

# Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік



Лекція 12: Ще про лінійну залежність

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $p_0, p_1, \dots, p_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $p_0, p_1, \dots, p_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $p_0, p_1, \dots, p_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $p_0, p_1, \dots, p_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $p_0, p_1, \dots, p_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $p_0, p_1, \dots, p_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $p_0, p_1, \dots, p_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.



## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

## Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

### Означення 1.3.1

Елементи  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

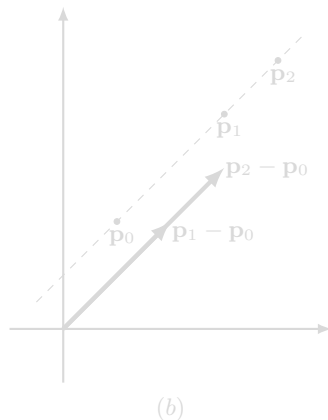
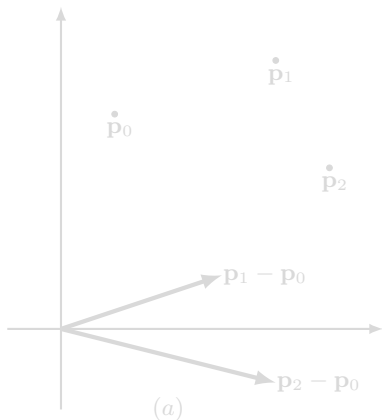
### Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.



## Ще про лінійну залежність

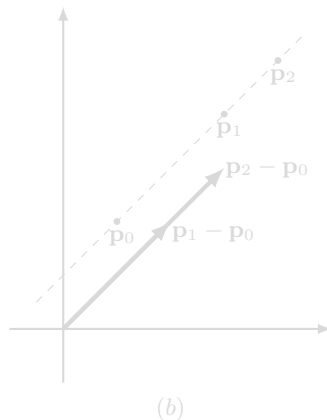
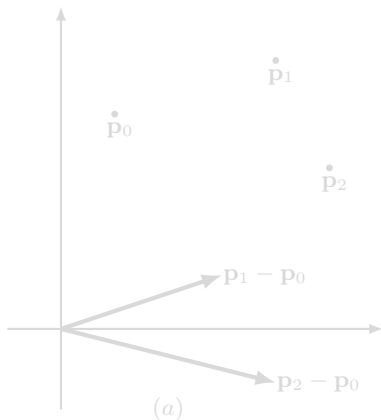
На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

## Ще про лінійну залежність

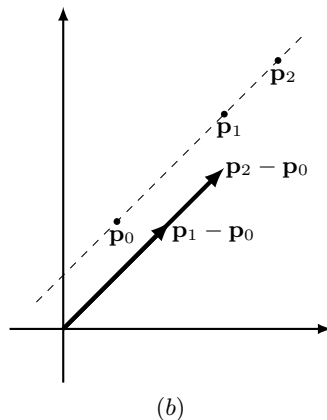
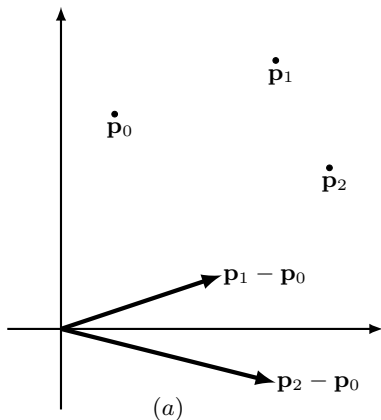
На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

## Ще про лінійну залежність

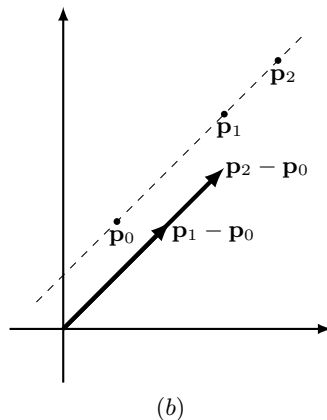
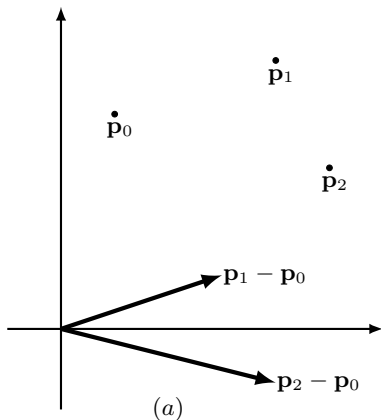
На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

## Ще про лінійну залежність

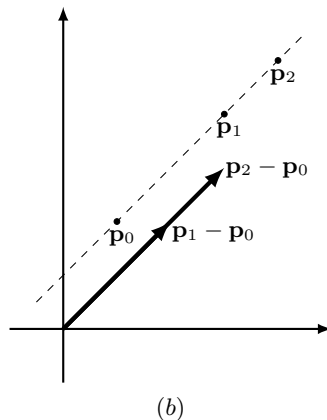
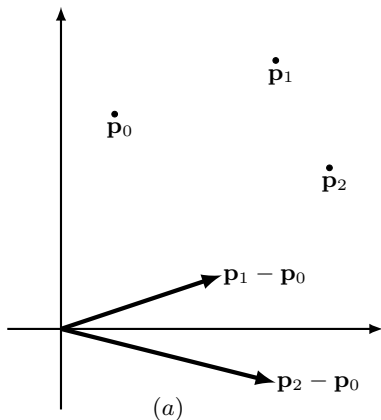
На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

## Ще про лінійну залежність

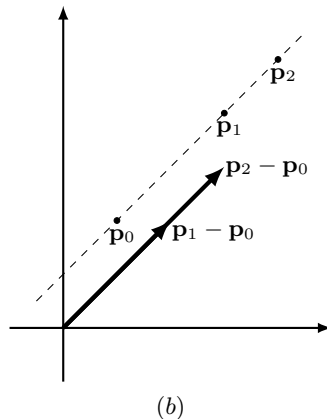
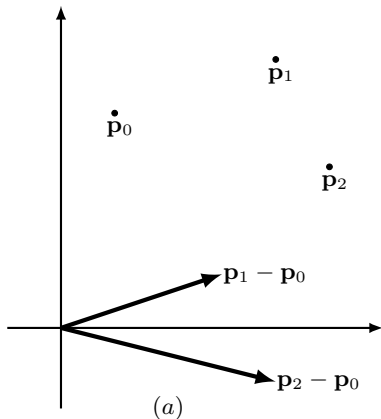
На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

## Ще про лінійну залежність

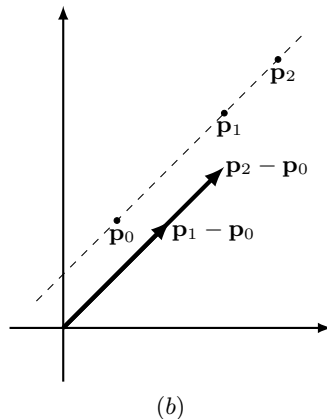
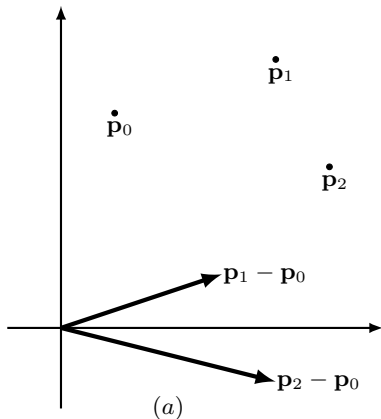
На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

## Ще про лінійну залежність

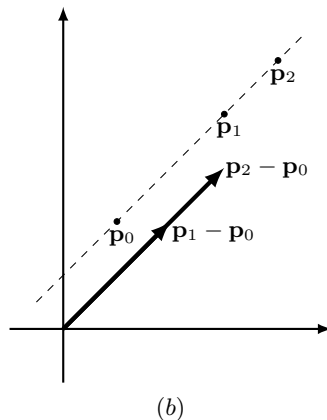
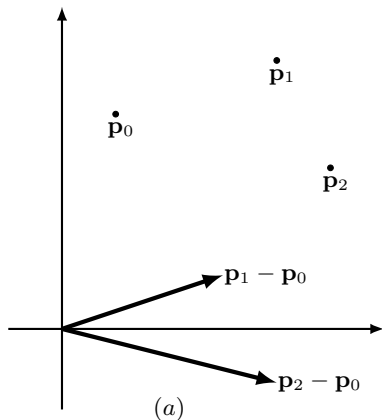
На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

## Ще про лінійну залежність

На рис. (a) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки  $p_0, p_1$  і  $p_2$  є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.



## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $X$  і  $Y$ , і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $X$  і  $Y$ , і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $X$  і  $Y$ , і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є прямою сумою двох підпросторів  $X$  і  $Y$ , і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $X$  і  $Y$ , і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є прямою сумою двох підпросторів  $X$  і  $Y$ , і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є прямою сумою двох підпросторів  $X$  і  $Y$ ; і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $X$  і  $Y$ ; і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$



## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $X$  і  $Y$ ; і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — підмножини векторного простору  $V$ . Сума  $X + Y$  множин  $X$  і  $Y$  визначається так:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ , то  $X + Y$  є підпростором в  $V$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $V$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $X$  і  $Y$ , і ми це позначатимемо  $V = X \oplus Y$ , якщо

$$V = X + Y \quad \text{і} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підмножини векторного простору  $\mathbf{V}$ . Сума  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  множин  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  є підпростором в  $\mathbf{V}$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $\mathbf{V}$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$ , і ми це позначатимемо  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ , якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підмножини векторного простору  $\mathbf{V}$ . Сума  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  множин  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  є підпростором в  $\mathbf{V}$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $\mathbf{V}$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$ , і ми це позначатимемо  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ , якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підмножини векторного простору  $\mathbf{V}$ . Сума  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  множин  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  є підпростором в  $\mathbf{V}$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $\mathbf{V}$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$ , і ми це позначатимемо  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ , якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

## Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

### Означення 1.3.3

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підмножини векторного простору  $\mathbf{V}$ . Сума  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  множин  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

### Теорема 1.3.4

Якщо  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  є підпростором в  $\mathbf{V}$ .

### Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір  $\mathbf{V}$  є *прямою сумою* двох підпросторів  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$ , і ми це позначатимемо  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ , якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ . Тоді  $V = X \oplus Y$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $V = X \oplus Y$  і нехай  $a = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$  для деякого вектора  $a \in V$ , де  $x_1, x_2 \in X$  і  $y_1, y_2 \in Y$ . Тоді

$$0 = a - a = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2).$$

Припустимо, що  $x_1 - x_2 \neq 0$  або  $y_1 - y_2 \neq 0$ . Тоді, оскільки  $x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2)$ ,  $x_1 - x_2 \in X$  і  $y_1 - y_2 \in Y$ , то  $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in X \cap Y$ . А це суперечить тому, що  $X \cap Y = \{0\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ . Якщо  $X \cap Y \neq \{0\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $a \in X \cap Y$ , отримуємо, що  $a \in X$  і  $a \in Y$ , тобто  $a = a + 0$ , де  $a \in X$  і  $0 \in Y$ , і  $a = 0 + a$ , де  $0 \in X$  і  $a \in Y$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ . Тоді  $V = X \oplus Y$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ .

*Доведення.* Припустимо, що  $V = X \oplus Y$  і нехай  $a = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$  для деякого вектора  $a \in V$ , де  $x_1, x_2 \in X$  і  $y_1, y_2 \in Y$ . Тоді

$$0 = a - a = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2).$$

Припустимо, що  $x_1 - x_2 \neq 0$  або  $y_1 - y_2 \neq 0$ . Тоді, оскільки  $x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2)$ ,  $x_1 - x_2 \in X$  і  $y_1 - y_2 \in Y$ , то  $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in X \cap Y$ . А це суперечить тому, що  $X \cap Y = \{0\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ . Якщо  $X \cap Y \neq \{0\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $a \in X \cap Y$ , отримуємо, що  $a \in X$  і  $a \in Y$ , тобто  $a = a + 0$ , де  $a \in X$  і  $0 \in Y$ , і  $a = 0 + a$ , де  $0 \in X$  і  $a \in Y$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ . ■



Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $X$  і  $Y$  — підпростори векторного простору  $V$ . Тоді  $V = X \oplus Y$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ .

*Доведення.* Припустимо, що  $V = X \oplus Y$  і нехай  $a = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$  для деякого вектора  $a \in V$ , де  $x_1, x_2 \in X$  і  $y_1, y_2 \in Y$ . Тоді

$$0 = a - a = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2).$$

Припустимо, що  $x_1 - x_2 \neq 0$  або  $y_1 - y_2 \neq 0$ . Тоді, оскільки  $x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2)$ ,  $x_1 - x_2 \in X$  і  $y_1 - y_2 \in Y$ , то  $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in X \cap Y$ . А це суперечить тому, що  $X \cap Y = \{0\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ . Якщо  $X \cap Y \neq \{0\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $a \in X \cap Y$ , отримуємо, що  $a \in X$  і  $a \in Y$ , тобто  $a = a + 0$ , де  $a \in X$  і  $0 \in Y$ , і  $a = 0 + a$ , де  $0 \in X$  і  $a \in Y$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $v \in V$  має єдине зображення у вигляді  $v = x + y$ , де  $x \in X$  і  $y \in Y$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

*Доведення.* Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

*Доведення.* Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■



Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .

Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ . Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■



Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

Виконується така теорема:

### Теорема 1.3.6

Нехай  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  — підпростори векторного простору  $\mathbf{V}$ . Тоді  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  тоді і лише тоді, коли кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ .

*Доведення.* Припустимо, що  $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$  і нехай  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  для деякого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ . Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  або  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$ . Тоді, оскільки  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$ , то  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . А це суперечить тому, що  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ .  
Припустимо, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . Якщо  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$ , то взявши довільний ненульовий вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ , отримуємо, що  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ , тобто  $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$ , де  $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$ , і  $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ , де  $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$ . Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  має єдине зображення у вигляді  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ . ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $V$  — векторний простір і  $T: V \rightarrow V$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування на  $V$* .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: V \rightarrow V$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $V$  будемо розуміти, що  $T^2(x) = T(T(x)) = T(x)$  для кожного  $x \in V$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $V$  — векторний простір. Якщо  $T: V \rightarrow V$  — оператор проєктування на  $V$ , то

$$V = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $v \in V$  можна записати у вигляді

$$v = T(v) + (v - T(v))$$

і очевидно, що різниця  $v - T(v)$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проєктування  $T: V \rightarrow V$ .

Якщо  $V = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $V \rightarrow X: x + y \mapsto x$ , для  $x \in X$  і  $y \in Y$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■



### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проектування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проектування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

*Доведення.* Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проектування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проектування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проектування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проектування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проектування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проектування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проектування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проектування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проектування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проектування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■



### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проєктування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проєктування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\ker(T)$  оператора проєктування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \ker(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проєктування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проектування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проектування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проектування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

### Означення 1.3.7

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір і  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення). Якщо  $T^2 = T$ , то відображення  $T$  називається *оператором проектування* на  $\mathbf{V}$ .

У цьому означенні під записом  $T^2 = T$ , де  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — лінійне відображення (перетворення) векторного простору  $\mathbf{V}$  будемо розуміти, що  $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$  для кожного  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ .

### Теорема 1.3.8

Нехай  $\mathbf{V}$  — векторний простір. Якщо  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  — оператор проектування на  $\mathbf{V}$ , то

$$\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T).$$

**Доведення.** Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця  $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$  належить ядру  $\text{ker}(T)$  оператора проектування  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Якщо  $\mathbf{V} = \text{im}(T) \oplus \text{ker}(T)$ , то відображення  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ , для  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ , є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проєкції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

Дякую за увагу!