Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 13: Скалярні добутки

Скалярні добутки

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f \colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f\colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f\colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Скалярні добутки

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \dots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f \colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \dots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i', \dots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \dots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f\colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \dots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f\colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \dots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i', \dots, \mathbf{v}_n),$$

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \dots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f\colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f : \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f \colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \dots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k. Відображення

$$f \colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$

називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \dots, n$ виконуються такі дві властивості:

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i', \dots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n),$$

для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \dots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою

$$\mathbf{v} \mapsto f\big(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n\big)$$

є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.9

Нехай $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, і $\mathbf{W}$ — векторні простори над полем k.
Відображення
$$f \colon \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \cdots \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$$
називається *полілінійним*, якщо для кожного індекса $i = 1, \ldots, n$ виконуються такі дві властивості:
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i', \ldots, \mathbf{v}_n),$$
$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = cf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n),$$
для всіх $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ і $c \in$ k.

Еквівалентно, відображення f є полілінійним, якщо для кожного індексу $i = 1, \ldots, n$ і для всіх елементів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ з $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ відображення з $\mathbf{V}_i$ в $\mathbf{W}$ визначене за формулою
$$\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$
є лінійним. Якщо $n = 2$, то в цьому випадку відображення f називається *білінійним*.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \, ,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle \, , \, \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle ,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\, ,\, \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\, ,\, \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle \ , \ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle ,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle \ , \ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle ,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Скалярні добутки

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle ,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Означення 1.3.10

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір над полем $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ (або $\mathsf{k} = \mathbb{R}$). Білінійне відображення

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{k} \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,,$$

називається *скалярним* чи *внутрішнім добутком* на $\mathbf{V}$, якщо це відображення задовольняє такі дві умови для всіх $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (якщо $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ то $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, тобто функція $\langle\ ,\ \rangle$ є симетричною);

(2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{u}$.

Зауважимо, що значення *скалярного квадрату* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вектора $\mathbf{u}$ є завжди дійсним числом за умовою (1), а отже властивість (2) має зміст. Легко довести, що в загальному випадку скалярний добуток також задовольняє такі умови

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{для всіх} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

і

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Ми пропонуємо слухачам в якості вправи довести ці дві рівності.

Скалярні добутки

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.
Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Скалярні добутки

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.
Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Скалярні добутки

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Скалярні добутки

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.

Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.
Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Скалярні добутки

Означення 1.3.11

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Означення 1.3.12

Стандартний *точковий добуток* у векторному просторі $\mathbb{C}^n$ визначається за формулою:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Теорема 1.3.13

Точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ є скалярними добутками.

Безпосередньо перевіркою доводиться, що точкові добутки на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ задовольняють властивості (1) і (2) скалярного добутку. Ми пропонуємо читачеві як вправу довести твердження теореми 1.3.13.
Якщо все, що хочеться зробити, це мати точковий добуток на $\mathbb{R}^n$, ми могли б відмовитися від означення скалярного добутку і просто довели, що точковий добуток задовольняє властивості, перелічені в його означенні. Однак сенс абстрагування основних властивостей в означенні полягає в тому, що воно виокремлює суттєві властивості скалярного добутку і не може бути відхиленим деталями. Векторні простори допускають багато різних функцій, які задовольняють означення скалярного добутку.

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\, ,\, \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$
Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Скалярні добутки

Скалярний добуток у векторному просторі дозволяє нам дати просте означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком.

Означення 1.3.14

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$ і $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Означимо *довжину* $|\mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{v}$ за формулою

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Вектор довжини 1 називається *одиничним* вектором.

Якщо виписати це означення довжини вектора для стандартного точкового добутку на $\mathbb{R}^n$ за його координатами, видно, що це просто звичайна евклідова довжина; однак це не дуже важливий момент. Саме властивість (2) в означенні точкового добутку гарантує, що наше означення довжини вектора коректно визначене. Ця та інші властивості також гарантують, що нерівність трикутника буде виконуватися (див. теорему 1.3.16 нижче), а отже ми мали хороше означення довжини вектора у векторному просторі зі скалярним добутком. На цей аспект потрібно наголосити. Те, що робить лінійну алгебру красивою, це саме те, що вона дозволяє нам розв'язувати задачі елегантним, чистим способом, не втручаючись у брудні обчислення з координатами. Доки ми використовуємо лише загальні (і суттєві) властивості, такі, як в означенні для скалярного добутку, ми зможемо дати прості доведення.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від* $\mathbf{p}$ *до* $\mathbf{q}$, яку позначатимемо через $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Означення 1.3.15

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Для довільних двох точок $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{V}$ означимо *вектор з $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, який будемо позначати через $\mathbf{pq}$, за формулою

$$\mathbf{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Якщо на векторному просторі $\mathbf{V}$ визначено скалярний добуток, то *відстань від $\mathbf{p}$ до $\mathbf{q}$*, яку позначатимемо через $\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, визначатимемо за формулою

$$\mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{pq}|.$$

Існують дві дуже важливі нерівності, які стосуються скалярного добутку: це нерівність Коші-Шварца (нерівність Коші-Буняковського) та нерівність трикутника, які доведено в теоремі 1.3.16.

Скалярні добутки

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (нерівність Коші-Шварца);

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (нерівність трикутника).

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathrm{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**).

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**).

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathrm{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u}-c\mathbf{v}, \mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**);

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**).

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u}-c\mathbf{v}, \mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Скалярні добутки

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**).

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**).

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u}-c\mathbf{v}, \mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathrm{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathrm{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4\,|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \Bbbk$ — довільний скаляр. Тоді

$$0\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2<0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle)^2-4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2<0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4\,|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ *(**нерівність Коші-Шварца**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ *(**нерівність трикутника**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ *(**нерівність Коші-Шварца**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ *(**нерівність трикутника**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ *(**нерівність Коші-Шварца**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ *(**нерівність трикутника**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4\,|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0}\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2<0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle)^2-4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2<0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ *(**нерівність Коші-Шварца**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$ *(**нерівність трикутника**)*, і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0}\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2<0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle)^2-4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2<0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\leqslant|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c\in\mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0}\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2<0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle)^2-4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2<0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\leqslant|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4\,|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Теорема 1.3.16

Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ — вектори векторного простору $\mathbf{V}$ зі скалярним добутком $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді:

(1) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ (**нерівність Коші-Шварца**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними;

(2) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (**нерівність трикутника**), і ця нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Доведення. (1) Нехай $c \in \mathsf{k}$ — довільний скаляр. Тоді

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2. \quad (1)$$

Якщо ми розглянемо крайню праву частину нерівностей (1) як квадратне рівняння відносно змінної c, то можна використати властивість дискримінанта для квадратичної функції, що нерівність

$$|\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 < 0$$

виконується тоді і лише тоді, коли

$$(-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 < 0,$$

звідки випливає нерівність $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u}-c\mathbf{v}, \mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.
Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.
Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + |\mathbf{v}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Скалярні добутки

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \qquad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= \langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\\ &=|\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant\\ &\leqslant|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2=\\ &=(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.
Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.
Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2&=\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\\&=|\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant\\&\leqslant|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2=\\&=(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними. ∎

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2&=\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\\&=|\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant\\&\leqslant|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2=\\&=(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними. $\blacksquare$

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$\mathbf{0}\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2&=\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\\&=|\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant\\&\leqslant|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2=\\&=(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$\mathbf{0}\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2&=\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\\&=|\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant\\&\leqslant|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2=\\&=(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 , \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$\mathbf{0}\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2&=\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\\&=|\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant\\&\leqslant|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2=\\&=(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$\mathbf{0}\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2&=\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\\&=|\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant\\&\leqslant|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2=\\&=(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0\leqslant\langle\mathbf{u}-c\mathbf{v},\mathbf{u}-c\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{u}|^2-2c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+c^2|\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u}=c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= \langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+|\mathbf{v}|^2\leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,\end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$0 \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 , \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними. ■

Зауважимо, легко бачити, що нерівність (1)

$$\mathbf{0} \leqslant \langle \mathbf{u} - c\mathbf{v}, \mathbf{u} - c\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 - 2c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + c^2 |\mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ або $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, тобто вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними.

Альтернативний спосіб довести нерівність Коші-Шварца — це просто встановити значення

$$c = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

в нерівності (1) і спростити отриманий вираз.

Твердження (2) теореми випливає з нерівності Коші-Шварца, оскільки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\mathbf{v}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

і ця нерівність перетворюється в рівність за умови, коли вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ є лінійно залежними. ■

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),

і його сформульовано в наступному наслідку.

Наслідок 1.3.17

Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),

і його сформульовано в наступному наслідку.

Наслідок 1.3.17

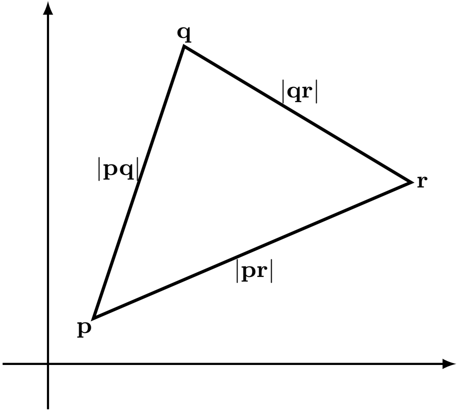
Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Скалярні добутки

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

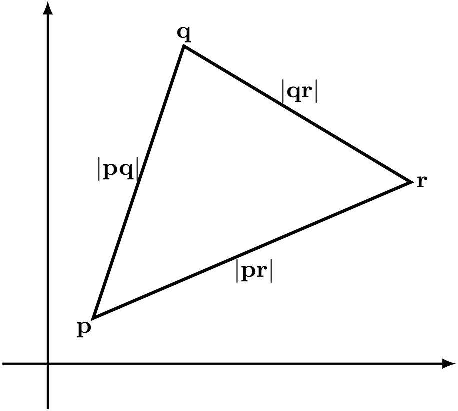
Наслідок 1.3.17

Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

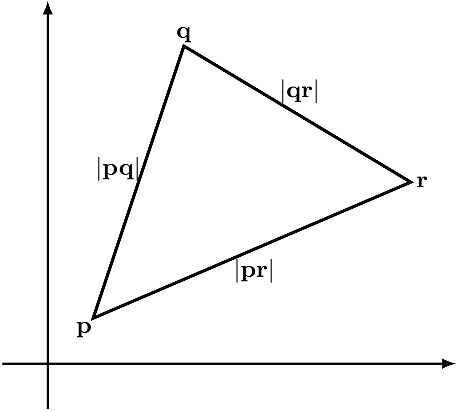
Наслідок 1.3.17

Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

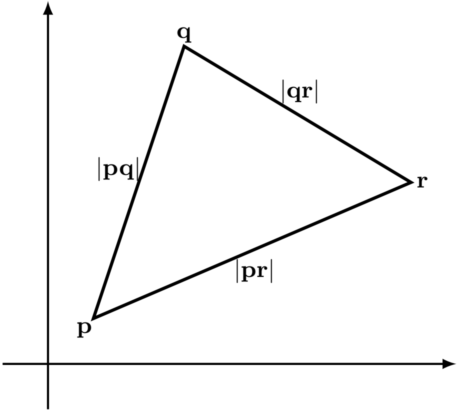
Наслідок 1.3.17

Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

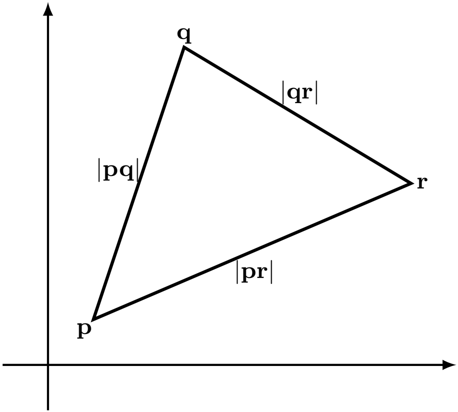
Наслідок 1.3.17

Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

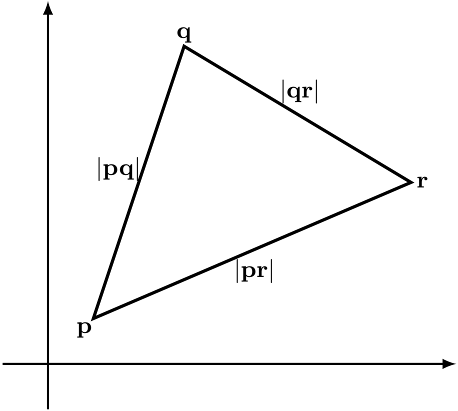
Наслідок 1.3.17

Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Геометричний зміст нерівності трикутника полягає в тому, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони (див. рис.),



і його сформульовано в наступному наслідку.

Наслідок 1.3.17

Якщо $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\mathbf{pr}| < |\mathbf{pq}| + |\mathbf{qr}|$$

за умови, що точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{r}$ не є колінеарними.

Дякую за увагу!