Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 12: Ще про лінійну залежність

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел.

Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел.

Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел.

Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел. Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

Векторні простори були вже визначені у лекції 5. Далі в наступних лекціях ми даємо підсумок усіх важливих фактів про векторні простори, які використовуються в лекціях. Для отримання більш детальної інформації зацікавлений читач звертається до будь-якого підручника з лінійної алгебри, наприклад, до перелічених монографій у бібліографії цього курсу. Для простоти, якщо не зазначено інше, всі векторні простори ми вважаємо скінченно вимірними векторними просторами над полем дійсних чисел.
Тісно пов'язане з поняттям лінійно незалежних векторів — це поняття лінійно незалежних точок.

Означення 1.3.1

Елементи $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ векторного простору називаються *лінійно незалежними точками*, якщо

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0$$

є лінійно незалежними як вектори, і в протилежному випадку ці елементи називаються *лінійно залежними точками*.

Наступна теорема є очевидною і ми залишаємо її доведення слухачам.

Теорема 1.3.2

Лінійна незалежність чи залежність точок не залежать від порядку, в якому вони перераховані.

Ще про лінійну залежність

На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,

(a)

(b)

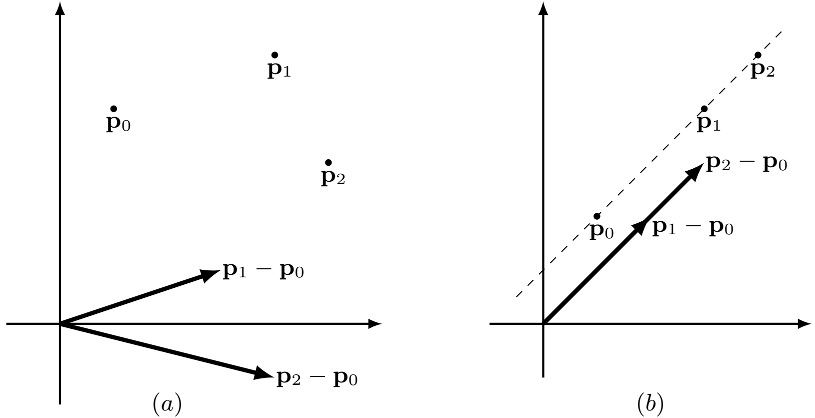
але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, двo- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,

але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

Ще про лінійну залежність

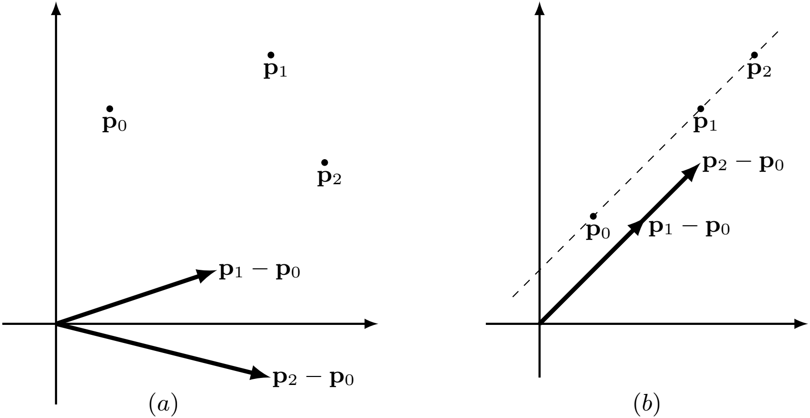
На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

Ще про лінійну залежність

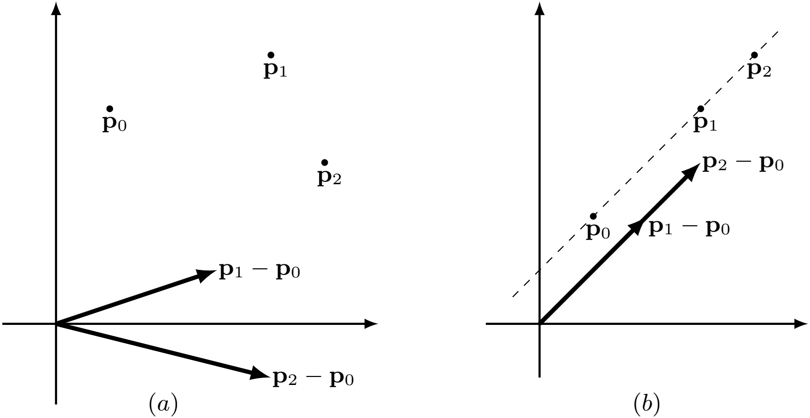
На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

Ще про лінійну залежність

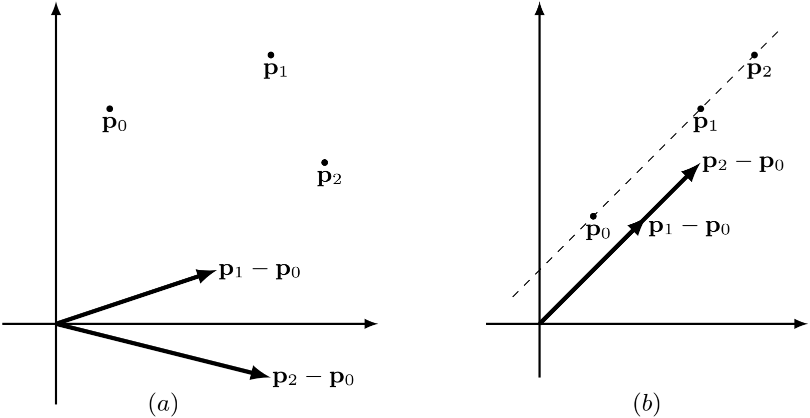
На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

Ще про лінійну залежність

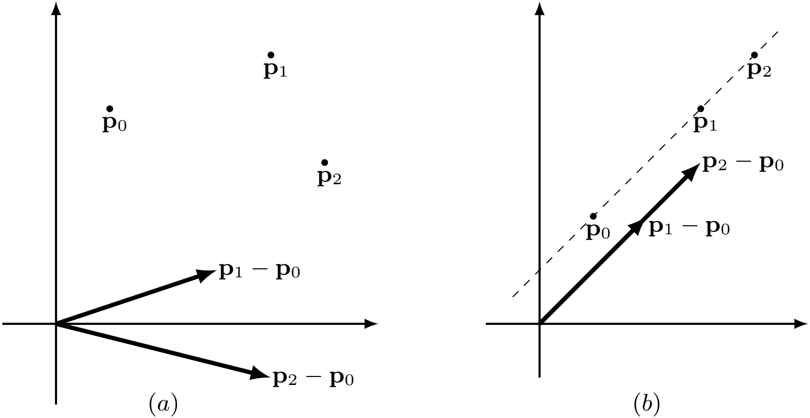
На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

Ще про лінійну залежність

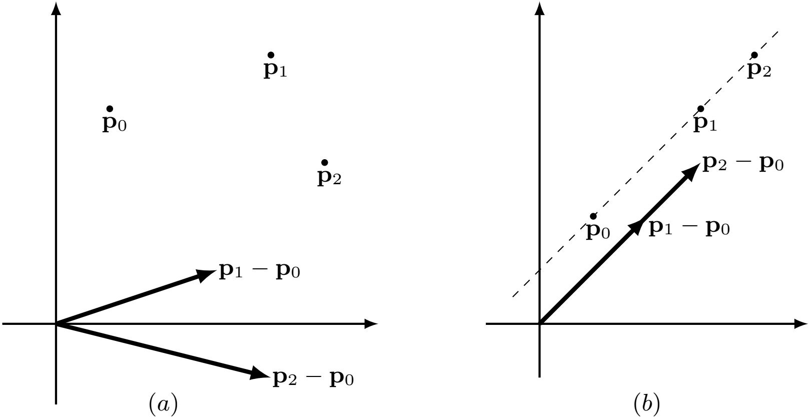
На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

Ще про лінійну залежність

На рис. (a) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно незалежними точками,



але на рис. (b) точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ є лінійно залежними точками. Інтуїтивно кажучи, точки є лінійно незалежними, якщо вони породжують максимальний вимірний простір (максимальний щодо кількості залучених точок). На рис. (a) та (b) точки породжують, відповідно, дво- та одновимірні підпростори. Через те, що три точки можуть породжувати двовимірний простір, то точки на рис. (b) називають лінійно залежними.

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y} = \{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y} = \{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}+\mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y} = \{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}+\mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\{\mathbf{x}+\mathbf{y}\mid \mathbf{x}\in\mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+\mathbf{Y} \quad \text{і} \quad \mathbf{X}\cap\mathbf{Y}=\{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Іноді хочеться розкласти векторний простір на суму його підпросторів.

Означення 1.3.3

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підмножини векторного простору $\mathbf{V}$. *Сума* $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ визначається так:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ і } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Доведення наступної теореми очевидне.

Теорема 1.3.4

Якщо $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ є підпростором в $\mathbf{V}$.

Означення 1.3.5

Будемо говорити, що векторний простір $\mathbf{V}$ є *прямою сумою* двох підпросторів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, і ми це позначатимемо $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$, якщо

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}.$$

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ■

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ■

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.

Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.

Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ■

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ∎

Ще про лінійну залежність

Виконується така теорема:

Теорема 1.3.6

Нехай $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ — підпростори векторного простору $\mathbf{V}$. Тоді $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ тоді і лише тоді, коли кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ і нехай $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ для деякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, де $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$. Тоді

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Припустимо, що $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ або $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$. Тоді, оскільки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{Y}$, то $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. А це суперечить тому, що $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$.
Припустимо, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Якщо $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, то взявши довільний ненульовий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, отримуємо, що $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$, де $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{0} \in \mathbf{Y}$, і $\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$, де $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Отримане суперечить нашому припущенню, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ має єдине зображення у вигляді $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. ■

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \mathrm{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \mathrm{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ◻

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.
Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.
Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.
Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.
Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. $\square$

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.
Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.
Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \mathrm{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \mathrm{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами.

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ■

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами.

Ще про лінійну залежність

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \mathrm{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \mathrm{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Означення 1.3.7

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір і $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення). Якщо $T^2 = T$, то відображення T називається *оператором проектування* на $\mathbf{V}$.

У цьому означенні під записом $T^2 = T$, де $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — лінійне відображення (перетворення) векторного простору $\mathbf{V}$ будемо розуміти, що $T^2(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Теорема 1.3.8

Нехай $\mathbf{V}$ — векторний простір. Якщо $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — оператор проектування на $\mathbf{V}$, то

$$\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T).$$

Доведення. Необхідність твердження теореми є очевидним наслідком того факту, що кожен вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

і очевидно, що різниця $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ належить ядру $\ker(T)$ оператора проектування $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Якщо $\mathbf{V} = \operatorname{im}(T) \oplus \ker(T)$, то відображення $\mathbf{V} \to \mathbf{X} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$, для $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ і $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, є очевидно оператором проектування. Таким чином, існує взаємно однозначне відображення, яке є відповідністю між операторами проекції на векторному просторі та прямими його сумами. ∎

Дякую за увагу!