

# Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік



Лекція 13: Скалярні добутки

## Означення 1.3.9

Нехай  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $W$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$f(v_1, v_2, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = f(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_n),$$

$$f(v_1, v_2, \dots, cv_i, \dots, v_n) = cf(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n),$$

для всіх  $v_j \in V_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$  з  $v_j \in V_j$  відображення з  $V_i$  в  $W$  визначене за формулою

$$v \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $W$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$f(v_1, v_2, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = f(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_n),$$

$$f(v_1, v_2, \dots, cv_i, \dots, v_n) = cf(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n),$$

для всіх  $v_j \in V_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$  з  $v_j \in V_j$  відображення з  $V_i$  в  $W$  визначене за формулою

$$v \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається **полілінійним**, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається **білінійним**.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.



## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n), \\ f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n), \end{aligned}$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n), \\ f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n), \end{aligned}$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n), \\ f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n), \end{aligned}$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.9

Нехай  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , і  $\mathbf{W}$  — векторні простори над полем  $k$ .

Відображення

$$f: \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса  $i = 1, \dots, n$  виконуються такі дві властивості:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_n), \\ f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n), \end{aligned}$$

для всіх  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  і  $c \in k$ .

Еквівалентно, відображення  $f$  є полілінійним, якщо для кожного індексу  $i = 1, \dots, n$  і для всіх елементів  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  з  $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$  відображення з  $\mathbf{V}_i$  в  $\mathbf{W}$  визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо  $n = 2$ , то в цьому випадку відображення  $f$  називається *білінійним*.

## Означення 1.3.10

Нехай  $V$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow k : (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $V$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $u, v \in V$ :

- (1)  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  симетрична);
- (2)  $\langle u, u \rangle \geq 0$  для всіх ненульових векторів  $u$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle u, u \rangle$  вектора  $u$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle 0, u \rangle = 0, \quad \text{для всіх } u \in V,$$

і

$$\langle u, u \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } u = 0.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.



## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.



## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

## Означення 1.3.10

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір над полем  $k = \mathbb{C}$  (або  $k = \mathbb{R}$ ). Білінійне відображення

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на  $\mathbf{V}$ , якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ :

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  (якщо  $k = \mathbb{R}$  то  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ , тобто функція  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  є симетричною);
- (2)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  для всіх ненульових векторів  $\mathbf{u}$ .

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату*  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  вектора  $\mathbf{u}$  є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{для всіх } \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \text{тоді і тільки тоді, коли } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

# Скалярні добутки

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \cdots + u_n \bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленним деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.



## Означення 1.3.11

Стандартний **точковий добуток** у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний **точковий добуток** у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \cdots + u_n \bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленним деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.



## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні.

Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленням деталей. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{R}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

## Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі  $\mathbb{C}^n$  визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n.$$

## Теорема 1.3.13

Точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{C}^n$  задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на  $\mathbb{R}^n$ , ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $V$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $v \in V$ .

Означимо довжину  $|v|$  вектора  $v$  за формулою

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається одиничним вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $V$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $v \in V$ .

Означимо довжину  $|v|$  вектора  $v$  за формулою

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається одиничним вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $V$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $v \in V$ .

Означимо *довжину*  $|v|$  вектора  $v$  за формулою

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.



## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.



## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

### Означення 1.3.14

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

Означимо *довжину*  $|\mathbf{v}|$  вектора  $\mathbf{v}$  за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одичним* вектором.

Якщо вписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на  $\mathbb{R}^n$  за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

## Означення 1.3.15

Нехай  $V$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $p, q \in V$  означимо вектор з  $p$  до  $q$ , який будемо позначати через  $pq$ , за формулою

$$pq = q - p.$$

Якщо на векторному просторі  $V$  визначено скалярний добуток, то відстань від  $p$  до  $q$ , яку позначатимемо через  $\text{dist}(p, q)$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(p, q) = |pq|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

## Означення 1.3.15

Нехай  $V$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $p, q \in V$  означимо *вектор з  $p$  до  $q$* , який будемо позначати через  $pq$ , за формулою

$$pq = q - p.$$

Якщо на векторному просторі  $V$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $p$  до  $q$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(p, q)$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(p, q) = |pq|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

### Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

### Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.



### Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

### Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

## Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

### Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

## Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

### Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

## Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

### Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.



## Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

## Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

## Означення 1.3.15

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Для довільних двох точок  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$  означимо *вектор з  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , який будемо позначати через  $\mathbf{pq}$ , за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі  $\mathbf{V}$  визначено скалярний добуток, то *відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{q}$* , яку позначатимемо через  $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , визначатимемо за формулою

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

## Теорема 1.3.16

Нехай  $u$  і  $v$  — вектори векторного простору  $V$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Тоді:

$$(1) \quad |\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v| \quad (\text{нерівність Коші-Шварца})$$

$$(2) \quad |\langle u, v \rangle| = |u| \cdot |v| \quad (\text{дорівнює добутку})$$

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle u - cv, u - cv \rangle = \langle u, u \rangle - 2c \langle u, v \rangle + c^2 \langle v, v \rangle = |u|^2 - 2c \langle u, v \rangle + c^2 |v|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|u|^2 - 2c \langle u, v \rangle + c^2 |v|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle u, v \rangle)^2 - 4 |u|^2 |v|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

$$(1) \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \quad (\text{нерівність Коші-Шварца}),$$

$$(2) \quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \quad (\text{нерівність трикутника}),$$

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

$$(1) \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \quad (\text{нерівність Коші-Шварца}),$$

$$(2) \quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \quad (\text{нерівність трикутника}),$$

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

$$(1) \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \quad (\text{нерівність Коші-Шварца}),$$

$$(2) \quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \quad (\text{нерівність трикутника}),$$

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (нерівність Коші-Шварца), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (нерівність трикутника), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .



## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

*Доведення.* (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .



## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .

## Теорема 1.3.16

Нехай  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  — вектори векторного простору  $\mathbf{V}$  зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Тоді:

- (1)  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$  (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними;
- (2)  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

**Доведення.** (1) Нехай  $c \in k$  — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної  $c$ , то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ .



Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■



Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми впливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми впливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leq \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$  або  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , тобто вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

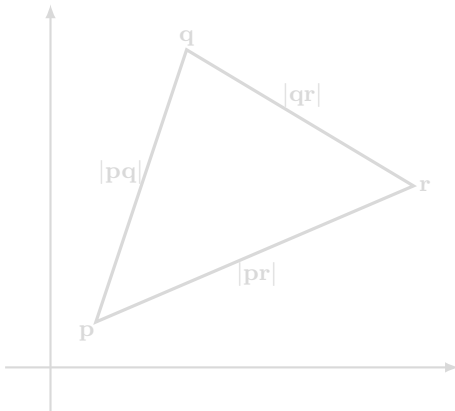
Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  є лінійно залежними. ■

## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

### Наслідок 1.3.17

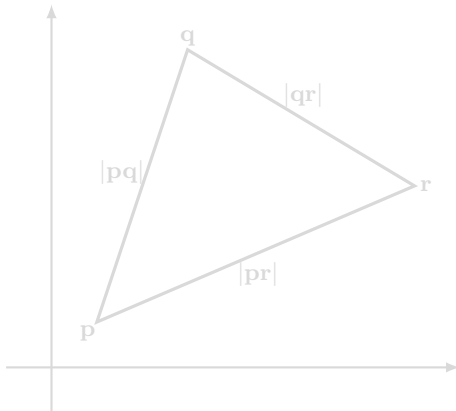
Якщо  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ , то

$$|pr| < |pq| + |qr|$$

за умови, що точки  $p, q$  і  $r$  не є колінеарними.

## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

Наслідок 1.3.17

Якщо  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ , то

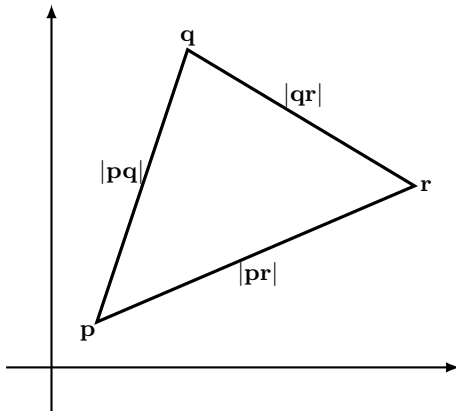
$$|pr| < |pq| + |qr|$$

за умови, що точки  $p, q$  і  $r$  не є колінеарними.



## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

Наслідок 1.3.17

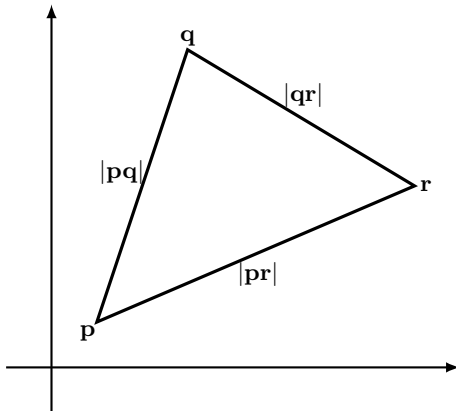
Якщо  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ , то

$$|pr| < |pq| + |qr|$$

за умови, що точки  $p, q$  і  $r$  не є колінеарними.

## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

Наслідок 1.3.17

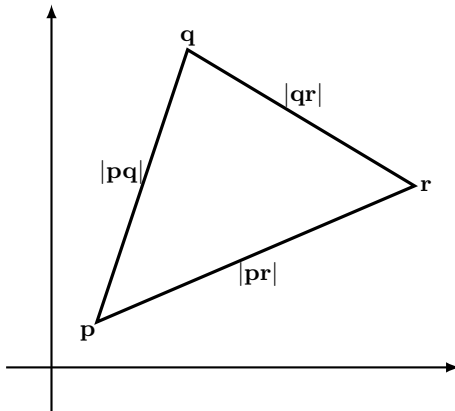
Якщо  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ , то

$$|pr| < |pq| + |qr|$$

за умови, що точки  $p, q$  і  $r$  не є колінеарними.

## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

### Наслідок 1.3.17

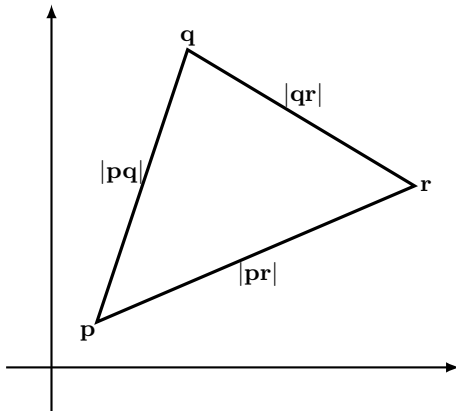
Якщо  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ , то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  і  $\mathbf{r}$  не є колінеарними.

## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

### Наслідок 1.3.17

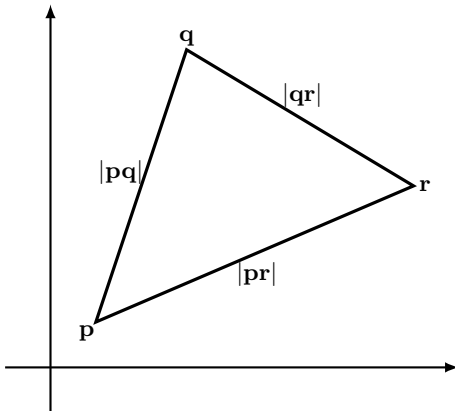
Якщо  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ , то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  і  $\mathbf{r}$  не є колінеарними.

## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

### Наслідок 1.3.17

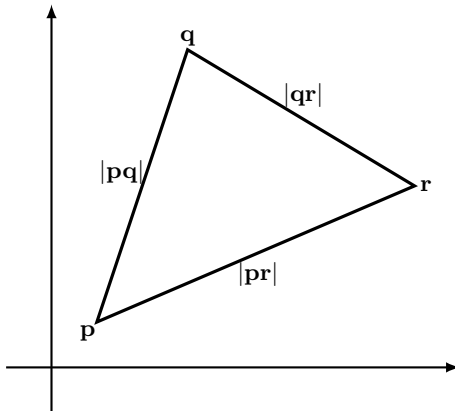
Якщо  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ , то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  і  $\mathbf{r}$  не є колінеарними.

## Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

### Наслідок 1.3.17

Якщо  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ , то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  і  $\mathbf{r}$  не є колінеарними.

Дякую за увагу!