# Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

## Лекція 14: Прямі

# Прямі

Наша перша мета в цій та подальших лекціях – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто 0-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме "прямі" лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.

Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв'язків лінійного рівняння.

# Прямі

Наша перша мета в цій та подальших лекціях – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто 0-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме “прямі” лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.
Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв’язків лінійного рівняння.

# Прямі

Наша перша мета в цій та подальших лекціях – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто 0-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме "прямі" лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.

Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв'язків лінійного рівняння.

Наша перша мета в цій та подальших лекціях – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто $0$-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме "прямі" лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.

Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв'язків лінійного рівняння.

# Прямі

Наша перша мета в цій та подальших лекціях – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто $0$-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме "прямі" лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.

Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв'язків лінійного рівняння.

# Прямі

Наша перша мета в цій та подальших лекціях – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто $0$-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме "прямі" лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.

Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв'язків лінійного рівняння.

# Прямі

Наша перша мета в цій та подальших лекціях – охарактеризувати лінійні підпростори евклідового простору та узагальнити деякі основні факти про них. Про точки, тобто $0$-вимірні лінійні підпростори, не можна сказати багато, але одновимірні підпростори, а саме “прямі” лінії — це особливий випадок, на який варто звернути увагу окремо.

Перш за все, розглянемо прямі на площині. Звичайне визначення прямої в даному випадку — це множина розв'язків лінійного рівняння.

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $L$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.




$(a)$ $(b)$ $(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $L$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду
$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \qquad (1)$$
де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.




$(a)$




$(b)$




$(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.




$(a)$




$(b)$




$(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}\,, \tag{1}$$

де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.




$(a)$




$(b)$




$(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x,y) \mid ax+by=c\}, \tag{1}$$

де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a=0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b=0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b\neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої.*



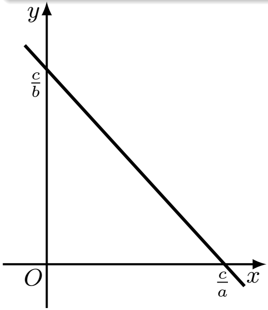

$(a)$ $(b)$ $(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

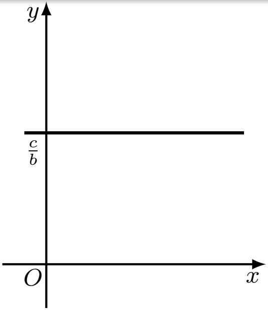
Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

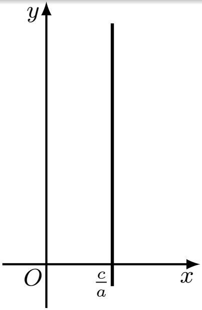
де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.




$(a)$



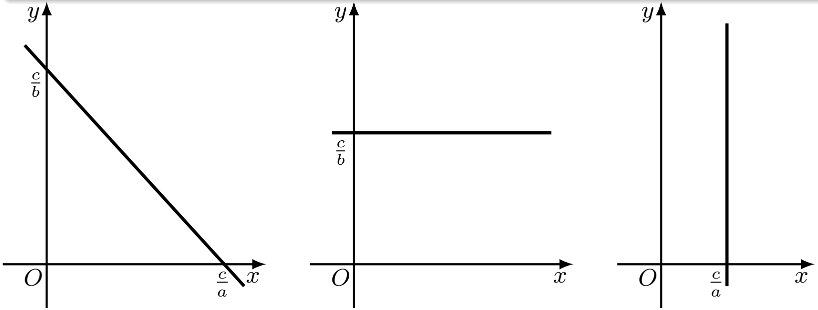

$(b)$




$(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду
$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$
де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої.*



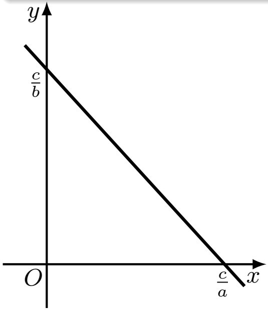

$(a)$ $(b)$ $(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

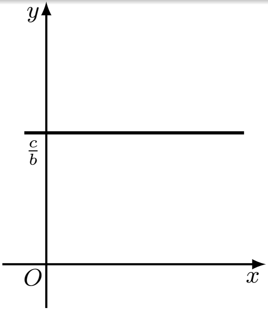
Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

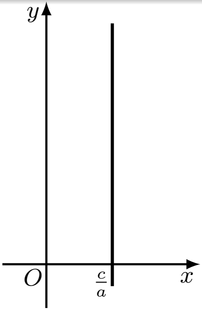
де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.




$(a)$




$(b)$



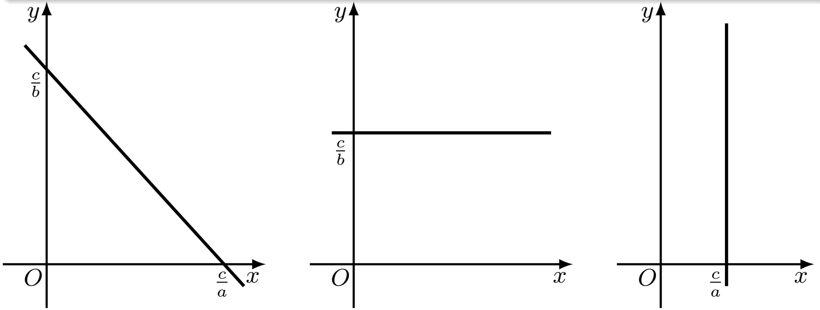

$(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\{(x,y) \mid ax+by=c\}\,, \tag{1}$$

де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a=0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b=0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.



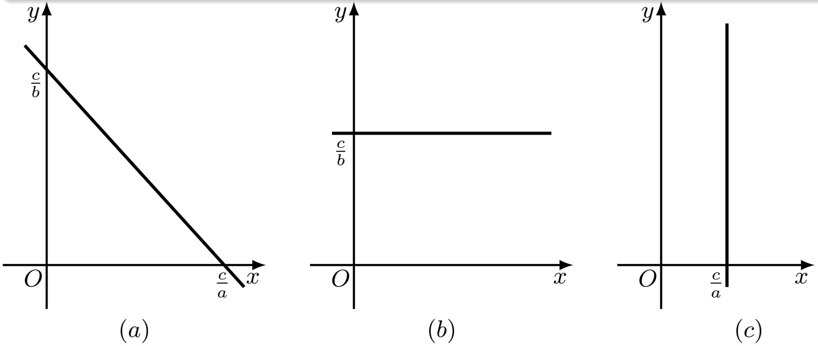

$(a)$ $(b)$ $(c)$

**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

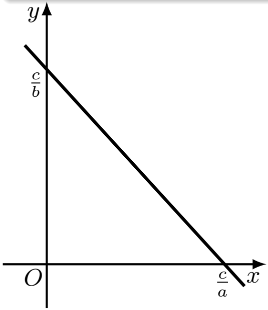
$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a = 0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b = 0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.

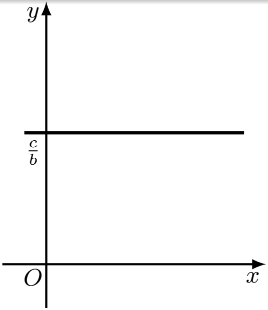


**Означення 1.4.1 (рівняння прямої на площині)**

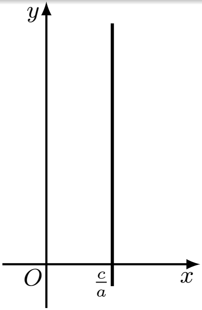
Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду
$$\{(x,y) \mid ax+by=c\}\,, \qquad (1)$$
де $a, b$ і $c$ — довільні фіксовані дійсні константи (числа) такі, що $a$ і $b$ одночасно відмінні від нуля, називається *прямою* (див. рис. $(a)$). Якщо $a=0$, то пряма називається *горизонтальною* (див. рис. $(b)$). Якщо $b=0$, то пряма називається *вертикальною* (див. рис. $(c)$). Якщо $b \neq 0$, то число $-a/b$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.




$(a)$




$(b)$




$(c)$

# Прямі

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

# Прямі

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

# Прямі

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

# Прямі

Хоча рівняння визначає єдину пряму, саме рівняння не визначається однозначно прямою. Можна помножити рівняння прямої на будь-яку ненульову константу, і отримане рівняння, яке все одно визначатиме ту ж саму пряму.

*Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і відрізок*: пряма з кутовим коефіцієнтом $m$ і $y$-відрізком $(0, b)$ визначається рівнянням

$$y = mx + b. \tag{2}$$

*Рівняння прямої через точку та кутовий коефіцієнт*: пряма, що проходить через точку $(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом $m$ визначається рівнянням

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{3}$$

*Рівняння прямої через дві точки*: пряма, що проходить через дві різні точки $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$ (див. рис.) визначається рівнянням

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4}$$




Зауважимо, що рівняння (2)–(4) можна застосувати лише для невертикальних прямих, тобто ці рівняння визначають лише невертикальні прямі.

*Рівняння прямої через дві точки*: пряма, що проходить через дві різні точки $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$ (див. рис.) визначається рівнянням

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad (4)$$




Зауважимо, що рівняння (2)–(4) можна застосувати лише для невертикальних прямих, тобто ці рівняння визначають лише невертикальні прямі.

*Рівняння прямої через дві точки*: пряма, що проходить через дві різні точки $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$ (див. рис.) визначається рівнянням

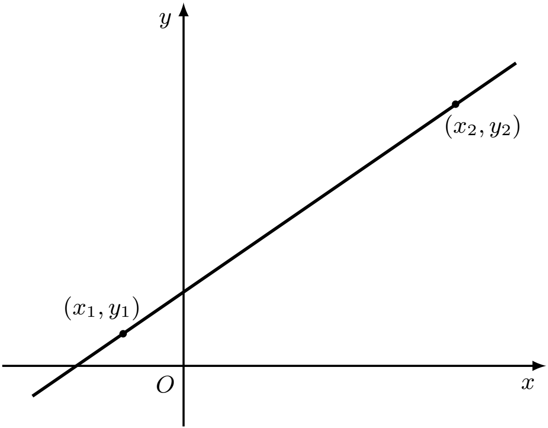
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4}$$




Зауважимо, що рівняння (2)–(4) можна застосувати лише для невертикальних прямих, тобто ці рівняння визначають лише невертикальні прямі.

*Рівняння прямої через дві точки*: пряма, що проходить через дві різні точки $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$ (див. рис.) визначається рівнянням

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4}$$

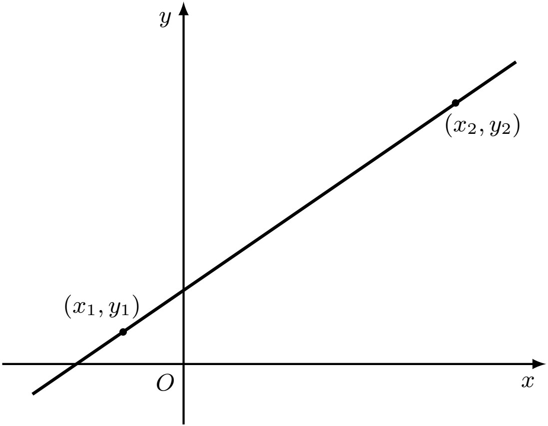



Зауважимо, що рівняння (2)–(4) можна застосувати лише для невертикальних прямих, тобто ці рівняння визначають лише невертикальні прямі.

# Прямі

*Рівняння прямої через дві точки*: пряма, що проходить через дві різні точки $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$ (див. рис.) визначається рівнянням

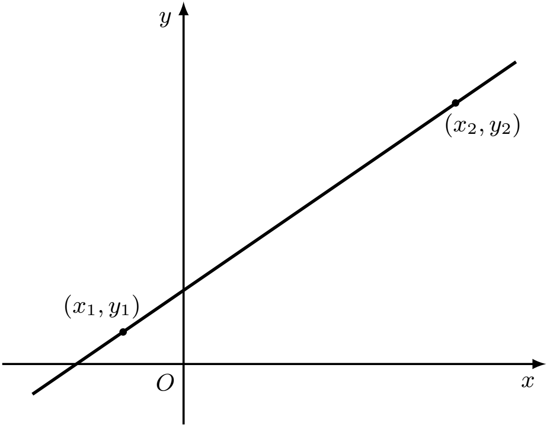
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4}$$




Зауважимо, що рівняння (2)–(4) можна застосувати лише для невертикальних прямих, тобто ці рівняння визначають лише невертикальні прямі.

*Рівняння прямої через дві точки*: пряма, що проходить через дві різні точки $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$ (див. рис.) визначається рівнянням

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4}$$




Зауважимо, що рівняння (2)–(4) можна застосувати лише для невертикальних прямих, тобто ці рівняння визначають лише невертикальні прямі.

# Прямі

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $L$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $L$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

# Прямі

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $L$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $L$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

# Прямі

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $L$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $L$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

# Прямі

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}\,, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

# Прямі

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (5)$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку $\boldsymbol{p}$*. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$* (див. випадок $n = 3$ на рис.).

# Прямі

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду
$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad (5)$$
де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

# Прямі

Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду
$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad (5)$$
де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).

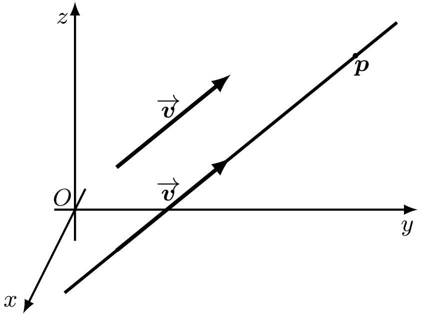
Коли є потреба визначити прямі в більш високих вимірах, тоді вже не можна використовувати єдине рівняння, і далі ми дамо альтернативне означення прямої, яке працює у всіх вимірах. На основі інтуїтивно зрозумілої геометричної ідеї пряма визначається точкою та напрямком.

**Означення 1.4.2 (рівняння прямої через точку та напрямний вектор)**

Довільна множина $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}^n$ вигляду

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{p}$ — фіксована точка і $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ — фіксований ненульовий вектор в $\mathbb{R}^n$, називається *прямою, яка проходить через точку* $\boldsymbol{p}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ називається *напрямним вектором прямої* $\boldsymbol{L}$ (див. випадок $n = 3$ на рис.).



# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots &\qquad \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x,y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.

Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots & \quad \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.

Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \cdots & \quad \cdots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.

Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots & \qquad \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$. Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots &\quad\ \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.
У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.
Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \ldots & \quad \ldots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$. Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \ldots & \quad\ \ldots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$. Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots & \quad \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.
У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.
Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots & \qquad \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.
У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.
Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots & \quad \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.
У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.
Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \cdots &\qquad \cdots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.
У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.
Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму.
Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \dots & \quad\; \dots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.

Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p_1 + tv_1, \\
x_2 &= p_2 + tv_2, \\
\dots & \qquad \dots \\
x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.

Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

## Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \ldots & \qquad \ldots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$.

Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму.

Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

# Прямі

Розглядаючи окремо компоненти типової точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ на прямій $\boldsymbol{L}$, тобто розклавши покоординатно рівність векторів $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tv_1, \\ x_2 &= p_2 + tv_2, \\ \ldots & \qquad \ldots \\ x_n &= p_n + tv_n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

У випадку площини легко бачити, що вище описані означення прямої узгоджуються. Означення, засноване на рівнянні формули (1)

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}, \tag{1}$$

є неявним означенням, тобто об'єкт був визначений рівнянням, тоді як означення за допомогою формули (5)

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{5}$$

є явним означенням, тобто об'єкт визначається з точки зору *параметризації*. Ми можемо розглядати $t$ як часовий параметр і про те, що йдемо по прямій, перебуваючи в точці $\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ в момент часу $t$. Зауважимо, що напрямний вектор для прямої не є єдиним. Будь-який ненульовий вектор кратний вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ буде визначати ту ж саму пряму. Напрямні вектори є аналогами кутових коефіцієнтів у вищих вимірах.

**Приклад 1.4.3**

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $p = (0, 2, 3)$ і $q = (-2, 1, -1)$.

***Розв'язок.*** Вектор $\overrightarrow{pq} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $L$, а отже параметричним рівнянням прямої $L$ є

$$x = -2t,$$
$$y = 2 - t,$$
$$z = 3 - 4t.$$

**Приклад 1.4.3**

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2, 3)$ і $\boldsymbol{q} = (-2, 1, -1)$.

***Розв'язок.*** Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$, а отже параметричним рівнянням прямої $\boldsymbol{L}$ є

$$\begin{aligned} x &= -2t, \\ y &= 2 - t, \\ z &= 3 - 4t. \end{aligned}$$

**Приклад 1.4.3**

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2, 3)$ і $\boldsymbol{q} = (-2, 1, -1)$.

***Розв'язок.*** Вектор $\overrightarrow{pq} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$, а отже параметричним рівнянням прямої $\boldsymbol{L}$ є

$$x = -2t,$$
$$y = 2 - t,$$
$$z = 3 - 4t.$$

**Приклад 1.4.3**

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2, 3)$ і $\boldsymbol{q} = (-2, 1, -1)$.

***Розв'язок***. Вектор $\overrightarrow{pq} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$, а отже параметричним рівнянням прямої $\boldsymbol{L}$ є

$$x = -2t,$$
$$y = 2 - t,$$
$$z = 3 - 4t.$$

**Приклад 1.4.3**

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2, 3)$ і $\boldsymbol{q} = (-2, 1, -1)$.

***Розв'язок***. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$, а отже параметричним рівнянням прямої $\boldsymbol{L}$ є

$$x = -2t,$$
$$y = 2 - t,$$
$$z = 3 - 4t.$$

# Прямі

**Приклад 1.4.3**

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2, 3)$ і $\boldsymbol{q} = (-2, 1, -1)$.

***Розв'язок***. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$, а отже параметричним рівнянням прямої $\boldsymbol{L}$ є

$$
\begin{aligned}
x &= -2t, \\
y &= 2 - t, \\
z &= 3 - 4t.
\end{aligned}
$$

**Приклад 1.4.3**

Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $\boldsymbol{p} = (0, 2, 3)$ і $\boldsymbol{q} = (-2, 1, -1)$.

***Розв'язок***. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} = (-2, -1, -4)$ є напрямним вектором прямої $\boldsymbol{L}$, а отже параметричним рівнянням прямої $\boldsymbol{L}$ є

$$\begin{aligned} x &= -2t, \\ y &= 2 - t, \\ z &= 3 - 4t. \end{aligned}$$

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок.*** Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

*Розв'язок.* Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

## Приклад 1.4.4

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок.*** Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

### Приклад 1.4.4

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1-t \\ y &= 2+t \\ z &= -1+t \end{aligned} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 1-2t \\ z &= -2+t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1-t=2+s$$

$$2+t=1-2s$$

$$-1+t=-2+s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3=3-s,$$

а отже $s=0$. Підставивши $s=0$ в перше рівняння, отримуємо $t=-1$. Оскільки два значення $t=-1$ і $s=0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t=-1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2,1,-2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s=0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок.*** Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

### Приклад 1.4.4

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

### Приклад 1.4.4

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

### Приклад 1.4.4

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

### Приклад 1.4.4

Визначити чи перетинаються прямі $L_1$ і $L_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$L_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad L_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $L_1$ маємо, що прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $L_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

## Приклад 1.4.4

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$.

Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1-t \\ y &= 2+t \\ z &= -1+t \end{aligned} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 1-2t \\ z &= -2+t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1-t = 2+s$$

$$2+t = 1-2s$$

$$-1+t = -2+s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3-s,$$

а отже $s=0$. Підставивши $s=0$ в перше рівняння, отримуємо $t=-1$. Оскільки два значення $t=-1$ і $s=0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t=-1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2,1,-2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s=0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Приклад 1.4.4**

Визначити чи перетинаються прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$, що визначаються параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + t \end{aligned} \qquad \boldsymbol{L}_2: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

***Розв'язок***. Ми маємо розв'язати рівняння

$$1 - t = 2 + s$$

$$2 + t = 1 - 2s$$

$$-1 + t = -2 + s$$

для змінних $s$ і $t$. Додавши перше та друге рівняння отримуємо, що

$$3 = 3 - s,$$

а отже $s = 0$. Підставивши $s = 0$ в перше рівняння, отримуємо $t = -1$. Оскільки два значення $t = -1$ і $s = 0$ змінних задовольняють третє рівняння, то підставивши значення параметра $t = -1$ в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_1$ маємо, що прямі $\boldsymbol{L}_1$ і $\boldsymbol{L}_2$ перетинаються в точці $(2, 1, -2)$. Аналогічний результат ми отримаємо, якщо значення параметра $s = 0$ підставимо в параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{L}_2$ замість параметра $t$. Поширена помилка при спробі розв'язати задачу, подібну до прикладу 1.4.3, — використовувати одну і ту ж змінну для $s$ і $t$. Тільки тому, що прямі перетинаються, це не означає, що люди, які "йдуть" по прямих, потраплять до точки перетину цих прямих в той же "час".

**Означення 1.4.6**

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

**Означення 1.4.7**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0,1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки* $\boldsymbol{p}$ *до точки* $\boldsymbol{q}$ (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

**Означення 1.4.6**

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

**Означення 1.4.7**

Нехай $p, q \in \mathbb{R}^n$. Множина
$$\{p + t\overrightarrow{pq} \mid t \in [0,1]\} \qquad (7)$$
називається *відрізком від точки $p$ до точки $q$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[p, q]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[p, q]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $p$ і $q$.

### Означення 1.4.6

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

### Означення 1.4.7

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки* $\boldsymbol{p}$ *до точки* $\boldsymbol{q}$ (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

### Означення 1.4.6

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

### Означення 1.4.7

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0,1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

**Означення 1.4.6**

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

**Означення 1.4.7**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0,1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

## Означення 1.4.6

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

## Означення 1.4.7

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

# Прямі

**Означення 1.4.6**

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

**Означення 1.4.7**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0,1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$*.

### Означення 1.4.6

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

### Означення 1.4.7

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$*.

**Означення 1.4.6**

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

**Означення 1.4.7**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\left\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\right\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

**Означення 1.4.6**

Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

**Означення 1.4.7**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

**Означення 1.4.6**

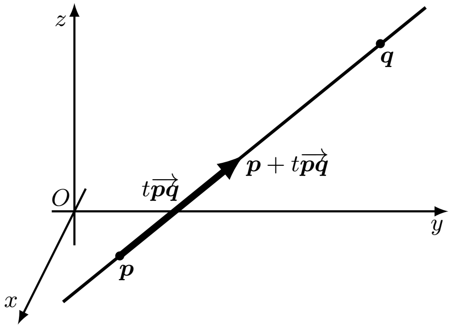
Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

**Означення 1.4.7**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$*.



### Означення 1.4.6

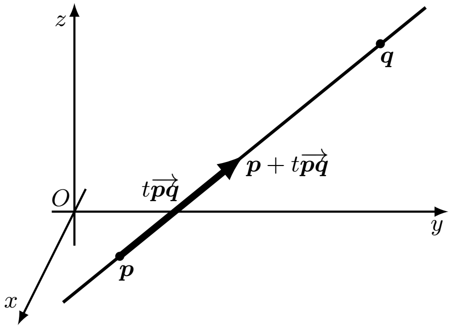
Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

### Означення 1.4.7

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0, 1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$*.



### Означення 1.4.6

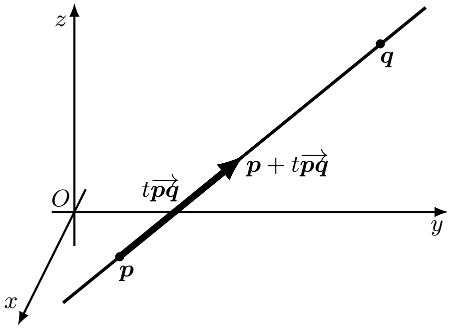
Точки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій та *неколінеарними* в протилежному випадку.

### Означення 1.4.7

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$\{\boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \mid t \in [0,1]\} \tag{7}$$

називається *відрізком від точки $\boldsymbol{p}$ до точки $\boldsymbol{q}$* (див. рис.), і надалі буде позначатися через $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. У цьому випадку кажуть, що точки відрізка $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ *лежать* (*розташовані*) *між* $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.



Зауважимо, що $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]=[\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n=1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n$. Тоді
$$[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}|+|\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|=|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай
$$\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}|+|\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|=|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]\subseteq\boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0\leqslant t\leqslant 1$. Звідси випливає, що
$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}|+|\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|=|t|\cdot|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|+|1-t|\cdot|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|=|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

# Прямі

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]=[\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n=1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}|+|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|=|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}|+|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|=|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]\subseteq\boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0\leqslant t\leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}|+|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|=|t|\cdot|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|+|1-t|\cdot|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|=|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| \right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| \right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

# Прямі

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

*Доведення.* Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}. \tag{8}$$

*Доведення.* Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1-t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|\right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| + |1-t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Зауважимо, що $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$. Відрізок в основному узагальнює поняття замкненого інтервалу дійсної прямої, що пояснює позначення, але ці два поняття не зовсім однакові, у випадку $n = 1$. Наступне твердження дає дуже корисну альтернативну характеристику відрізка.

**Твердження 1.4.8**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Нехай

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| \right\}.$$

Для доведення включення $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq \boldsymbol{S}$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$. Тоді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$ для деякого дійсного числа $t$ такого, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| + |1 - t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|,$$

а отже $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Для доведення включення $S \subseteq [p, q]$ зафіксуємо довільне точку $x \in S$. Оскільки

$$|\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{px} + \overrightarrow{xq}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{px}$ і $\overrightarrow{xq}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{xq}| + |\overrightarrow{xq}| = |t \cdot \overrightarrow{xq} + \overrightarrow{xq}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$ можна переписати так

$$x = p + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{pq}.$$

З останньої рівності випливає, що $x \in [p, q]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

# Прямі

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{px}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

Для доведення включення $S \subseteq [p, q]$ зафіксуємо довільне точку $x \in S$. Оскільки

$$|\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{px} + \overrightarrow{xq}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{px}$ і $\overrightarrow{xq}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{xq}| + |\overrightarrow{xq}| = |t \cdot \overrightarrow{xq} + \overrightarrow{xq}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$ можна переписати так

$$x = p + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{pq}.$$

З останньої рівності випливає, що $x \in [p, q]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

Для доведення включення $S \subseteq [p, q]$ зафіксуємо довільне точку $x \in S$. Оскільки
$$|\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{px} + \overrightarrow{xq}|,$$
то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{px}$ і $\overrightarrow{xq}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$. Тоді
$$|t| \cdot |\overrightarrow{xq}| + |\overrightarrow{xq}| = |t \cdot \overrightarrow{xq} + \overrightarrow{xq}|.$$
Іншими словами,
$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$
Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$ можна переписати так
$$x = p + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{pq}.$$
З останньої рівності випливає, що $x \in [p, q]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ∎

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{px}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

# Прямі

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{px}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \qquad (9)$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. $\blacksquare$

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{px}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{xq}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}} + \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{px}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{xq}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ∎

Для доведення включення $S \subseteq [p, q]$ зафіксуємо довільне точку $x \in S$. Оскільки

$$|\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{px} + \overrightarrow{xq}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{px}$ і $\overrightarrow{xq}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{xq}| + |\overrightarrow{xq}| = |t \cdot \overrightarrow{xq} + \overrightarrow{xq}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$ можна переписати так

$$x = p + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{pq}.$$

З останньої рівності випливає, що $x \in [p, q]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ∎

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ∎

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

Для доведення включення $S \subseteq [p, q]$ зафіксуємо довільне точку $x \in S$. Оскільки

$$|\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{px} + \overrightarrow{xq}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{px}$ і $\overrightarrow{xq}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{xq}| + |\overrightarrow{xq}| = |t \cdot \overrightarrow{xq} + \overrightarrow{xq}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$ можна переписати так

$$x = p + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{pq}.$$

З останньої рівності випливає, що $x \in [p, q]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ∎

Для доведення включення $S \subseteq [p, q]$ зафіксуємо довільне точку $x \in S$. Оскільки

$$|\overrightarrow{px}| + |\overrightarrow{xq}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{px} + \overrightarrow{xq}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{px}$ і $\overrightarrow{xq}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{xq}| + |\overrightarrow{xq}| = |t \cdot \overrightarrow{xq} + \overrightarrow{xq}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{px} = t \cdot \overrightarrow{xq}$ можна переписати так

$$x = p + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{pq}.$$

З останньої рівності випливає, що $x \in [p, q]$, оскільки $0 \leqslant \frac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ∎

Для доведення включення $\boldsymbol{S} \subseteq [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ зафіксуємо довільне точку $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Оскільки

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|,$$

то з нерівності трикутника випливає, що вектори $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ є лінійно залежними. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$. Тоді

$$|t| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}| = |t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}} + \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}|.$$

Іншими словами,

$$|t| + 1 = |t + 1|. \tag{9}$$

Легко бачити, що розв'язки рівняння (9) задовольняють нерівність $0 \leqslant t$. Але рівність $\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}}$ можна переписати так

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{1+t} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}.$$

З останньої рівності випливає, що $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$, оскільки $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$. ■

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $p$ — точка на прямій $L$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $x$ на $L$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $q$ — точка на прямій $L$, відмінна від точки $p$. Тоді кожна точка $x$ на прямій $L$ має визначається наступним чином $x = p + s \cdot \overrightarrow{pq}$, а отже $c = |\overrightarrow{px}| = |s| \cdot |\overrightarrow{pq}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{pq}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{pq}|}$. Іншими словами,

$$x = p + t \cdot \overrightarrow{pq} \qquad \text{або} \qquad x = p - t \cdot \overrightarrow{pq},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $p$ — точка на прямій $L$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $x$ на $L$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{px}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $q$ — точка на прямій $L$, відмінна від точки $p$. Тоді кожна точка $x$ на прямій $L$ має визначається наступним чином $x = p + s \cdot \overrightarrow{pq}$, а отже $c = |\overrightarrow{px}| = |s| \cdot |\overrightarrow{pq}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{pq}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{pq}|}$. Іншими словами,

$$x = p + t \cdot \overrightarrow{pq} \qquad \text{або} \qquad x = p - t \cdot \overrightarrow{pq},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

# Прямі

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ■

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ■

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ∎

Наступне твердження доводить ще один досить корисний факт. Воно також відіграє ключову роль у доведенні ряду майбутніх теорем.

**Твердження 1.4.9**

Нехай $\boldsymbol{p}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$. Якщо $c > 0$, то існує дві та лише дві точки $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$ такі, що виконується рівність $|\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = c$.

***Доведення.*** Нехай $\boldsymbol{q}$ — точка на прямій $\boldsymbol{L}$, відмінна від точки $\boldsymbol{p}$. Тоді кожна точка $\boldsymbol{x}$ на прямій $\boldsymbol{L}$ має визначається наступним чином $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}$, а отже $c = |\overrightarrow{\boldsymbol{px}}| = |s| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|$. Тоді лише $s = \pm t$ є розв'язками рівняння $|s| = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$, де $t = \dfrac{c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{pq}}|}$. Іншими словами,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}} \qquad \text{або} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{pq}},$$

що і завершує доведення нашого твердження. ■

# Прямі

На завершення означимо поняття променя.

### Означення 1.4.10

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$

На завершення означимо поняття променя.

**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$

На завершення означимо поняття променя.

**Означення 1.4.10**

Нехай $p, q, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, то *промінь з точки $p$ в напрямку $\overrightarrow{v}$* (див. рис.), який позначається $\mathsf{ray}(p, \overrightarrow{v})$, визначається за формулою

$$\mathsf{ray}(p, \overrightarrow{v}) = \left\{ p + t \cdot \overrightarrow{v} \mid 0 \leqslant t \right\}.$$

Якщо $p \neq q$, то *промінь з точки $p$ через точку $q$*, який позначається через $[pq\rangle$, визначається за формулою

$$[pq\rangle = \mathsf{ray}(p, \overrightarrow{pq}).$$

На завершення означимо поняття променя.

**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$

На завершення означимо поняття променя.

**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$

На завершення означимо поняття променя.

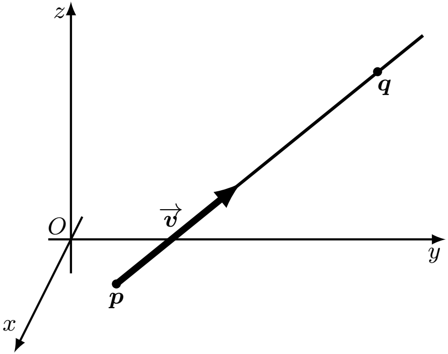
**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *променів з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$



На завершення означимо поняття променя.

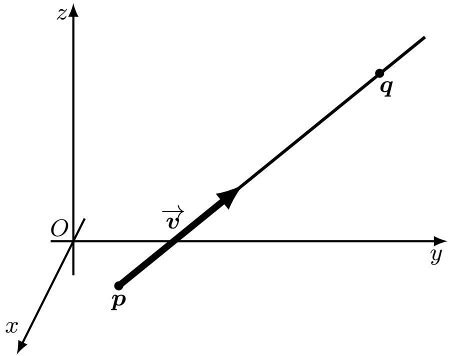
**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *променіь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\textbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\textbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \textbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$



На завершення означимо поняття променя.

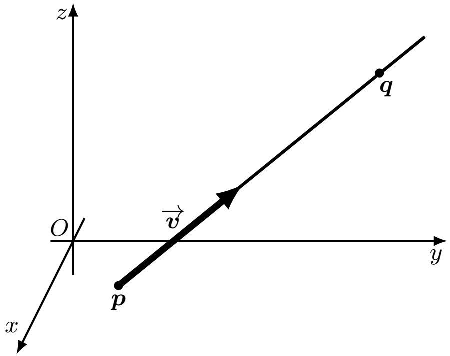
**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$



На завершення означимо поняття променя.

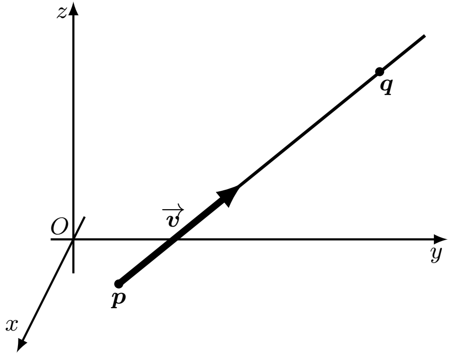
**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\textbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\textbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \textbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$



На завершення означимо поняття променя.

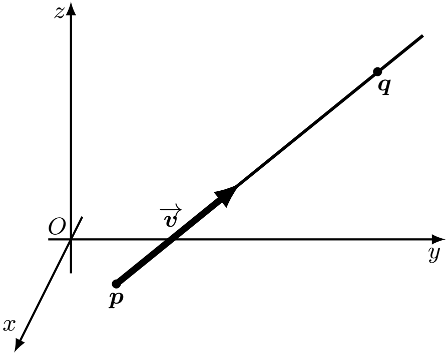
**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$



На завершення означимо поняття променя.

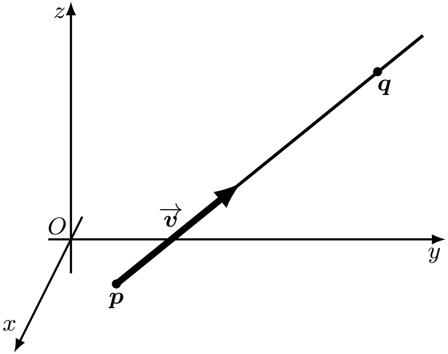
**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{pq}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{pq}\rangle = \mathbf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{pq}}).$$



На завершення означимо поняття променя.

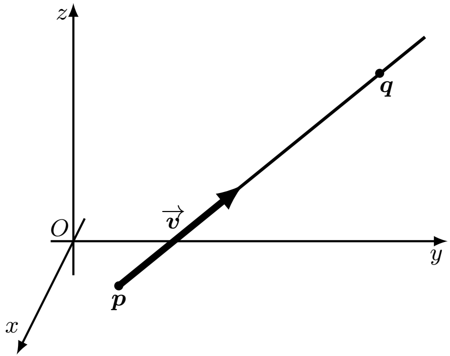
**Означення 1.4.10**

Нехай $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ в напрямку $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$* (див. рис.), який позначається $\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, визначається за формулою

$$\mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \left\{\boldsymbol{p} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \mid 0 \leqslant t\right\}.$$

Якщо $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$, то *промінь з точки $\boldsymbol{p}$ через точку $\boldsymbol{q}$*, який позначається через $[\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\rangle$, визначається за формулою

$$[\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\rangle = \mathsf{ray}(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}).$$



# Дякую за увагу!