Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 10: Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування, II

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Індуктивне означення визначника матриці n-го порядку породжує запитання: *а чи існує формула для обчислення визначника матриці через її елементи?* Для відповіді на це запитання введемо деякі нові означення.

Означення 1.2.92

Перестановкою елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Якщо елементами перестановки є числа $1, 2, \ldots, n$, то ту з $n!$ перестановок цих елементів, в якій вони розміщені в порядку зростання, називатимемо *нормально впорядкованою*.

Означення 1.2.93

Інверсією називається таке розташування двох чисел в перестановці, коли більше число стоїть попереду (лівіше) меншого.

Наприклад, перестановка $2, 4, 3, 1$ має чотири інверсії: $2, 4, 3$ розташовані ліворуч від 1; 4 — ліворуч від числа 3. Перестановка, в якій кількість інверсій є парним числом називається *парною*, а в іншому випадку — *непарною*.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k-1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k-1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Теорема 1.2.94

Нехай $A=[a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді

$$\det A=\sum_{n!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$

де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Нехай $n=2$. Тоді формула (1) набуває вигляду

$$\det A=(-1)^{N(1,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(2,1)}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n=k-1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A=[a_{ij}]$ порядку $k-1$ дорівнює сумі

$$\sum_{(n-1)!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A=[a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді

$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1k}A_{1k}=\sum_{i=1}^{k}a_{1i}A_{1i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\right),$$

де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{1}$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1k} A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i} A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$

де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду

$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі

$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$

де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{1}$$
де $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1k} A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i} A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{1}$$

де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду

$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі

$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$

де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A=[a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A=\sum_{n!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n=2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A=(-1)^{N(1,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(2,1)}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n=k-1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A=[a_{ij}]$ порядку $k-1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A=[a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1k}A_{1k}=\sum_{i=1}^{k}a_{1i}A_{1i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Теорема 1.2.94

Нехай $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{1}$$

де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Нехай $n = 2$. Тоді формула (1) набуває вигляду

$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n = k - 1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A = [a_{ij}]$ порядку $k - 1$ дорівнює сумі

$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A = [a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$

де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)})$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A=[a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A=\sum_{n!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Нехай $n=2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A=(-1)^{N(1,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(2,1)}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.

Припустимо, що твердження теореми справджується при $n=k-1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A=[a_{ij}]$ порядку $k-1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A=[a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1k}A_{1k}=\sum_{i=1}^{k}a_{1i}A_{1i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A=[a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$

де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n=2$. Тоді формула (1) набуває вигляду

$$\det A = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n=k-1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A=[a_{ij}]$ порядку $k-1$ дорівнює сумі

$$\sum_{(n-1)!} (-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Розглянемо тепер довільну матрицю $A=[a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_{1i}A_{1i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a_{1i} \cdot (-1)^{i+1} \sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \right),$$

де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Теорема 1.2.94

Нехай $A=[a_{ij}]$ — матриця n-го порядку. Тоді
$$\det A=\sum_{n!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$
де $N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.
Нехай $n=2$. Тоді формула (1) набуває вигляду
$$\det A=(-1)^{N(1,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(2,1)}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$
що узгоджується з раніше введеною формулою.
Припустимо, що твердження теореми справджується при $n=k-1$. Це означає, що детермінант довільної матриці $A=[a_{ij}]$ порядку $k-1$ дорівнює сумі
$$\sum_{(n-1)!}(-1)^{N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$
Розглянемо тепер довільну матрицю $A=[a_{ij}]$ k-го порядку. Тоді
$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1k}A_{1k}=\sum_{i=1}^{k}a_{1i}A_{1i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\right),$$
де внутрішня сума береться по всім можливим перестановкам $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ чисел $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$.

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i - 1 + N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg),$$

що і потрібно було довести. ■

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg),$$

що і потрібно було довести. ∎

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Внесемо множник $a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\sum_{(k-1)!}(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Bigg),$$

що і потрібно було довести. ◻

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Big).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Big),$$

що і потрібно було довести. ■

Вираження детермінанта матриці через її елементи

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Big).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Big),$$

що і потрібно було довести. $\square$

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i, \alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i - 1 + N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg),$$

що і потрібно було довести. ■

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigl(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigr).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigl(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigr),$$

що і потрібно було довести. ∎

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg),$$

що і потрібно було довести. ■

Внесемо множник $a_{1i} \cdot (-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} = (-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A = \sum_{i=1}^{k} \Bigg(\sum_{(k-1)!} (-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)} a_{1i} a_{2\alpha_1^{(i)}} a_{3\alpha_2^{(i)}} \ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}} \Bigg),$$

що і потрібно було довести. ∎

Внесемо множник $a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\sum_{(k-1)!}(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Bigg),$$

що і потрібно було довести. ∎

Внесемо множник $a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\sum_{(k-1)!}(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Bigg).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\dots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Bigg),$$

що і потрібно було довести. ◻

Внесемо множник $a_{1i}\cdot(-1)^{i+1}$ під знак внутрішньої суми. Тоді

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{(k-1)!}(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Big).$$

Відзначимо, якщо в перестановці $\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ було N інверсій, то в перестановці $\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)$ буде рівно $i-1+N$ інверсій. Але

$$(-1)^{(i+1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{(i-1)+N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}=(-1)^{N\left(i,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)},$$

звідки

$$\det A=\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{(k-1)!}(-1)^{N\left(\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(i)}\right)}a_{1i}a_{2\alpha_1^{(i)}}a_{3\alpha_2^{(i)}}\ldots a_{k,\alpha_{k-1}^{(i)}}\Big),$$

що і потрібно було довести. ■

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то

$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:

$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то

$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:

$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
∎

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
■

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
■

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
■

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *трансплонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Ми сформулюємо властивості визначників матриць у вигляді тверджень. Далі, якщо не зазначено інше, то вважатимемо, що $A = [a_{ij}]$ — матриця n-го порядку.

Твердження 1.2.95

Якщо матриця A мастить нульовий рядок (стовпець), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, нехай усі елементи i-го рядка матриці A дорівнюють нулю. Тоді розклавши детермінант матриці A за цим рядком знайдемо:
$$\det A = 0 \cdot A_{i1} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$
■

Означення 1.2.96

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n=2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B=[a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j=1,\ldots,n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:

$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:

$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$

$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$

А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то

$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ■

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Твердження 1.2.97

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється:
$$\det A = \det A^T.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n=2$ твердження, вочевидь, справджується. Припустимо, що для кожної матриці A k-го порядку $\det A = \det A^T$. Розглянемо довільну матрицю $B = [a_{ij}]$ $(k+1)$-го порядку та транспоновану до неї матрицю B^T. Розклавши детермінант матриці B за першим рядком, а детермінант матриці B^T за першим стовпцем, отримуємо:
$$\det B = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1},$$
$$\det B^T = a_{11}A_{11}^T + a_{12}A_{12}^T + \ldots + a_{1,k+1}A_{1,k+1}^T.$$
А оскільки для всіх $j = 1, \ldots, n$ маємо $\det A_{ij} = \det A_{ij}^T$ за індукційним припущенням, то $\det B = \det B^T$. ∎

Наслідок 1.2.98

Кожна властивість, доведена для рядків детермінанта, виконується і для стовпців.

Твердження 1.2.99

Якщо матриця B отримується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то
$$\det B = -\det A.$$

Ця властивість нами вже доведена у лемі 1.2.91.

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ■

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
■

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ■

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
■

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ■

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
■

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ■

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
■

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ■

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
■

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ■

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
■

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
∎

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ∎

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$

Твердження 1.2.100

Якщо матриця A має два однакові рядки (стовпці), то
$$\det A = 0.$$

Доведення. Справді, якщо переставити ці два рядки такої матриці, то, з одного боку, матриця (а значить і детермінант) не зміниться, а з іншого — за твердженням 1.2.99 змінить знак на протилежний, що можливо лише в тому випадку, коли $\det A = 0$. ■

Твердження 1.2.101

Якщо матриця B отримується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то
$$\det B = k \cdot \det A.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:
$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$
■

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj} + b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j}+b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj}+b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

∎

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j}+b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj}+b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j}+b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj}+b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

$\square$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то
$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді
$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j}+b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj}+b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\det C = (a_{1j}+b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj}+b_{nj})A_{nj} =$$
$$= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} =$$
$$= \det A + \det B.$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то
$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j}+b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj}+b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j}+b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj}+b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj} + b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\det C = (a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj} + b_{nj})A_{nj} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} =$$

$$= \det A + \det B.$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj} + b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$

Твердження 1.2.102

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то
$$\det C = \det A + \det B.$$

Доведення. Нехай
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді
$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj} + b_{nj})A_{nj} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \\ &= \det A + \det B. \end{aligned}$$
■

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

■

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Властивості детермінантів

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

■

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Твердження 1.2.103

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необхідно довести, що $\det B = \det A$. Розкладаючи детермінант матриць B за j-м рядком, отримуємо після спрощень за твердженням 1.2.100:

$$\det B = \det A + k \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

■

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянуті властивості дають ефективний інструмент для обчислення визначників. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.2.104

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Послідовно використавши твердження 1.2.101 і 1.2.100, отримуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:
$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):
$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.105

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Спочатку за твердженням 1.2.101 винесемо трійку з другого рядка визначника:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі переставимо місцями перший та другий рядки (скористаємося твердженням 1.2.99):

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Властивості детермінантів

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

Властивості детермінантів

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

Властивості детермінантів

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

Властивості детермінантів

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

Властивості детермінантів

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до третього рядка перший, що помножений на -2, а до четвертого перший, що помножений на -5:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо детермінант за першим стовпцем:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

За твердженням 1.2.103 додамо до першого рядка третій, помножений на 2, а до другого — третій, помножений на 4:

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 15 & -33 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на деяке число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Теорема 1.2.106

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. Якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.
2. Якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.
3. Якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.

Твердження теореми 1.2.106 безпосередньо випливають з тверджень 1.2.99, 1.2.101 і 1.2.103, відповідно.

Наслідок 1.2.107

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то

$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і

$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і

$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то

$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і

$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і

$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то

$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і

$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і

$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то

$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і

$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і

$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то

$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і

$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і

$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено.

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ■

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено.

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Детермінанти елементарних матриць. Критерій оборотності матриць

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$

2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$

3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено.

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено.

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено.

Лема 1.2.108

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Матриця EA — це матриця, що отримана з матриці A з допомогою того елементарного перетворення, яке переводить одиничну матрицю I в E. Тоді, враховуючи властивості визначників, отримуємо:

1) якщо E отримується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A;$$
2) якщо E отримується з одиничної матриці множенням рядка матриці I на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \cdot \det A;$$
3) якщо E отримується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A.$$

Лему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли

$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що

$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$

а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до детермінантів і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до детермінантів і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до детермінантів використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ■

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до детермінантів і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до детермінантів і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо det(E_m)·…·det(E_1)·det(A)=0, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що det(A) = 0. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. *Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.*

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до детермінантів і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ■

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до детермінантів і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A)=0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ■

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$.

Теорему доведено.

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$.

Теорему доведено.

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли

$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що

$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$

а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m)\cdot \ldots \cdot\det(E_1)\cdot\det(A)=0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ■

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m)\cdot \ldots \cdot\det(E_1)\cdot\det(A)=0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено.

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. □

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ■

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено.

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \dots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \dots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ∎

Теорема 1.2.109

Квадратна матриця A оборотна тоді і тальки тоді, коли
$$\det A \neq 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай A — оборотна матриця n-го порядку. Тоді за теоремами 1.2.66 та 1.2.67 її ранг дорівнює n, а зведеною східчастою формою матриці A є одинична матриця I. А це в свою чергу означає, що існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$ такі, що $E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$, звідки, переходячи до детермінантів, отримуємо, що
$$1 = \det I = \det(E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A),$$
а отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай маємо матрицю A, детермінант якої відмінний від нуля. Доведемо, що до неї існує обернена. Якщо матрицю A привести до зведеної східчастої форми, то можливі такі два випадки:

1. Зведена східчаста форма — це одинична матриця I. Тоді $\operatorname{rank} A = n$, а тому вона оборотна за теоремою 1.2.67.
2. Зведена східчаста форма B матриці A має нульові рядки. Тоді $\det B = 0$. Але справджується рівність $B = E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ для деяких елементарних матриць $E_1, \ldots, E_m$. Тоді переходячи до визначників і використовуючи лему 1.2.108, знаходимо $\det(E_m) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A) = 0$, звідки за наслідком 1.2.107 маємо, що $\det(A) = 0$. Протиріччя, а тому цей випадок неможливий.

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.
Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k\cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.
1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k\cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.
Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.
1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.
Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k\cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.
1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.
Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.
1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.
Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k\cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.
1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.

Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k \cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.

1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B) = \det A + \det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

Означення 1.2.110

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається *виродженою* (*особливою*), в іншому випадку — *невиродженою* (*неособливою*).

Отже, терміни "оборотна матриця" та "невироджена матриця" ("неособлива матриця") є еквівалентними.
Дослідимо питання про можливий зв'язок між детермінантами й основними операціями над матрицями, зокрема нашою метою буде встановлення формул для $\det A^T$, $\det(A+B)$, $\det(k\cdot A)$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$ в термінах $\det A$ та $\det B$.
1. За твердженням 1.2.97 справджується рівність для кожної квадратної матриці A:

$$\det A^T = \det A.$$

2. Інтуїтивно може скластися враження, що $\det(A+B)=\det A+\det B$. Однак, це неправильно. Так, наприклад, якщо

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B)=\det I = 1$.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I &\Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I &\Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', & \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', & \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I &\Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E'_1 \cdot \ldots \cdot E'_m&, \end{aligned}$$

де $E'_1, \ldots, E'_m$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', & \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', & \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I &\Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

3. Виконується таке твердження:

Теорема 1.2.111

Якщо A — матриця порядку n і $k \in \mathbb{R}$, то
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A.$$

Теорема 1.2.111 випливає з твердження 1.2.101.

Теорема 1.2.112

Якщо A та B — квадратні матриці однакових розмірів, то
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Розглянемо окремо випадки, коли матриця A є оборотною, і коли необоротною.

а) Нехай A — оборотна матриця. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow E_m \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (E_m \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = A \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_m^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = E_1' \cdot \ldots \cdot E_m', \end{aligned}$$

де $E_1', \ldots, E_m'$ — елементарні матриці, оскільки обернена матриця до елементарної, вочевидь, є елементарною.

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} &A(BC) = I, && \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ &(CA)B = I, && \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ■

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E'_1 \dots E'_m B) = \\ &= \det E'_1 \cdot \ldots \cdot \det E'_m \cdot \det B = \\ &= \det(E'_1 \dots E'_m) \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ■

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E'_1 \dots E'_m B) = \\ &= \det E'_1 \cdot \ldots \cdot \det E'_m \cdot \det B = \\ &= \det(E'_1 \dots E'_m) \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*
Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.
Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ■

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E'_1 \dots E'_m B) = \\ &= \det E'_1 \cdot \ldots \cdot \det E'_m \cdot \det B = \\ &= \det(E'_1 \dots E'_m) \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned}&A(BC) = I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC,\\ &(CA)B = I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA,\end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ∎

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця.
Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*
Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$A(BC) = I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC,$$
$$(CA)B = I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA,$$

тобто матриці A та B оборотні.
Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ■

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ∎

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E'_1 \dots E'_m B) = \\ &= \det E'_1 \cdot \ldots \cdot \det E'_m \cdot \det B = \\ &= \det(E'_1 \dots E'_m) \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned}A(BC) = I, &\quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B = I, &\quad \text{а тому } B^{-1} = CA,\end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ∎

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ◼

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E'_1 \dots E'_m B) = \\ &= \det E'_1 \cdot \ldots \cdot \det E'_m \cdot \det B = \\ &= \det(E'_1 \dots E'_m) \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*
Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$A(BC) = I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC,$$
$$(CA)B = I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA,$$

тобто матриці A та B оборотні.
Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Тоді

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$A(BC) = I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC,$$
$$(CA)B = I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA,$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ■

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*
Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned}A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA,\end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.
Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E'_1 \dots E'_m B) = \\ &= \det E'_1 \cdot \ldots \cdot \det E'_m \cdot \det B = \\ &= \det(E'_1 \dots E'_m) \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*
Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) = I, &\quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B = I, &\quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.
Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ■

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*

Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ∎

Тоді

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1' \dots E_m' B) = \\ &= \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_m' \cdot \det B = \\ &= \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \\ &= \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

б) Нехай матриця A необоротна. Тоді AB також необоротна матриця. Справді, доведемо таке допоміжне твердження: *якщо матриця AB оборотна, то матриці A та B також оборотні.*
Якщо матриця AB оборотна, то це означає, що існує така матриця C, що $(AB)C = C(AB) = I$. З асоціативності операції множення матриць знаходимо:

$$\begin{aligned} A(BC) &= I, \quad \text{а тому } A^{-1} = BC, \\ (CA)B &= I, \quad \text{а тому } B^{-1} = CA, \end{aligned}$$

тобто матриці A та B оборотні.
Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. ■

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. $\square$

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ∎

5. Зв'язок між детермінантом матриці й оберненої до неї описує таке твердження.

Теорема 1.2.113

Якщо A — оборотна матриця, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Доведення. Маємо: $A \cdot A^{-1} = I$. Тоді $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, що еквівалентно рівності $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, звідки й отримуємо твердження теореми. ■

Дякую за увагу!