# Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

## Лекція 15: Кути

# Кути

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$, який будемо позначати $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{u}$ або $\overrightarrow{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

# Кути

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$, який будемо позначати $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{u}$ або $\overrightarrow{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$, який будемо позначати $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{u}$ або $\overrightarrow{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$, який будемо позначати $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{u}$ або $\overrightarrow{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

# Кути

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$, який будемо позначати $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{u}$ або $\overrightarrow{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$, який будемо позначати $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{u}$ або $\overrightarrow{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

# Кути

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$, який будемо позначати $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\overrightarrow{u}$ або $\overrightarrow{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, який будемо позначати $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{u}$ або $\vec{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{\boldsymbol{u}}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}$, який будемо позначати $\angle(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{\boldsymbol{u}}$ або $\vec{\boldsymbol{v}}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{u}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, який будемо позначати $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{u}$ або $\vec{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \text{і} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, який будемо позначати $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{u}$ або $\vec{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

**Означення 1.5.1**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, який будемо позначати $\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{u}$ або $\vec{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

### Означення 1.5.1

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, який будемо позначати $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{u}$ або $\vec{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

### Означення 1.5.1

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, який будемо позначати $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{u}$ або $\vec{v}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \text{і} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Інтуїтивне поняття кута між двома векторами — це те, що можна почути раніше, ймовірно, вивчаючи евклідову геометрію в середній школі. У цій лекції ми показуємо, що існує дуже просте строге означення цього поняття, яке також дуже легко обчислити. Все, що ми робимо в цій лекції, стосується довільного дійсного векторного простору із внутрішнім добутком, але, заради конкретності, ми обмежуємо вивчення евклідовим простором із його стандартним скалярним добутком.

### Означення 1.5.1

Нехай $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Означимо *кут* $\theta$ між векторами $\vec{\boldsymbol{u}}$ і $\vec{\boldsymbol{v}}$, який будемо позначати $\angle\left(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}\right)$, наступним чином: якщо один з векторів $\vec{\boldsymbol{u}}$ або $\vec{\boldsymbol{v}}$ є нуль-вектором, то $\theta = 0$, в іншому випадку $\theta$ є дійсним числом таким, що

$$\cos\theta = \frac{\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}}{\left|\vec{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\vec{\boldsymbol{v}}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

# Кути

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за 1, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}|$, $|\overrightarrow{\boldsymbol{q}}|$, та $|\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{q}}|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за 1, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $|\overrightarrow{p}|$, $|\overrightarrow{q}|$, та $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за 1, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $|\overrightarrow{p}|$, $|\overrightarrow{q}|$, та $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за 1, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $\left|\overrightarrow{p}\right|$, $\left|\overrightarrow{q}\right|$, та $\left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}\right|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за 1, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$, та $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

# Кути

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за $1$, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $\left|\overrightarrow{p}\right|$, $\left|\overrightarrow{q}\right|$, та $\left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}\right|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за $1$, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $|\overrightarrow{p}|$, $|\overrightarrow{q}|$, та $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за $1$, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.



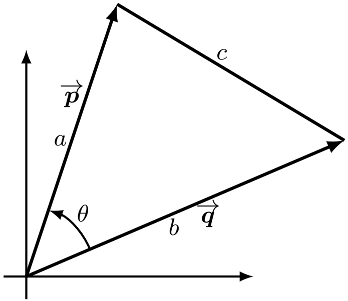

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, та $|\vec{p} - \vec{q}|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за $1$, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.



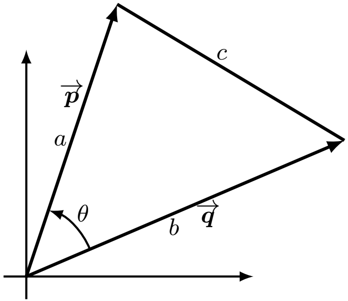

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$, та $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Відзначимо суто формальний аспект цього означення і, що нам потрібна нерівність Коші-Шварца, щоб переконатися, що абсолютне значення величини в рівності умови (1)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right|} \qquad \text{і} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1}$$

не більше за $1$, інакше такого кута не існувало б. Мотивація означення кута між векторами — це теорема косинусів з евклідової геометрії, зображена на рис.




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

Щоб побачити це, необхідно замінити значення $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$, та $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right|$ на $a$, $b$ і $c$, відповідно, і спростити результат.

Тепер, якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\overrightarrow{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\overrightarrow{u}$ (див. рис.).




$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

*якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то величина $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$.*

# Кути

Тепер, якщо $\left|\vec{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\vec{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\vec{u}$ (див. рис.).




$$\left|\vec{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{v}\right| \cos\theta$$

Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

> *якщо $\left|\vec{u}\right| = 1$, то величина $\vec{u} \bullet \vec{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$.*

Тепер, якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\overrightarrow{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\overrightarrow{u}$ (див. рис.).




$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

*якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то величина $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$.*

Тепер, якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\overrightarrow{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\overrightarrow{u}$ (див. рис.).




$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

*якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то величина $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$.*

Тепер, якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\overrightarrow{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\overrightarrow{u}$ (див. рис.).




$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

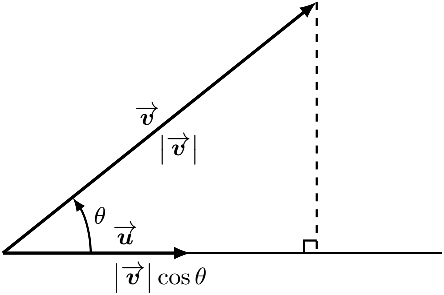
Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

> *якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то величина $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$.*

Тепер, якщо $\left|\vec{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\vec{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\vec{u}$ (див. рис.).




$$\left|\vec{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{v}\right| \cos\theta$$

Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

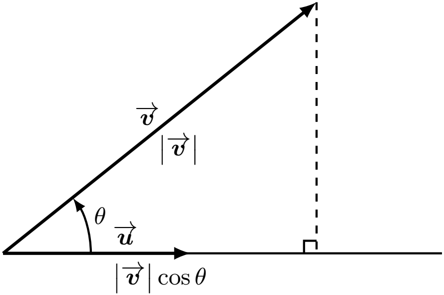
> *якщо $\left|\vec{u}\right| = 1$, то величина $\vec{u} \bullet \vec{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$.*

# Кути

Тепер, якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\overrightarrow{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\overrightarrow{u}$ (див. рис.).




$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

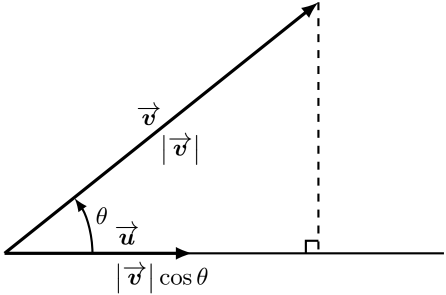
Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

*якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то величина $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$.*

Тепер, якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то очевидно, що

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta,$$

і ця формула визнає співвідношення між довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з гіпотенузою $\overrightarrow{v}$ та його катетом у напрямку базисного вектора $\overrightarrow{u}$ (див. рис.).




$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

Це означає, що ми можемо дати наступну корисну інтерпретацію скалярного добутку:

*якщо $\left|\overrightarrow{u}\right| = 1$, то величина $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ дорівнює довжині ортогональної проєкції вектора $\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{u}$.*

### Означення 1.5.2

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перпендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

### Означення 1.5.3

Два вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

### Теорема 1.5.4

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\overrightarrow{u} \| \overrightarrow{v}$, то за означенням маємо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $\left|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle\right| = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, а отже $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. ∎

### Означення 1.5.2

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

### Означення 1.5.3

Два вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

### Теорема 1.5.4

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\overrightarrow{u} \| \overrightarrow{v}$, то за означенням маємо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $\left|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle\right| = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, а отже $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\overrightarrow{u} \| \overrightarrow{v}$, то за означенням маємо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, а отже $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$, то за означенням маємо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, а отже $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\overrightarrow{u} \| \overrightarrow{v}$, то за означенням маємо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, а отже $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

### Означення 1.5.2

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

### Означення 1.5.3

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

### Теорема 1.5.4

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\overrightarrow{u} \| \overrightarrow{v}$, то за означенням маємо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, а отже $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. ∎

### Означення 1.5.2

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

### Означення 1.5.3

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

### Теорема 1.5.4

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

*Доведення.* Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перерпендикулярні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Якщо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\overrightarrow{u} \| \overrightarrow{v}$, то за означенням маємо $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\overrightarrow{u}$ і $\overrightarrow{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ або $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, а отже $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. ∎

# Кути

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

*Доведення.* Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

*Доведення.* Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

*Доведення.* Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перерпендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ■

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. $\blacksquare$

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \parallel \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

# Кути

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.2**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перепендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

**Означення 1.5.3**

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

**Теорема 1.5.4**

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.
$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.
Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ∎

### Означення 1.5.2

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, то будемо говорити, що ці вектори *перерпендикулярні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Якщо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то будемо говорити, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ *паралельні* та записуватимемо це так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

### Означення 1.5.3

Два вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ у ***довільному*** векторному просторі зі скалярним добутком $\bullet$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

### Теорема 1.5.4

Нехай $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Тоді:

$(i)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є ортогональними;

$(ii)$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ є лінійно залежними.

***Доведення.*** Твердження $(i)$ випливає з означення скалярного добутку векторів.

$(ii)$ Якщо $\vec{u} \| \vec{v}$, то за означенням маємо $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$. Тоді вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ колінеарні, тобто є лінійно залежними.

Навпаки, припустимо, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ лінійно залежні. Тоді за нерівністю Коші-Шварца маємо, що $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, і з означення скалярного добутку випливає, що $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ або $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, а отже $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ■

# Кути

Хоча слова "ортогональний" і "перпендикулярний" мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

На звавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{u}$ і базовим вектором $\overrightarrow{e_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

# Кути

Хоча слова “ортогональний” і “перпендикулярний” мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

На ззавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{u}$ і базовим вектором $\overrightarrow{e_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова "ортогональний" і "перпендикулярний" мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

На звавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{u}$ і базовим вектором $\overrightarrow{e_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова "ортогональний" і "перпендикулярний" мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

На звавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{u}$ і базовим вектором $\overrightarrow{e_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова “ортогональний” і “перпендикулярний” мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

На зваершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{u}$ і базовим вектором $\overrightarrow{e_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова "ортогональний" і "перпендикулярний" мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

Наззавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{u}$ і базовим вектором $\overrightarrow{e_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова "ортогональний" і "перпендикулярний" мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.
На зазвершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{e}_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і базовим вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{e}_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова “ортогональний” і “перпендикулярний” мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.

На зваершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{e_i}} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і базовим вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{e_i}}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова "ортогональний" і "перпендикулярний" мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.
На звавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{e}_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і базовим вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{e}_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова “ортогональний” і “перпендикулярний” мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.
На звавершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{e}_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і базовим вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{e}_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова “ортогональний” і “перпендикулярний” мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.
На зввершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{e}_i} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і базовим вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{e}_i}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{v}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Хоча слова “ортогональний” і “перпендикулярний” мають різні понятійні означення, теорема 1.5.4 стверджує, що вони означають одне і те ж саме, і ми маємо надзвичайно простий тест на цю властивість, а саме нам потрібно лише перевірити, чи точковий добуток векторів дорівнює нулю. Перевірка того, чи два вектори паралельні, є трохи складнішою. Ми повинні перевірити, чи один з них є кратним іншому.
На зввершенні зауважимо, якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є одиничним вектором, то $u_i = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{e_i}} = \cos\theta_i$, де $\theta_i$ — кут між вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ і базовим вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{e_i}}$. Це обґрунтовує таку термінологію:

**Означення 1.5.5**

Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — ненульовий вектор, то $i$-а компонента одиничного вектора називається *$i$-им напрямним косинусом вектора*.

Дякую за увагу!