Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 11: Правило Крамера та обернена матриця

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{i-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x}=\vec{b},$$

де $A=\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b})=\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}.$$

і-й стовпчик

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x}=\vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i=\frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

$$\uparrow\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}}}}{\vec{b}} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Ми розглянемо формули, що пов'язують детермінанти з розв'язками систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Через $A_i(\vec{b})$ позначатимемо матрицю, яка отримується з матриці A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$\begin{array}{c} A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}. \\ \uparrow \\ \boxed{\text{і-й стовпчик}} \end{array}$$

Теорема 1.2.114 (правило Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Правило Крамера

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми. ∎

Правило Крамера

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми. ∎

Правило Крамера

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми. ◻

Правило Крамера

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}).\end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми.

Доведення. Маємо:

$$
\begin{aligned}
AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\
&= A_i(\vec{b}).
\end{aligned}
$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$
\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix} = x_i,
$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми. ■

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} AI_i(\vec{x}) &= A\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{x} & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{x} & \cdots & A\vec{e}_n\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = \\ &= A_i(\vec{b}). \end{aligned}$$

Оскільки визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$\det A \cdot \det I_i(\vec{x}) = \det(AI_i(\vec{x})) = \det A_i(\vec{b}).$$

Разом з тим

$$\det(I_i(\vec{x})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_i,$$

що випливає з розкладу цього визначника за i-им рядком. Таким чином,

$$\det A \cdot x_i = \det A_i(\vec{b}),$$

звідки діленням на $\det A$ ($\det A \neq 0$ оскільки матриця A оборотна) завершується доведення теореми. ■

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\dfrac{4}{7}$ і $x_2 = \dfrac{13}{7}$.

Правило Крамера

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\dfrac{4}{7}$ і $x_2 = \dfrac{13}{7}$.

Правило Крамера

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\dfrac{4}{7}$ і $x_2 = \dfrac{13}{7}$.

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\frac{4}{7}$ і $x_2 = \frac{13}{7}$.

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\frac{4}{7}$ і $x_2 = \frac{13}{7}$.

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\frac{4}{7}$ і $x_2 = \frac{13}{7}$.

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\frac{4}{7}$ і $x_2 = \frac{13}{7}$.

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\dfrac{4}{7}$ і $x_2 = \dfrac{13}{7}$.

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\frac{4}{7}$ і $x_2 = \frac{13}{7}$.

Приклад 1.2.115

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знаходимо далі

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Отже, $x_1 = -\dfrac{4}{7}$ і $x_2 = \dfrac{13}{7}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Правило Крамера

Зауважимо, що розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою формул (1)

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(вони називаються *формулами Крамера*) в загальному випадку неефективно. Ці формули зручні для розв'язування систем другого чи третього порядку, для систем вищих порядків зручніше використати метод Гауса. Незважаючи на це, формули Крамера мають велику теоретичну цінність.

Також зауважимо, що за допомогою визначників $\det A$, $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна визначити коли система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною, або має безліч розв'язків. У двох цих випадках $\det A = 0$, причому усі детермінанти $\det A_i(\vec{b})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одночасно або рівні нулю, або ж відмінні від нуля. Отож, маємо:

(1) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ є несумісною тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) \neq 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) система лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ має безліч розв'язків тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ і $\det A_i(\vec{b}) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що у випадку (2) за формулами Крамера не можна описати розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Означення 1.2.116

Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається *приєднаною матрицею*.

Означення 1.2.116

Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається *приєднаною матрицею*.

Означення 1.2.116

Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається *приєднаною матрицею*.

Означення 1.2.116

Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається *приєднаною матрицею*.

Означення 1.2.116

Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається *приєднаною матрицею*.

Означення 1.2.116

Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається *приєднаною матрицею*.

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$
для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$
Отже,
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$
що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$
для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$
Отже,
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$
що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести.

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести.

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$
для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$
Отже,
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$
що і потрібно було довести.

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести.

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести.

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n}=[a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1}+\ldots+a_{kn}A_{ln}=0$$

для довільних індексів $k\neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{k1}A_{l1}+\ldots+a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1}+\ldots+a_{kn}A_{ln}=0,$$

що і потрібно було довести. ■

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$
для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$
Отже,
$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$
що і потрібно було довести.

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. ∎

Лема 1.2.117 (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Доведення. Нехай маємо матрицю $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Доведемо, що

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0$$

для довільних індексів $k \neq l$. Справді, розглянемо визначник матриці, яка отримується з матриці A заміною його l-го рядка k-им. Тоді з одного боку він дорівнює нулю, оскільки має два однакових рядки, а з іншого — розкладаючи його за l-им рядком знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln}.$$

Отже,

$$a_{k1}A_{l1} + \ldots + a_{kn}A_{ln} = 0,$$

що і потрібно було довести. ■

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

□

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

∎

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

∎

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

∎

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

∎

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

∎

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

□

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A\cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^*=I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}.$$

Недіагональні елементи матриці $A\cdot C^{*}$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}=I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}.$$

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A\cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^*=I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}.$$

Недіагональні елементи матриці $A\cdot C^{*}$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}=I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C^{*}.$$

■

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A\cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot C^*=I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C^*.$$

■

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Теорема 1.2.118

Якщо матриця $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ за лемою про фальшивий розклад визначника дорівнюють нулю, а діагональні – визначнику матриці, оскільки є сумами елементів певного рядка на алгебраїчні доповнення того ж рядка. Таким чином,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot C^* = I,$$

а це і означає, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

■

Отже, доведена теорема фактично стверджує, що обернена до матриці A є транспонованою матрицею алгебраїчних доповнень елементів матриці A, які поділено на визначник матриці A.

Дякую за увагу!