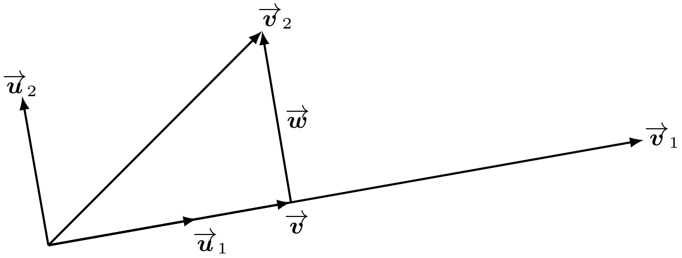
Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ — два ненульові вектори. Тоді $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$ є одиничним вектором. Ми хочемо знайти одиничний вектор $\vec{u}_2$, що є ортогональним до вектора $\vec{u}_1$, а отже лінійні оболонки векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ і векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ збігаються (див. рис.).



Якщо б ми могли знайти ортогональний вектор $\vec{w}$ до вектора $\vec{u}_1$, то все, що нам потрібно щоб отримати вектор $\vec{u}_2$, це зробити вектор $\vec{w}$ одиничної довжини, за умови, що вектор $\vec{w}$ не є нульовим. Але вектор $\vec{w}$ можна легко обчислити з "ортогональної проекції" $\vec{v}$ вектора $\vec{v}_2$ на вектор $\vec{u}_1$, і як ми вказували в лекції 15, що вектор $\vec{v}$ можна знайти за допомогою точкового добутку.

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}, \end{aligned} \qquad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1,\\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w},\end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v},\\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1.\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 =\\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 =\\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) =\\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 =\\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 =\\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\
\vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w},
\end{aligned} \qquad (1)$$

де

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\
\vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1.
\end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned}
\vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\
&= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\
&= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\
&= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\
&= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1, \\ \vec{u}_2 &= \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v}, \\ \vec{v} &= (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\vec{w}$ і $\vec{u}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{w} \bullet \vec{u}_1 &= (\vec{v}_2 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1)) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - ((\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1) \bullet \vec{u}_1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1) \cdot 1 = \\ &= \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 - \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Наведені нижче рівняння підсумовують, як можна обчислити ортонормовану базу $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 &= \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1|}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \\ \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 &= \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}, \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v}} &= (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1. \end{aligned}$$

Для доведення того, що ці обчислення справді дають можливість побудувати ортогональні вектори, достатньо довести, що точковий добуток векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$ дорівнює нулю. Справді, маємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 &= \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 - \left((\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right)\right) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - \left((\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right) \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\,(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1) = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1) \cdot 1 = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

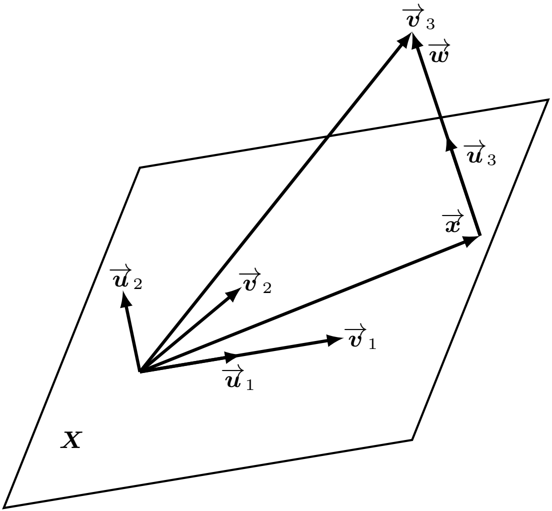
Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ і $\vec{v}_3$ (див. рис.).

Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ і $\vec{v}_3$ (див. рис.).

Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ і $\vec{v}_3$ (див. рис.).

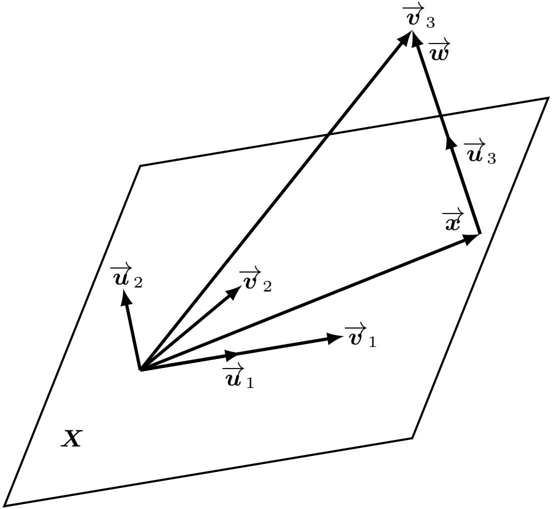
Алгоритм Грама-Шмідта

Далі припустимо, що ми хочемо побудувати ортонормовану базу для простору, що є лінійною оболонкою трьох векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_3$ (див. рис.).

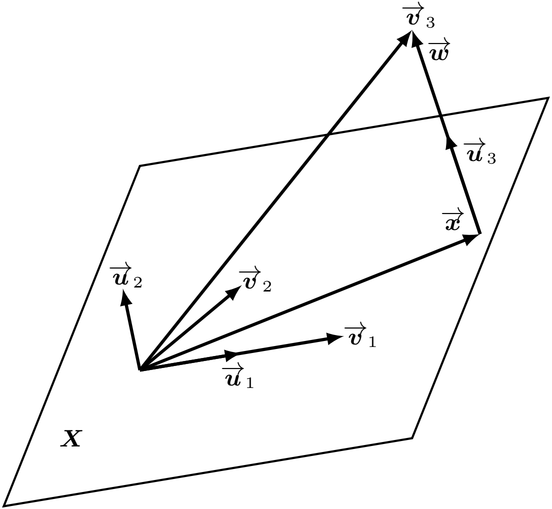


Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Припустимо, що вектори $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ утворюють такий базис.

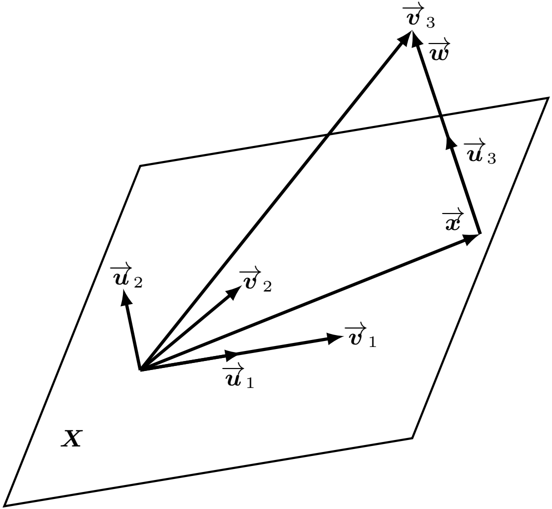
Алгоритм Грама-Шмідта



Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Припустимо, що вектори $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ утворюють такий базис.



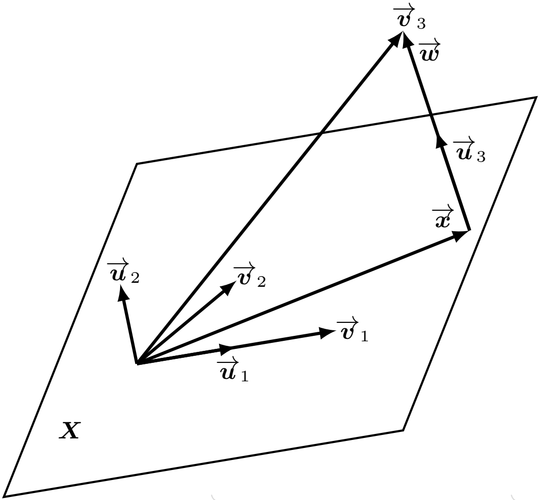
Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Припустимо, що вектори $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ утворюють такий базис.



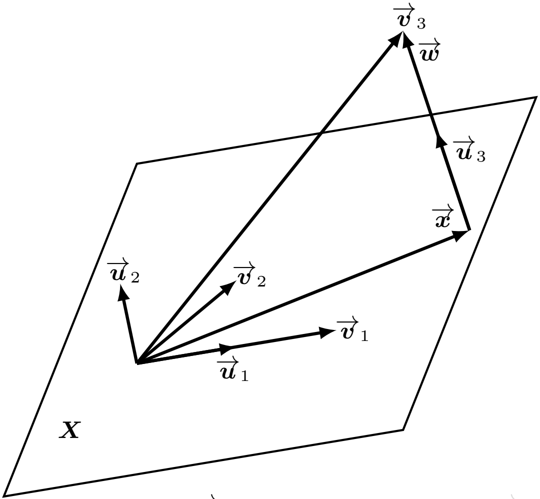
Спочатку, ми застосуємо конструкцію викладену вище для знаходження ортонормованої бази для простору, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Припустимо, що вектори $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ утворюють такий базис.

Алгоритм Грама-Шмідта

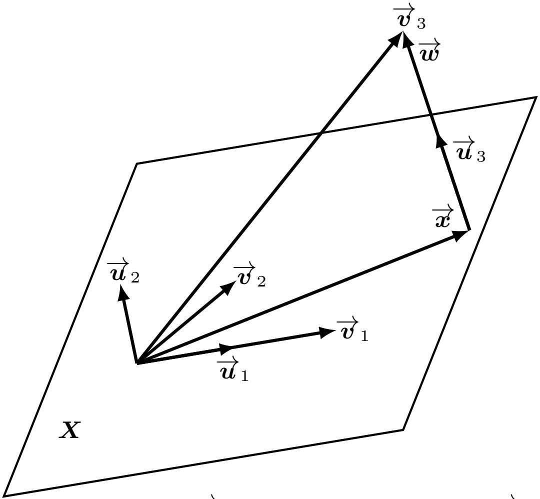
Тепер знайдемо третій вектор $\overrightarrow{u}_3$, спроектувавши вектор $\overrightarrow{v}_3$ на вектор $\overrightarrow{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$. Різниця $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_3 - \overrightarrow{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



Тепер знайдемо третій вектор $\vec{u}_3$, спроектувавши вектор $\vec{v}_3$ на вектор $\vec{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$. Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.

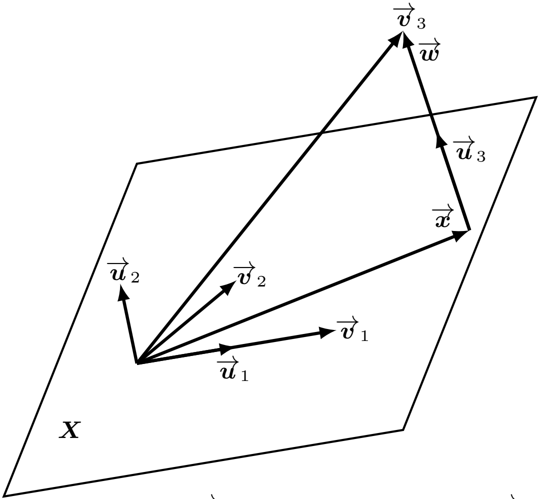


Тепер знайдемо третій вектор $\vec{u}_3$, спроектувавши вектор $\vec{v}_3$ на вектор $\vec{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$. Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.

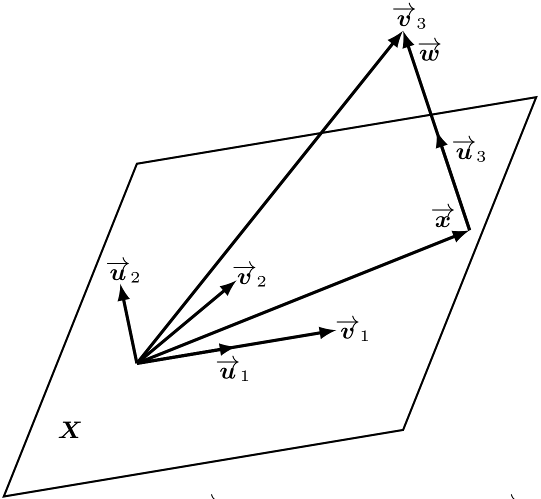


Тепер знайдемо третій вектор $\vec{u}_3$, спроектувавши вектор $\vec{v}_3$ на вектор $\vec{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$. Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.

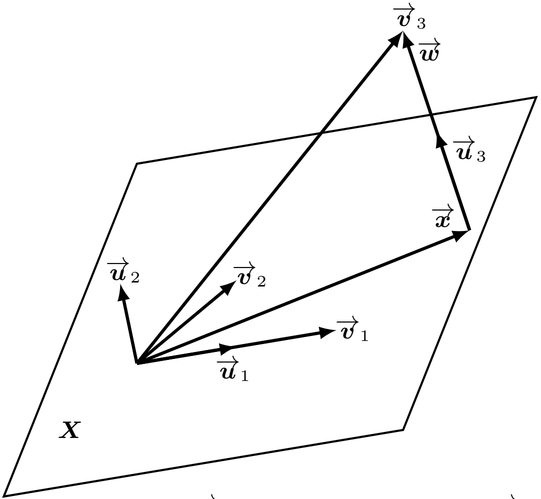
Алгоритм Грама-Шмідта



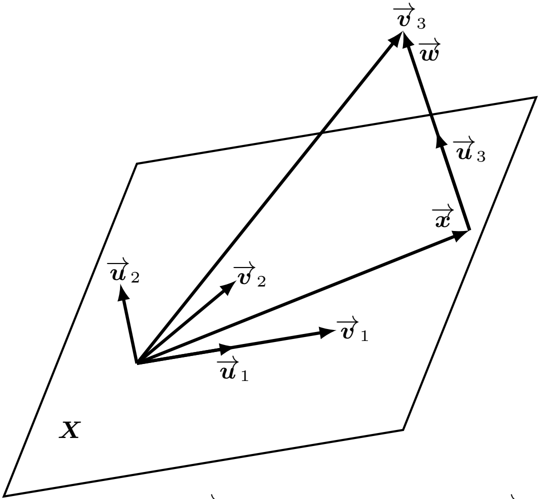
Тепер знайдемо третій вектор $\overrightarrow{u}_3$, спроектувавши вектор $\overrightarrow{v}_3$ на вектор $\overrightarrow{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$. Різниця $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_3 - \overrightarrow{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



Тепер знайдемо третій вектор $\vec{u}_3$, спроектувавши вектор $\vec{v}_3$ на вектор $\vec{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$. Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



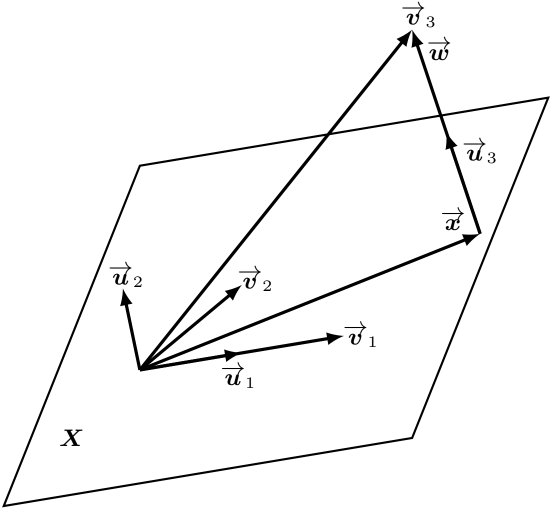
Тепер знайдемо третій вектор $\vec{u}_3$, спроектувавши вектор $\vec{v}_3$ на вектор $\vec{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$. Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.



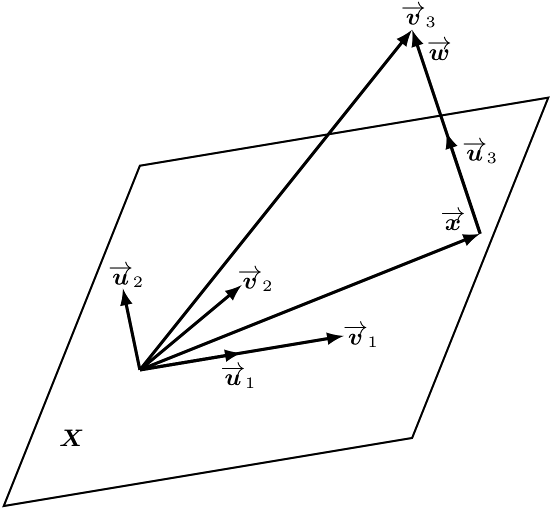
Тепер знайдемо третій вектор $\vec{u}_3$, спроектувавши вектор $\vec{v}_3$ на вектор $\vec{x}$ у підпросторі X, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$. Різниця $\vec{w} = \vec{v}_3 - \vec{x}$ є вектором ортогональним до підпростору X, який потім нормалізується щоб мати одиничну довжину, припускаючи при цьому, що він не є нуль-вектором.

Алгоритм Грама-Шмідта

Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор* $\overrightarrow{x}$?

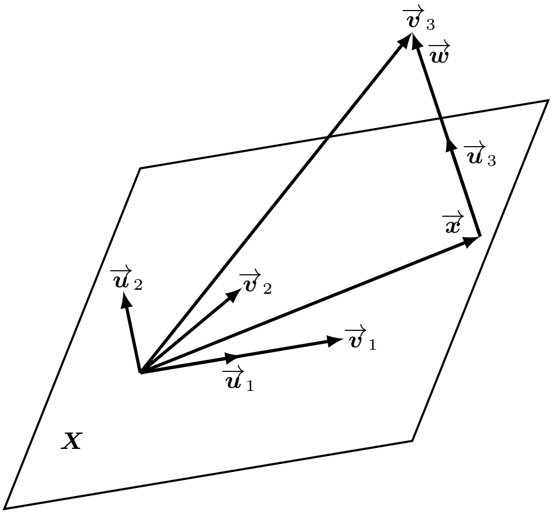


Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор* $\vec{x}$?

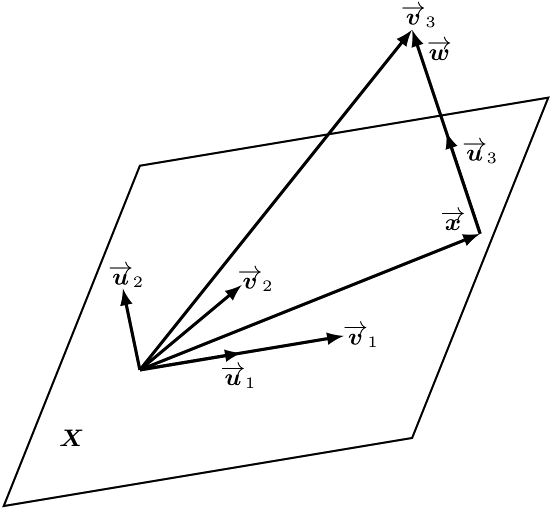


Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор* $\vec{x}$?

Алгоритм Грама-Шмідта



Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор* $\overrightarrow{x}$?



Це залишає одне питання без відповіді, а саме *як обчислити вектор* $\vec{x}$?

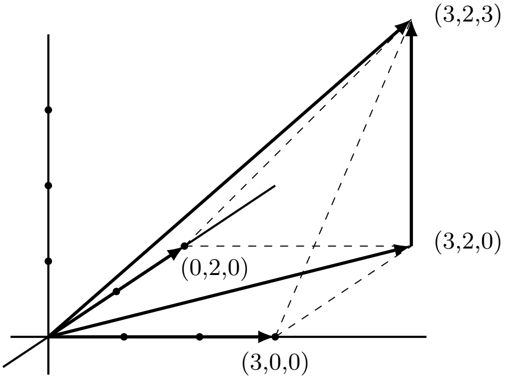
Приклад на рис. мотивує відповідь.

Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.

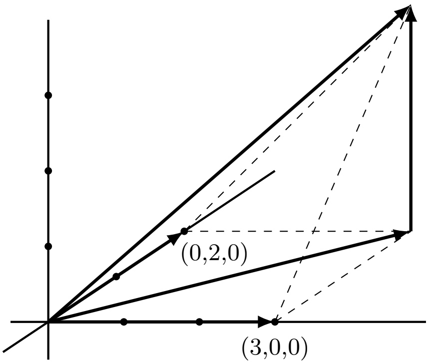
Ми бачимо, що проекція вектора $(3,2,3)$ на площину є вектором $(3,2,0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3,0,0)$ і $(0,2,0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3,2,3)$ на вектори $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



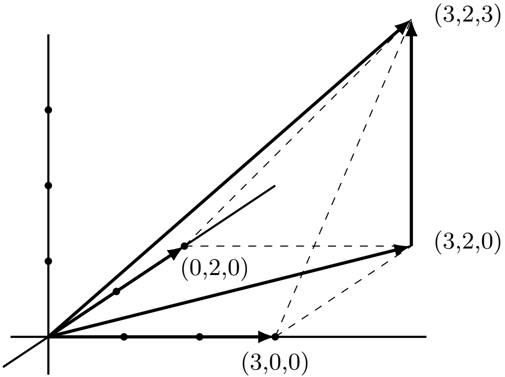
Ми бачимо, що проекція вектора $(3,2,3)$ на площину є вектором $(3,2,0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3,0,0)$ і $(0,2,0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3,2,3)$ на вектори $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



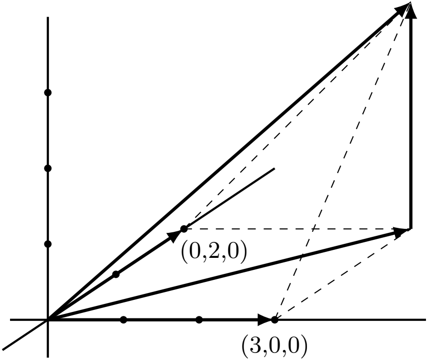
Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



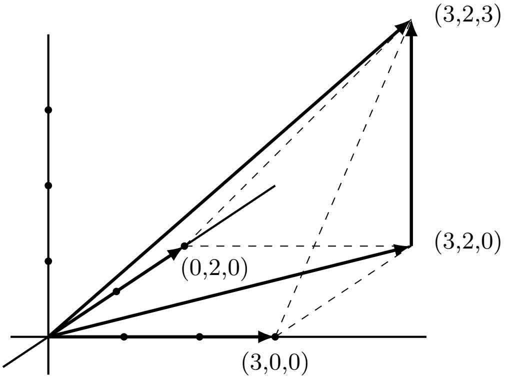
Ми бачимо, що проекція вектора $(3,2,3)$ на площину є вектором $(3,2,0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3,0,0)$ і $(0,2,0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3,2,3)$ на вектори $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



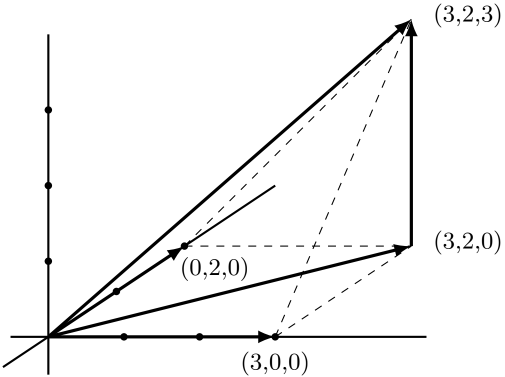
Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



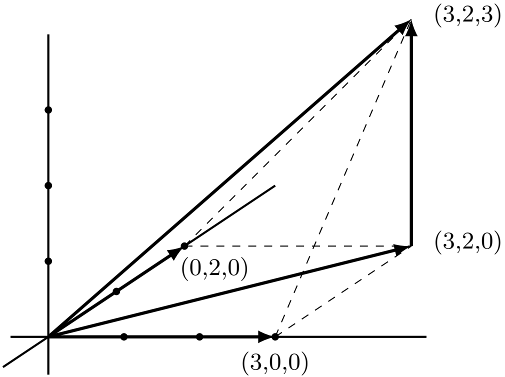
Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



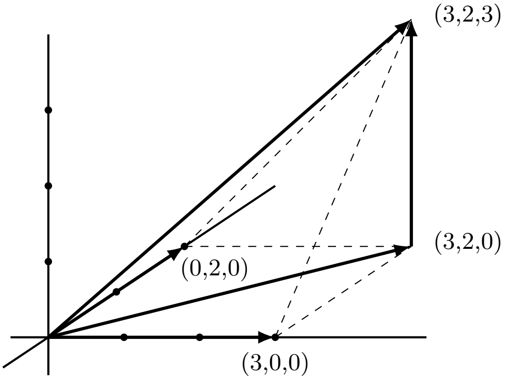
Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3,2,3)$ на площину є вектором $(3,2,0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3,0,0)$ і $(0,2,0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3,2,3)$ на вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад на рис. мотивує відповідь.



Ми бачимо, що проекція вектора $(3, 2, 3)$ на площину є вектором $(3, 2, 0)$. Цей вектор є сумою двох векторів $(3, 0, 0)$ і $(0, 2, 0)$, які є ортогональними проекціями вектора $(3, 2, 3)$ на вектори $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$, відповідно. Виявляється, що єдиною важливою властивістю векторів $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$ є те, що ці вектори складають ортонормовану базу для площини. Зараз ми накреслили ключові ідеї, необхідні для загальної випадку. Це призводить до рекурсивної побудови, описаної в алгоритмі Грама-Шмідта з наступного прикладу.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Вхід:

Вихід:

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_i \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_i \cdot \vec{u}_m)\vec{u}_m$$

Приріст i.

Йти до кроку 1.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід:

Вивід:

Крок 1:

Крок 2:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_s - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_1)\overrightarrow{u}_1 - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_2)\overrightarrow{u}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_m)\overrightarrow{u}_m.$$

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\vec{w} = \vec{v}_s - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_2)\vec{u}_2 - \dots - (\vec{v}_s \bullet \vec{u}_m)\vec{u}_m.$$

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k\}$

Вивід: ортонормована база $B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_s - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_1)\overrightarrow{u}_1 - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_2)\overrightarrow{u}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_m)\overrightarrow{u}_m.$$

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$$

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1:

Крок 2:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$$

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k\}$
Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_m\}$
Крок 1:
Крок 2:

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}}_s - (\vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\vec{\boldsymbol{u}}_1 - (\vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\vec{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_m)\vec{\boldsymbol{u}}_m.$$

Приріст s.
Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до B.

Крок 2: Нехай
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_s - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_1)\overrightarrow{u}_1 - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_2)\overrightarrow{u}_2 - \ldots - (\overrightarrow{v}_s \bullet \overrightarrow{u}_m)\overrightarrow{u}_m.$$
Якщо $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, то додаємо $\overrightarrow{u}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w}$ до B і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$$

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$$

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Алгоритм Грама-Шмідта

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай
$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m$.

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Алгоритм Грама-Шмідта

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$$

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Алгоритм Грама-Шмідта

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$$

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай

$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}}=\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s-(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1-(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2-\ldots-(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$$

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}\neq\overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}=\frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай
$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$
Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.
Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k\}$

Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_m\}$

Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.

Крок 2: Нехай
$\vec{\boldsymbol{w}}=\vec{\boldsymbol{v}}_s-(\vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_1)\vec{\boldsymbol{u}}_1-(\vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_2)\vec{\boldsymbol{u}}_2-\ldots-(\vec{\boldsymbol{v}}_s \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_m)\vec{\boldsymbol{u}}_m.$
Якщо $\vec{\boldsymbol{w}}\neq\vec{\mathbf{0}}$, то додаємо $\vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}=\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{w}}|}\vec{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.

Приріст s.

Йти до **кроку 1**.

Приклад 1.6.3 (алгоритм Грама-Шмідта)

Ввід: множина векторів $\boldsymbol{S} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k\}$
Вивід: ортонормована база $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\}$
Крок 1: Якщо $s > k$, то повертаємося до $\boldsymbol{B}$.
Крок 2: Нехай
$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 - \ldots - (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m.$
Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то додаємо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1} = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ до $\boldsymbol{B}$ і приріст m.
Приріст s.
Йти до **кроку 1**.

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\overrightarrow{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\overrightarrow{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\overrightarrow{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\overrightarrow{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{s-1}, \overrightarrow{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Алгоритм Грама-Шмідта

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Алгоритм Грама-Шмідта

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\overrightarrow{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\overrightarrow{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right). \qquad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right). \qquad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\overrightarrow{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\overrightarrow{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{s-1}, \overrightarrow{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \qquad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\overrightarrow{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\overrightarrow{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.

Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.

Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\overrightarrow{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\overrightarrow{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{s-1}, \overrightarrow{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\overrightarrow{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\overrightarrow{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\overrightarrow{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\overrightarrow{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{s-1}, \overrightarrow{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \qquad (2)$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \qquad (3)$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \qquad (4)$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{\boldsymbol{u}}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{\boldsymbol{w}} \bullet \vec{\boldsymbol{u}}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{\boldsymbol{v}}_s$.
Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{\boldsymbol{v}}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_{s-1}, \vec{\boldsymbol{u}}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Алгоритм Грама-Шмідта

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{s-1}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Теорема 1.6.4

Алгоритм Грама-Шмідта дає правильний результат.

Доведення. Існує дві частини доведення того, що алгоритм працює. Ми маємо довести, що

(1) вектори $\vec{u}_i$ утворюють ортонормовану множину,

(2) вони є лінійною оболонкою того ж простору, що і є вектори $\vec{v}_i$.

Для доведення ми використаємо індукцію в обох випадках.
Для доведення твердження (1) достатньо перевірити, що $\vec{w} \bullet \vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, що робиться безпосередньо. Це показує, що ортогональність зберігається, коли ми йдемо далі роблячи крок.
Для доведення твердження (2), припустимо за індукцією, що на початку кроку 2 маємо

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right). \tag{2}$$

З припущення індукції (2) випливає, що вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right). \tag{3}$$

Тепер розв'яжемо рівняння для вектора $\vec{w}$ в кроці 2 алгоритму для вектора $\vec{v}_s$. Використавши припущення індукції (2), бачимо, що вектор $\vec{v}_s$ лежить у лінійній оболонці $\operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{s-1}, \vec{u}_m\right)$, а отже це та інше використання припущення індукції (2) доводять, що

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

З включень (3) і (4) випливає, що насправді маємо рівність множин, що доводить твердження (2).

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 = \ldots = \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 = \ldots = \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів $\boldsymbol{S}$ є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{\mathbf{0}}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{\mathbf{0}}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми.

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 = \ldots = \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми.

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}) = \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s) \subseteq \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right) \qquad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \qquad (4)$$

Також, вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 = \ldots = \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right) \qquad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \qquad (4)$$

Також, вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 = \ldots = \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}) = \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s) \subseteq \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}) . \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_m\right) \qquad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{m+1}\right). \qquad (4)$$

Також, вектор $\overrightarrow{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 = \ldots = \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{\mathbf{0}}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}) = \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s) \subseteq \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів S є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{\mathbf{0}}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів $\boldsymbol{S}$ є порожньою або $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \ldots = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів $\boldsymbol{S}$ є порожньою або $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \ldots = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ∎

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів $\boldsymbol{S}$ є порожньою або $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = \ldots = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_k = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\mathbf{0}}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_m\right) \tag{2}$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}\right). \tag{4}$$

Також, вектор $\vec{\boldsymbol{w}}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{\boldsymbol{u}}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів $\boldsymbol{S}$ є порожньою або $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \ldots = \vec{\boldsymbol{v}}_k = \vec{\mathbf{0}}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Алгоритм Грама-Шмідта

Зауважимо, що доведення повне, якщо вектор $\vec{w}$ в кроці 2 відмінний від нуль-вектора. Якщо ж $\vec{w} = \vec{0}$, то це та інше використання припущення індукції (2)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{s-1}\right) = \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right) \qquad (2)$$

доводять, що виконується включення (4)

$$\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m+1}\right). \qquad (4)$$

Також, вектор $\vec{w}$ належить до лінійної оболонки $\operatorname{span}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\right)$, а отже, це виконується і для вектора $\vec{u}_{m+1}$. З цього та умови (2) випливає, що виконується включення (4). Це повністю завершує доведення теореми. ■

З доведення теореми 1.6.4 легко бачити, що $m = k$ в алгоритмі Грама-Шмідта тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ лінійно незалежні. У найгіршому випадку, коли множина векторів $\boldsymbol{S}$ є порожньою або $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_k = \vec{0}$, то $m = 0$.

З алгоритму Грама-Шмідта та теореми 1.6.4 випливає такий наслідок:

Наслідок 1.6.5

Кожен підпростір векторного простору зі скалярним добутком має ортонормовану базу.

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$ для підпростору X в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{v}_1|}\overrightarrow{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1)\,\overrightarrow{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\overrightarrow{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1} = 1, \quad |\overrightarrow{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1 + 9 + 1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{v}_1|}\overrightarrow{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{v}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1)\,\overrightarrow{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),\\
\overrightarrow{w} &= \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v} = (1, 3, 1).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\overrightarrow{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\overrightarrow{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) =\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) =\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 - 3 + 1) =\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2,-1,1)$ і $\vec{v}_2 = (-1,4,0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1).$$

Для отримання вектора $\vec{u}_2$ покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1) = (-2,1,-1),$$
$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1,3,1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1)\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} \left(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = (2,-1,1)$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 = (-1,4,0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1|}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1) = (-2,1,-1),$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (1,3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|}\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1).$$

Легко бачити, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1 \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1)\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2-3+1) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ для підпростору X в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2,-1,1)$ і $\vec{v}_2 = (-1,4,0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1).$$

Для отримання вектора $\vec{u}_2$ покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1) = (-2,1,-1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1,3,1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1)\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} \left(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} \left(2 - 3 + 1\right) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{v}_1 = (2,-1,1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1,4,0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{v}_1|}\overrightarrow{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1)\,\overrightarrow{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1) = (-2,1,-1),$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v} = (1,3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1).$$

Легко бачити, що

$$|\overrightarrow{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\overrightarrow{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 - 3 + 1) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{v}_1 = (2,-1,1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1,4,0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{v}_1|}\overrightarrow{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{v}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1) = (-2,1,-1),$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v} = (1,3,1).$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1).$$

Легко бачити, що

$$|\overrightarrow{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\overrightarrow{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1)\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\left(2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 1\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\left(2-3+1\right) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ для підпростору X в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора $\vec{u}_2$ покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\left(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}(2 - 3 + 1) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Алгоритм Грама-Шмідта

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\overrightarrow{u}_1$ і $\overrightarrow{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{v}_1|}\overrightarrow{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора $\overrightarrow{u}_2$ покладемо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= \left(\overrightarrow{v}_2 \bullet \overrightarrow{u}_1\right)\overrightarrow{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1), \\ \overrightarrow{w} &= \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v} = (1, 3, 1). \end{aligned}$$

Тоді

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\overrightarrow{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\overrightarrow{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}_1 \bullet \overrightarrow{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\left(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\left(2 - 3 + 1\right) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2,-1,1)$ і $\vec{v}_2 = (-1,4,0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1).$$

Для отримання вектора $\vec{u}_2$ покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1) = (-2,1,-1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1,3,1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}}\,(2-3+1) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора $\vec{u}_2$ покладемо

$$\vec{v} = \left(\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1\right)\vec{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} \left(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} \left(2 - 3 + 1\right) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ для підпростору X в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ і $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1).$$

Для отримання вектора $\vec{u}_2$ покладемо

$$\vec{v} = (\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1)\,\vec{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1) = (-2, 1, -1),$$

$$\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v} = (1, 3, 1).$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1, 3, 1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} \left(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Приклад 1.6.6

Знайдіть ортонормовану базу $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ для підпростору $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{R}^3$, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{v}_1 = (2,-1,1)$ і $\vec{v}_2 = (-1,4,0)$.

Розв'язок. Застосувавши алгоритм Грама-Шмідта ми отримуємо

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1).$$

Для отримання вектора $\vec{u}_2$ покладемо

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1\right)\vec{u}_1 = \tfrac{-6}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1) = (-2,1,-1), \\ \vec{w} &= \vec{v}_2 - \vec{v} = (1,3,1). \end{aligned}$$

Тоді

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1).$$

Легко бачити, що

$$|\vec{u}_1| = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{1+4+1} = 1, \quad |\vec{u}_2| = \tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{1+9+1} = 1 \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2,-1,1)\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1,3,1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} \left(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1\right) = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{11}} (2 - 3 + 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Дякую за увагу!